全国500所名校考研最新真题和教材笔记　长期更新，免费下载

联系方式：QQ 645278845

傅献彩《物理化学》(第5版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

阎石《数字电子技术基础》(第6版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

邢其毅《基础有机化学》(第4版)套资料[教材+课后习题+题库]精品推荐

曼昆《宏观经济学》(第10版)笔记和课后习题详解

郑君里《信号与系统》(第3版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

伍德里奇《计量经济学导论》(第6版)套资料[教材+笔记+课后习题]精品推荐

茆诗松《概率论与数理统计教程》(第3版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

张延《中级宏观经济学》套资料[教材+课后习题详解]精品推荐

浙江大学《概率论与数理统计》(第4版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

田克勤《中国化马克思主义概论》(第3版)套资料[教材+课后习题+考研真题]精品推荐龙驭球《结构力学I》(第4版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

同济大学数学系《高等数学》(第7版)笔记和课后习题(含考研真题)详解

中山大学系统科学与工程学院《高等代数B》考研全套精品推荐

中山大学系统科学与工程学院《数学分析B》考研全套精品推荐

中山大学《数学分析与等代数》考研全套精品推荐

中山大学《生物化学(一)》考研全套精品推荐

中山大学生命科学学院《338生物化学》考研全套精品推荐

中山大学《高等代数》考研全套精品推荐}

中山大学数据科学与计算机学院《数学分析(A)》考研全套精品推荐)

中山大学数据科学与计算机学院《高等代数(A)》考研全套精品推荐

中山大学航空航天学院《工程热力学B》[专业硕士]考研全套精品推荐

中山大学化学工程与技术学院《有机化学B》考研全套精品推荐

中山大学国际金融学院《管理学(B)》考研全套精品推荐

中山大学国际金融学院《经济学(含微观和宏观经济学)》考研全套精品推荐

中山大学旅游学院《旅游学概论》考研全套精品推荐

中山大学|　搜索

中山大学系统科学与工程学院《高等代数B》考研全套 精品推荐

中山大学系统科学与工程学院《数学分析B》考研全套 精品推荐

中山大学《数学分析与高等代数》考研全套 精品推荐

中山大学《生物化学（一）》考研全套 精品推荐

中山大学生命科学学院《338生物化学》考研全套 精品推荐

中山大学《高等代数》考研全套 精品推荐

中山大学数据科学与计算机学院《数学分析（A）》考研全套 精品推荐

中山大学数据科学与计算机学院《高等代数（A）》考研全套 精品推荐

中山大学航空航天学院《工程热力学B》[专业硕士]考研全套 精品推荐

中山大学化学工程与技术学院《有机化学B》考研全套 精品推荐

中山大学国际金融学院《管理学（B）》考研全套 精品推荐

中山大学国际金融学院《经济学（含微观和宏观经济学）》考研全套 精品推荐

中山大学旅游学院《旅游学概论》考研全套 精品推荐

中山大学环境科学与工程学院《环境学导论》考研全套 精品推荐

中山大学政治与公共事务管理学院《公共管理学（单考）》考研全套 精品推荐

VISIT…

目 录

第 1 章 绪 论 5
1.1 复习笔记 5
1.2 课后习题详解 11
1.3 名校考研真题详解 13
第 2 章 平面体系的机动分析 14
2.1 复习笔记 14
2.2 课后习题详解 19
2.3 名校考研真题详解 31
第 3 章 静定梁与静定刚架 37
3.1 复习笔记 37
3.2 课后习题详解 47
3.3 名校考研真题详解 76
第 4 章 静定拱 85
4.1 复习笔记 85
4.2 课后习题详解 90
4.3 名校考研真题详解 96
第 5 章 静定平面桁架 101
5.1 复习笔记 101
5.2 课后习题详解 107
5.3 名校考研真题详解 128
第 6 章 结构位移计算 136
6.1 复习笔记 136
6.2 课后习题答案 153
6.3 名校考研真题详解 173
第 7 章 力 法 183
7.1 复习笔记 183
7.2 课后习题详解 207
7.3 名校考研真题详解 249
第 8 章 位移法 260
8.1 复习笔记 260
8.2 课后习题详解 276
8.3 名校考研真题详解 299
第 9 章 渐近法 309
9.1 复习笔记 309
9.2 课后习题详解 317
9.3 名校考研真题详解 337
第 10 章 矩阵位移法 344
10.1 复习笔记 344
10.2 课后习题详解 360
10.3 名校考研真题详解 373
第 11 章 影响线及其应用 379
11.1 复习笔记 379
11.2 课后习题详解 400
11.3 名校考研真题详解 428

第1章　绪　论

1.1　复习笔记

【知识框架】

- 绪论
  - 结构力学研究的对象和任务
    - 结构定义
    - 研究对象
    - 主要任务
  - 荷载的分类
    - 荷载定义
    - 荷载分类
      - 按作用用时间
        - 恒载
        - 活载
      - 按荷载的作用位置是否变化
        - 固定荷载
        - 移动荷载
      - 按荷载对结构所产生的动力效应大小
        - 静力荷载
        - 动力荷载
  - 结构的计算简图
    - 计算简图的概述
    - 简化的具体任务
      - 杆件的简化
      - 支座和结点的简化
      - 荷载的简化
      - 体系的简化
  - 支座和结点的类型
    - 支座
      - 支座定义
      - 支座分类：活动铰支座、固定铰支座、固定支座、滑动支座
    - 结点
      - 结点定义
      - 结点分类：铰结点、刚结点、组合结点
  - 结构的分类
    - 按几何特征：杆系结构、薄壁结构、实体结构
    - 按受力特性：梁、拱、刚架、桁架、组合结构、悬索结构
    - 按照杆轴线和外力的空间位置：平面结构、空间结构
    - 按照内力是否静定：静定结构、超静定结构

【重点难点归纳】

一、结构力学的研究对象和任务

1．结构的定义

结构是指建筑物和工程设施中用以担负预定任务、支承荷载的部分。

2．研究对象

（1）结构力学

主要研究由杆件所组成的结构。

（2）材料力学

主要研究单个杆件的计算。

（3）弹性力学

对杆件作更精确的分析，主要研究板、壳、块体等非杆状结构。

3．主要任务

（1）研究结构在荷载等因素作用下的内力和位移的计算。在此基础上，即可利用后续相关专业课程知识进行结构设计或结构验算。

（2）研究结构的稳定计算，以及动力荷载作用下结构的动力反应。

（3）研究结构的组成规则和合理形式等问题。

二、荷载的分类

1．载荷的定义

荷载是指作用在结构上的主动力。

2．载荷的分类

（1）按作用时间

①恒载

恒载是指长期作用在结构上的不变荷载，如结构的自重、土压力等。

②活载

活载是指暂时作用于结构上的可变荷载，如列车、人群、风、雪等。

（2）按荷载的作用位置是否变化

①固定荷载

固定荷载是指在结构上的作用位置可以认为是不变动的恒载及某些活载（如风、雪等）。

②移动荷载

移动荷载是指可以在结构上移动的活载，如列车、汽车、吊车等。

（3）按荷载对结构所产生的动力效应大小

①静力荷载

a．定义

静力荷载是指其大小、方向和位置不随时间变化或变化很缓慢的荷载。

b．特点

静力载荷不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力的影响。结构的自重及其他恒载即属于静力荷载。

②动力载荷

a．定义

动力荷载是指随时间迅速变化的荷载。

b．特点

动力载荷将引起结构振动，使结构产生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响。打桩机产生的冲击荷载，动力机械产生的振动荷载，风及地震产生的随机荷载等，都属于动力荷载。

三、结构的计算简图

1．计算简图概述

结构的计算简图是指略去次要因素，用一个简化图形来代替实际结构的图形。

2．简化具体任务

（1）杆件的简化：常以其轴线代表。

（2）支座和结点的简化。

（3）荷载的简化：常简化为集中荷载及线分布荷载。

（4）体系的简化：将空间结构简化为平面结构。

四、支座和结点的类型

1．支座的定义

支座是指把结构与基础联系起来的装置。

2．支座的分类

（1）活动铰支座

①特点

活动铰支座允许结构在支承处绕圆柱铰转动和沿平行于支承平面方向移动，但铰点不能沿垂直于支承面的方向移动。

②支座反力

活动支座的反力为通过铰点中心并与支撑平面垂直的力 F_A。

③表示方法

活动支座的计算简图可以用一根垂直于支承面的链杆 AB 来表示（图 1-1-1（d））。

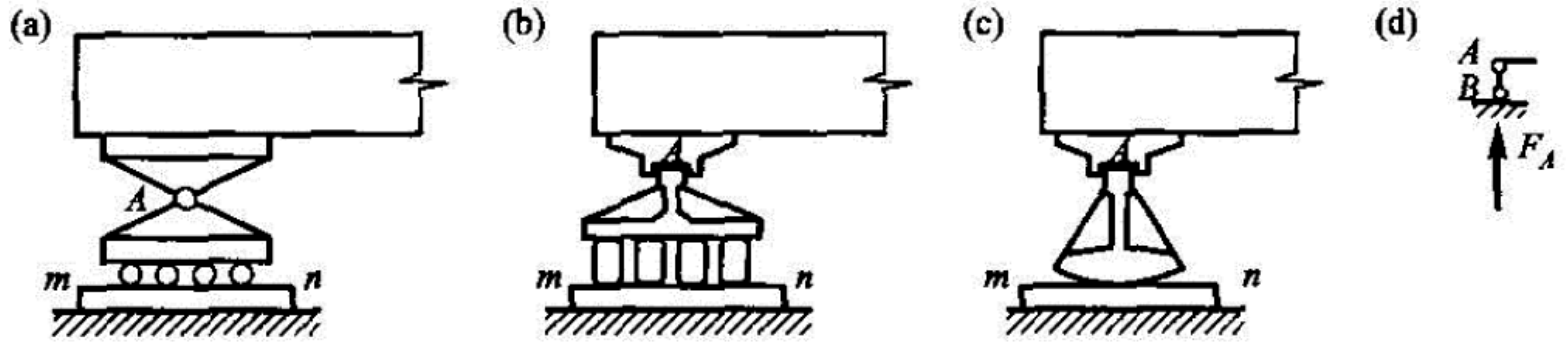


图 1-1-1

（2）固定铰支座

①特点

固定铰支座容许结构在支承处绕圆柱铰转动，但铰点不能作水平和竖向移动。

②支座反力

支座反力 F_A 通过铰中心，通常可用水平和竖向反力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 来表示。

③表示方法

固定支座的计算简图可用交于 A 点的两根支承链杆来表示，如图 1-1-2（c）或（d）所示。

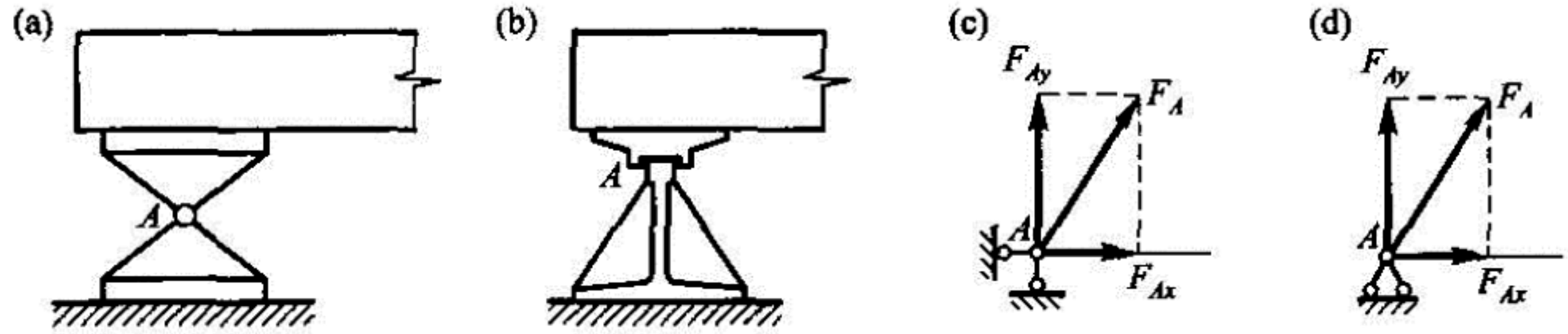


图 1-1-2

（3）固定支座

①特点

固定支座不容许结构在支承处发生任何移动和转动。

②支座反力

固定支座的反力通常用水平反力 F_{Ax}、竖向反力 F_{Ay} 和反力偶 M_A 来表示。

③表示方法

固定支座的计算简图如图 1-1-3b 所示。

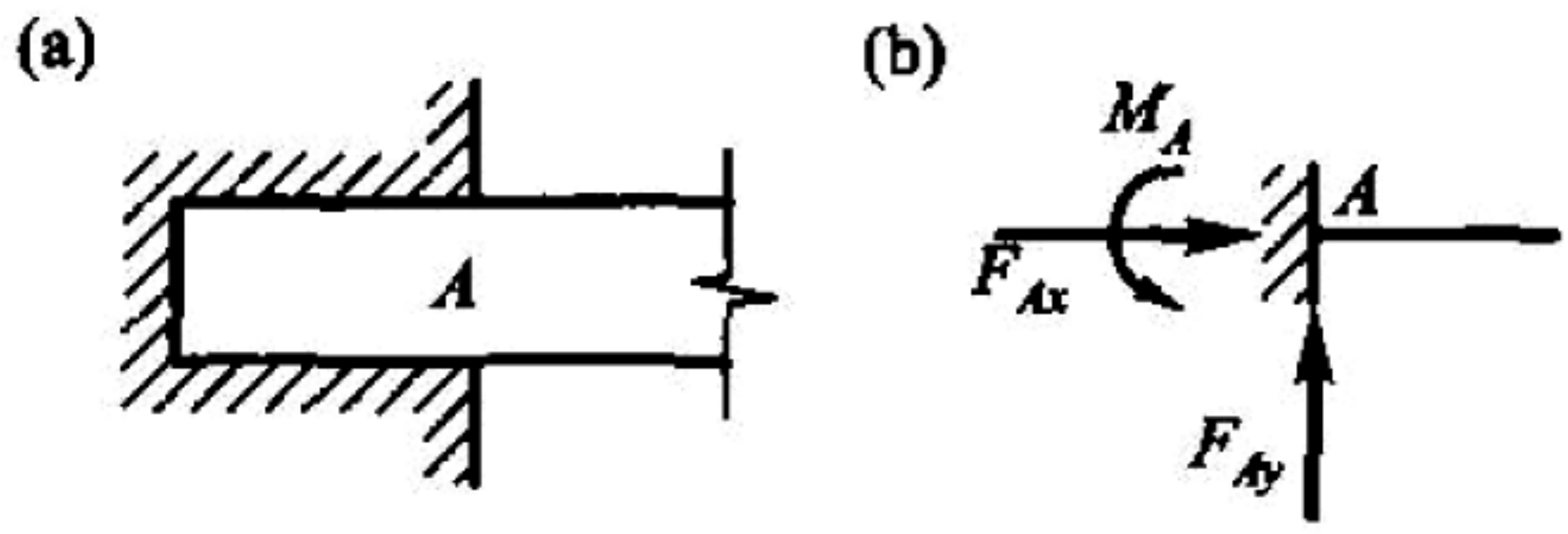


图 1-1-3

（4）滑动支座

①特点

滑动支座使结构在支承处不能转动，不能沿垂直于支承面的方向移动，但可沿支承面方向滑动。滑动支座又称定向支座。

②支座反力

滑动制作的反力为一个垂直于支承面（通过支承中心点）的力和一个力偶。

③表示方法

滑动支座的计算简图可用垂直于支承面的两根平行链杆表示。图 1-1-4（a）为一水平滑动支座，图 1-1-4（b）、（c）为其计算简图；图 1-1-5（a）为竖向滑动支座，图 1-1-5（b）为其计算简图。

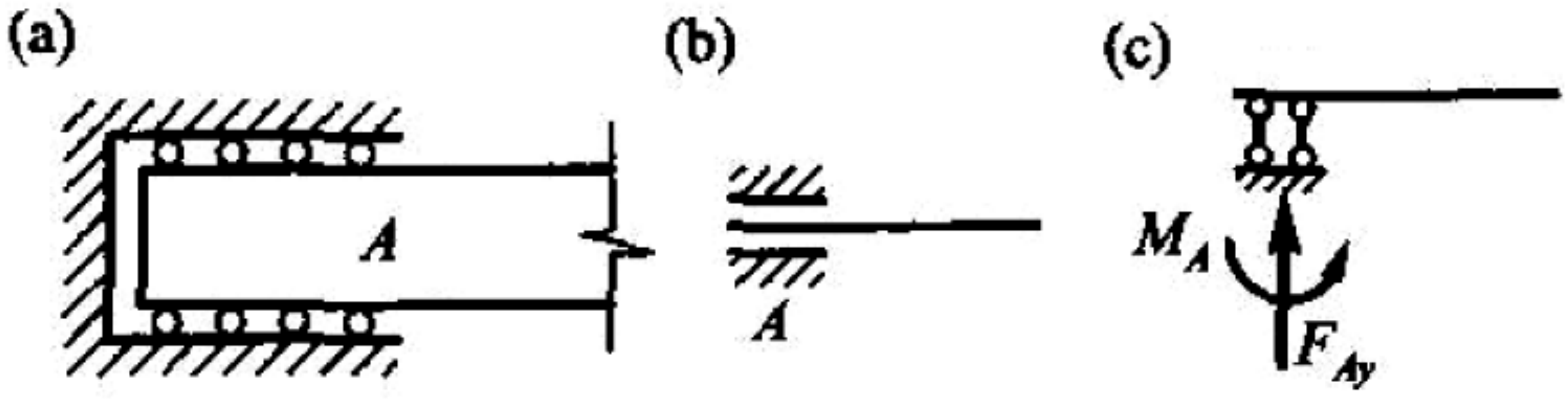


图 1-1-4

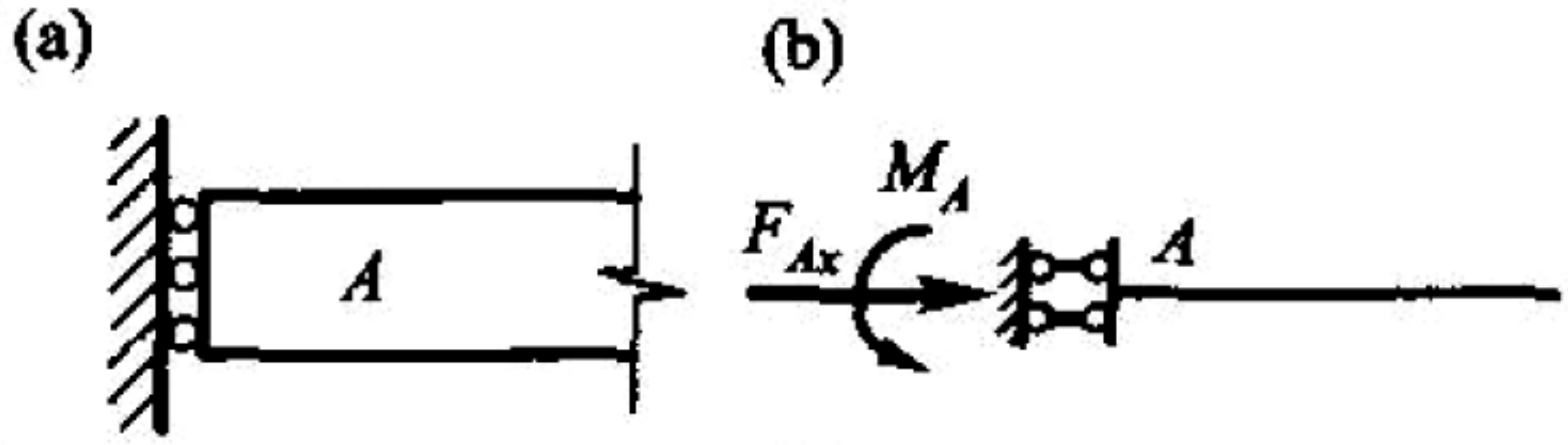


图 1-1-5

3．结点的定义

结点是指结构中杆件相互联结的位置。

4．结点的分类

（1）铰结点

铰结点的特征是各杆端不能相对移动但可相对转动，可以传递力但不能传递力矩。

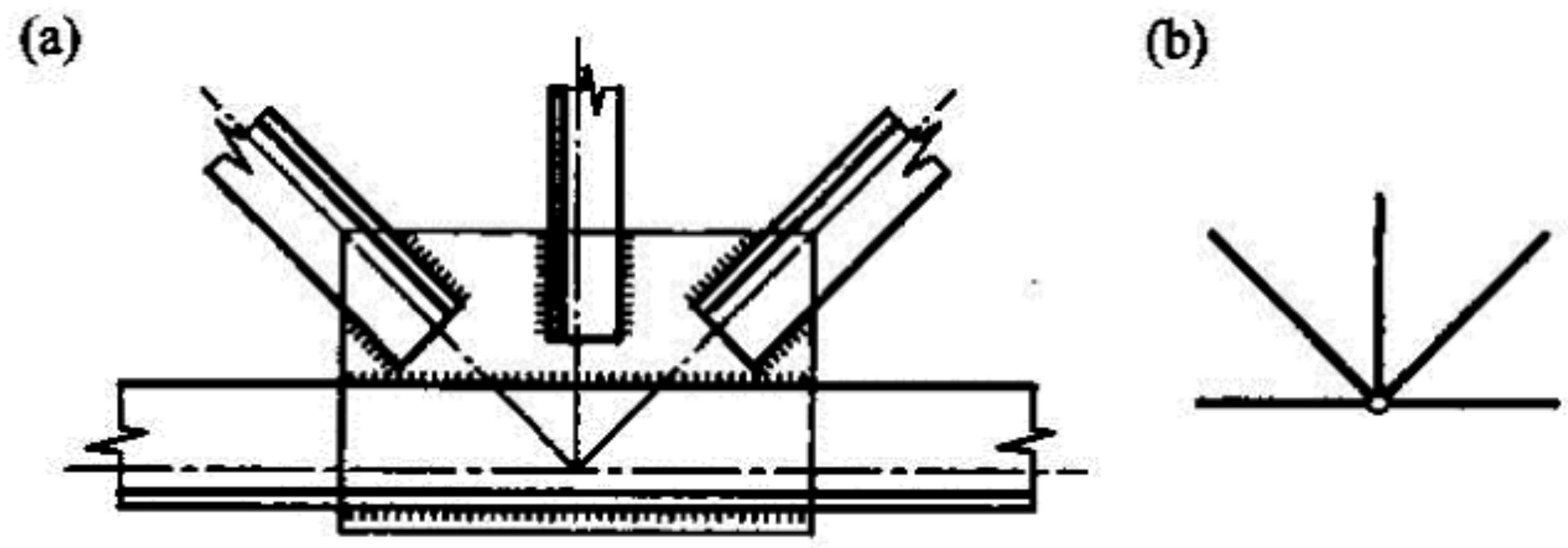


图 1-1-6

（2）刚结点

刚结点的特征是各杆端不能相对移动也不能相对转动，可以传递力也能传递力矩。

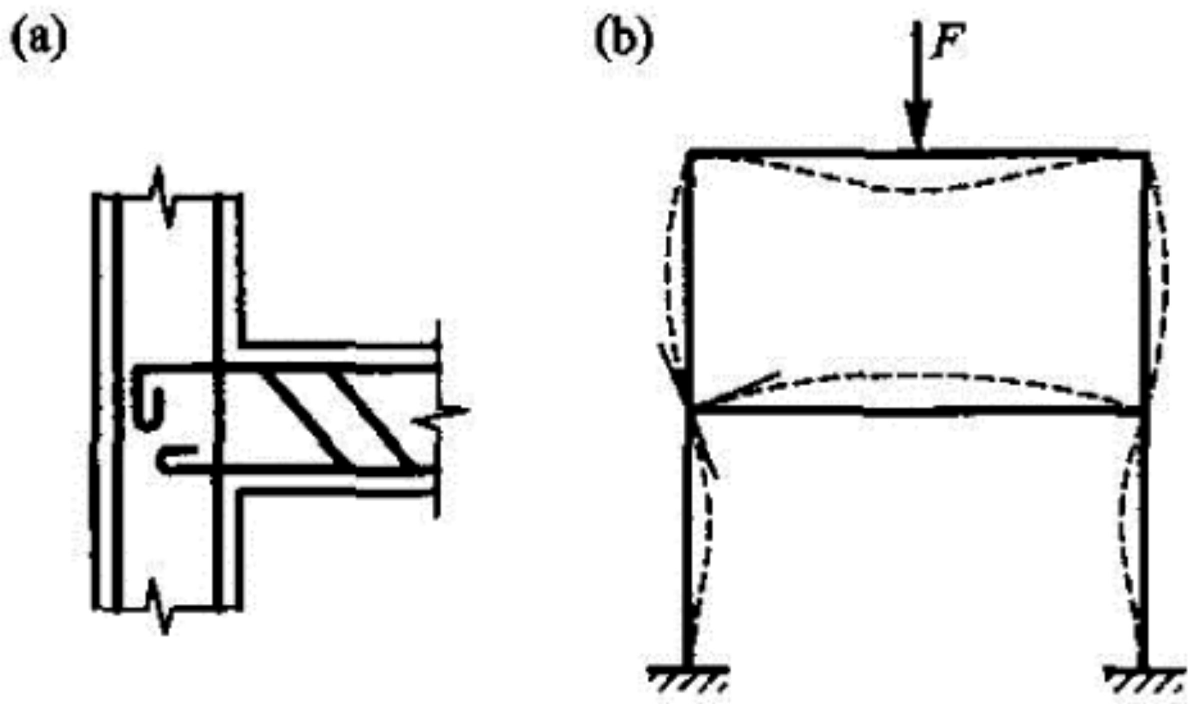


图 1-1-7

（3）组合结点

这是部分刚结、部分铰结的结点。



图 1-1-8

五、结构的分类

1．结构按照几何特征

（1）杆系结构

杆系结构是由长度远大于其他两个尺度即截面的高度和宽度的杆件组成的结构。

（2）薄壁结构

薄壁结构是指其厚度远小于其他两个尺度即长度和宽度的结构，如板（图 1-1-9）和壳（图 1-1-10）。

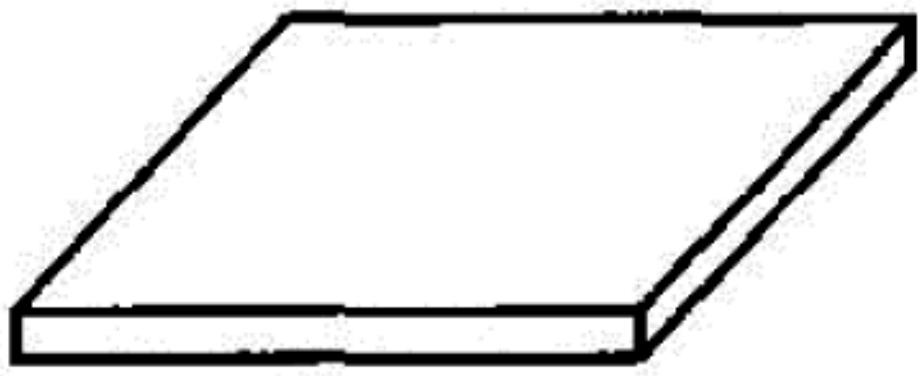


图 1-1-9

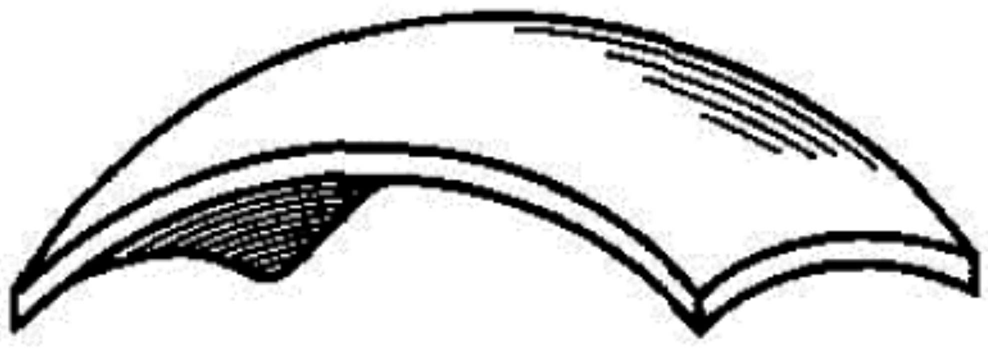


图 1-1-10

（3）实体结构

实体结构则三个方向的尺度相近，例如水坝（图 1-1-11）、地基和钢球等。

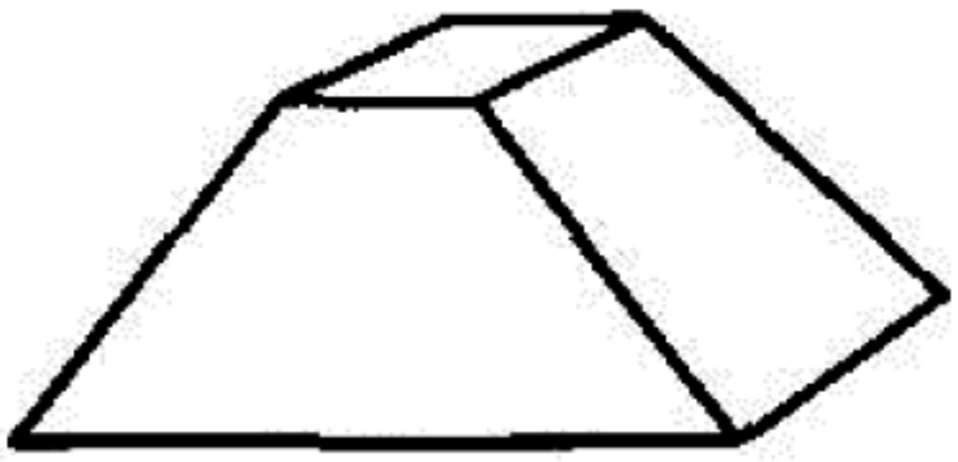


图 1-1-11

2．杆系结构按受力特性

（1）梁

梁是一种受弯杆件，其轴线通常为直线，当荷载垂直于梁轴线时，横截面上的内力只有弯矩和剪力，没有轴力。梁有单跨的和多跨的（图 1-1-12）。

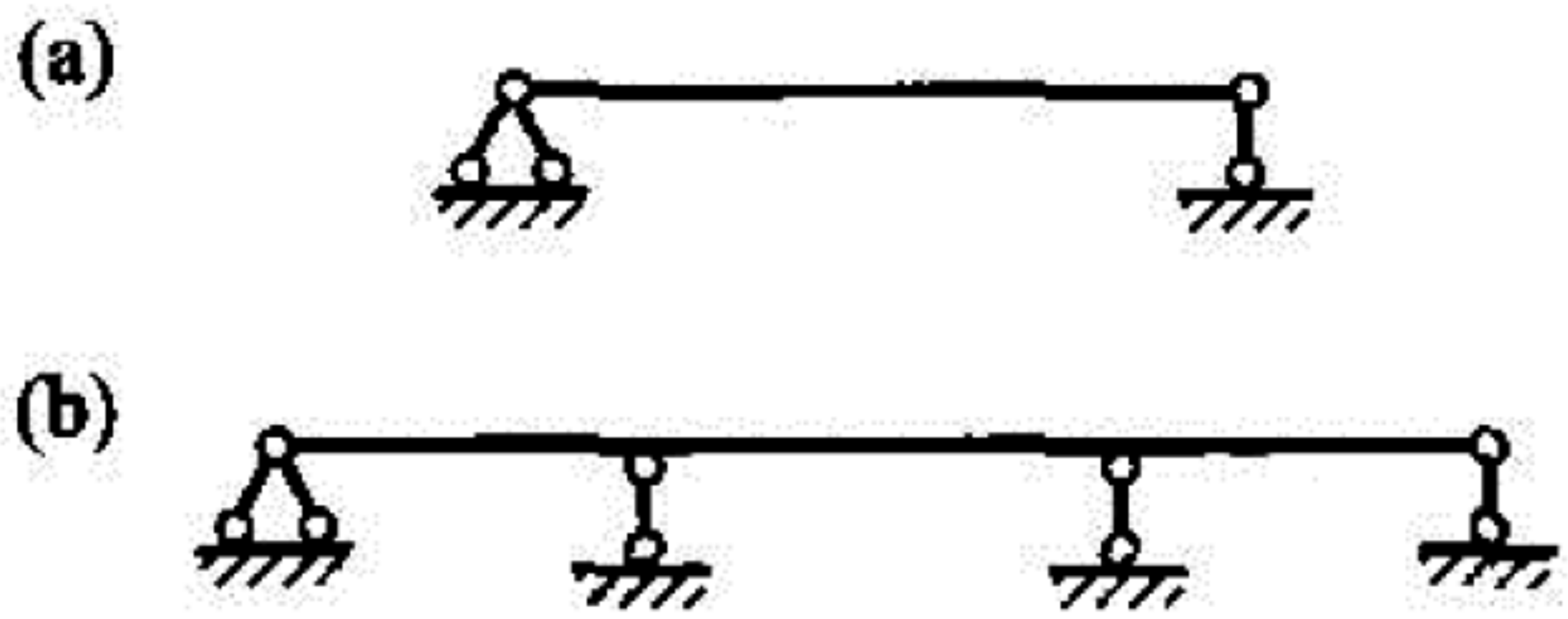


图 1-1-12

（2）拱

拱的轴线为曲线且在竖向荷载作用下会产生水平反力（推力），这使得拱比跨度、荷载相同的梁的弯矩及剪力都要小，而有较大的轴向压力（图 1-1-13）。



图 1-1-13

（3）刚架

由直杆组成并具有刚结点（图 1-1-14），各杆均为受弯杆，内力通常是弯矩、剪力和轴力都有。

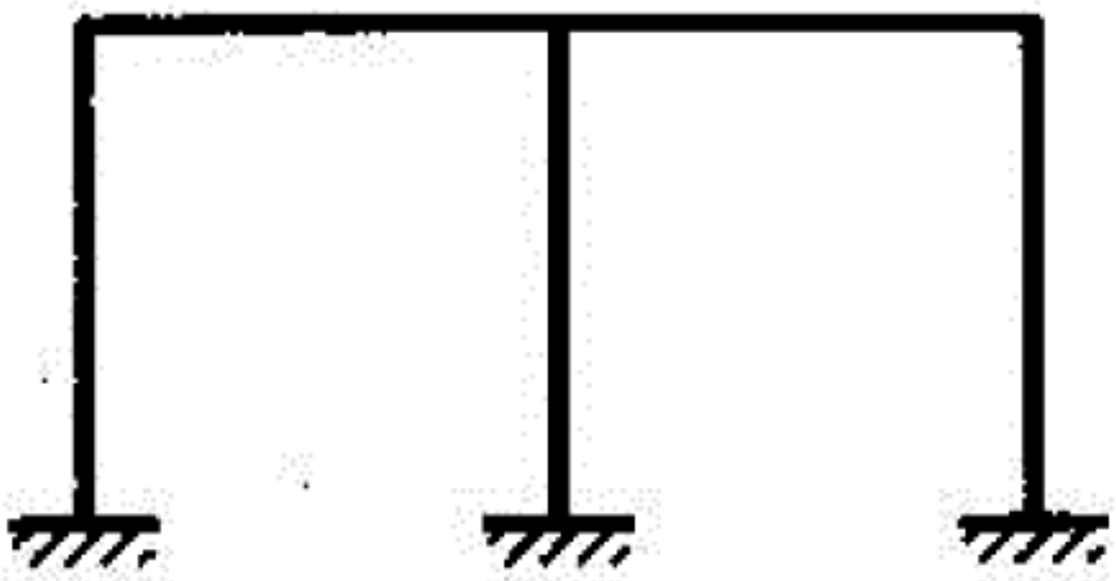


图 1-1-14

（4）桁架

由直杆组成，但所有结点均为铰结点（图 1-1-15），当只受到作用于结点的集中荷载时，各杆只产生轴力。

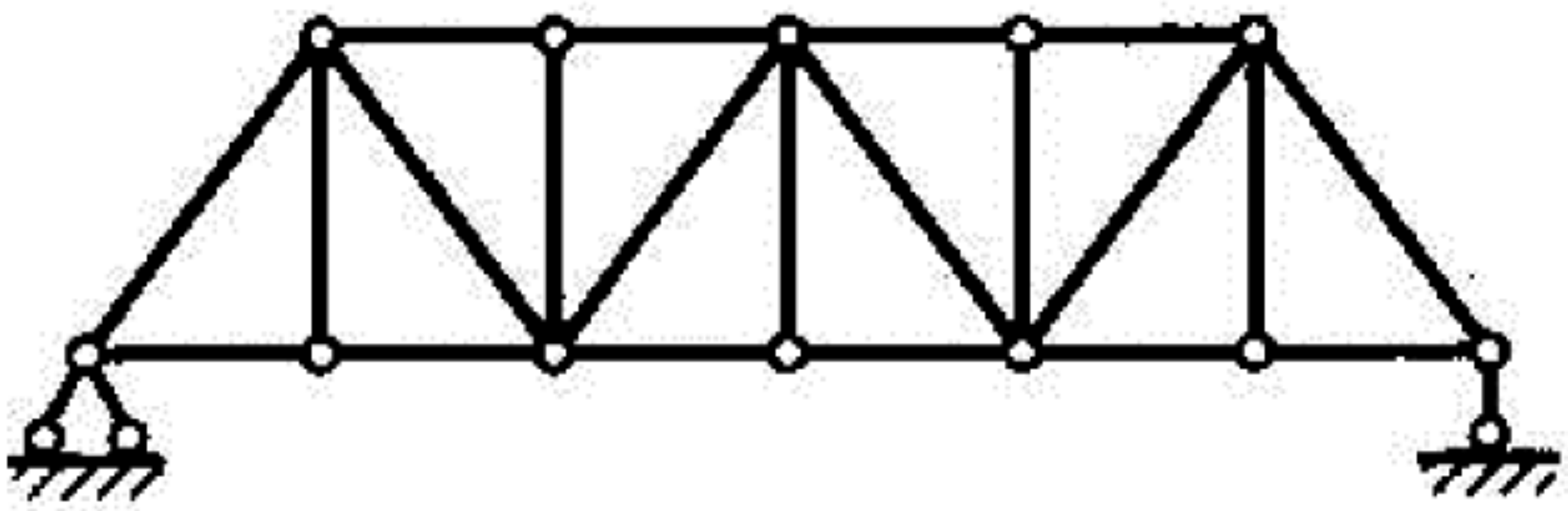


图 1-1-15

（5）组合结构

这是由桁架和梁或桁架与刚架组合在一起的结构，其中有些杆件只承受轴力，另一些杆件同时还承受弯矩和剪力（图 1-1-16）。

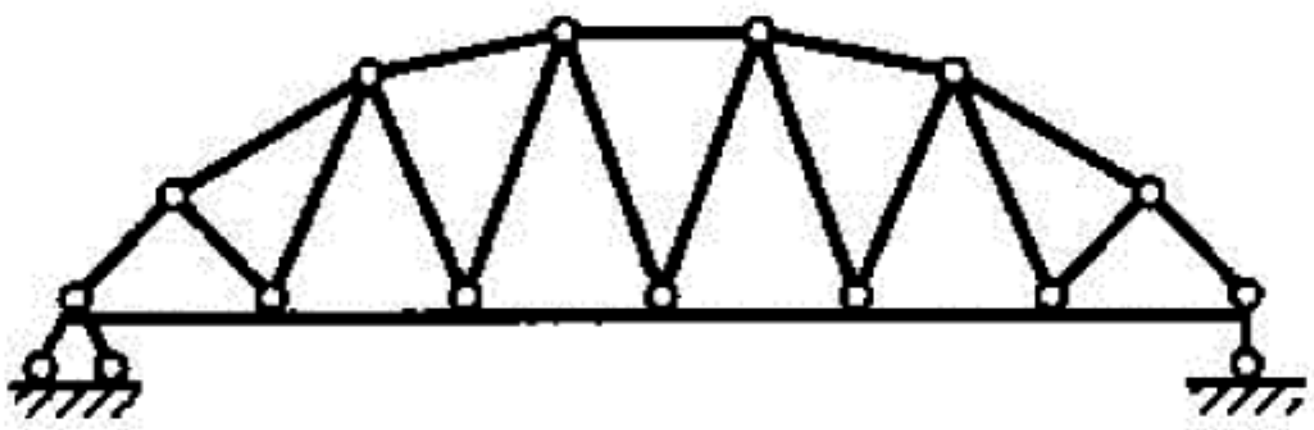


图 1-1-16

（6）悬索结构

主要承重构件为悬挂于塔、柱上的缆索，索只受轴向拉力，可最充分地发挥钢材强度，且自重轻，可跨越很大的跨度，如悬索屋盖、悬索桥、斜拉桥（图 1-1-17）等。

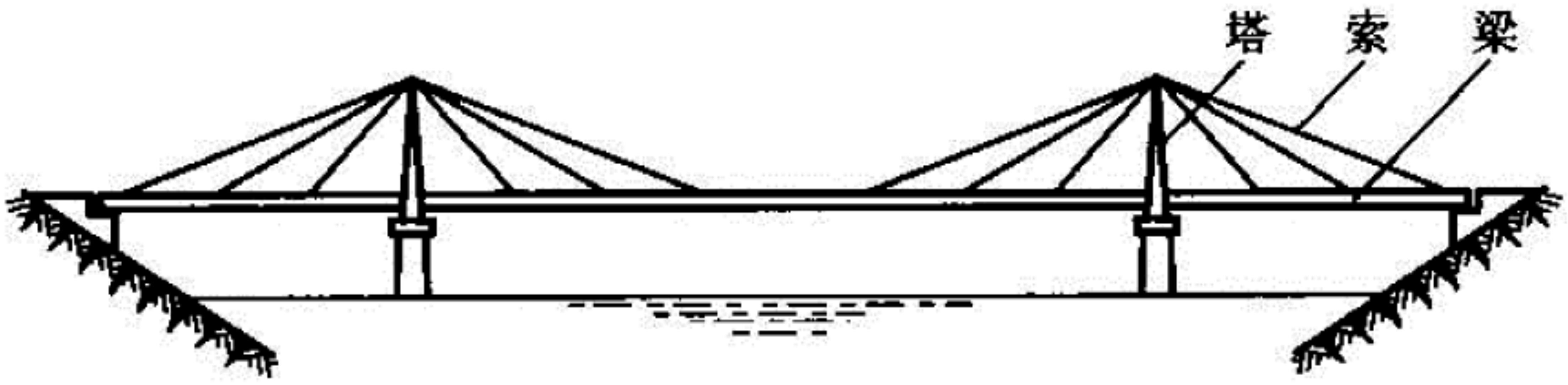


图 1-1-17

3．按照杆轴线和外力的空间位置

（1）平面结构

平面结构是指各杆轴线及外力均在同一平面内的结构。

（2）空间结构

空间结构是指各杆轴线及外力不在同一平面内的结构。如图 1-1-18 所示塔架。

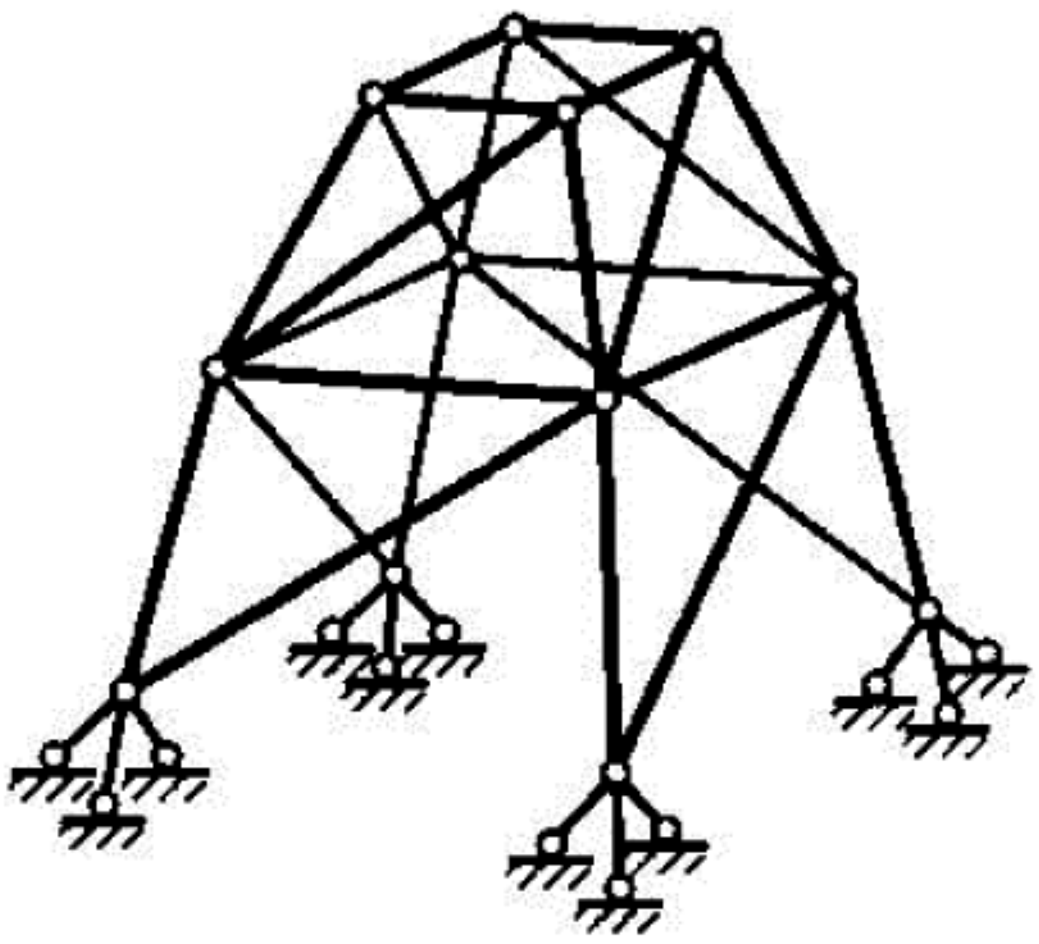


图 1-1-18

4．按照内力是否静定

（1）静定结构

静定结构是指在任意荷载作用下结构的全部反力和内力都可以由静力平衡条件确定的结构（图 1-1-12（a））。

（2）超静定结构

超静定结构是指静力平衡条件不能确定全部反力和内力，还必须考虑变形条件才能确定的结构（图 1-1-12（b））。

1.2 课后习题详解

复习思考题

1．结构力学的研究对象和具体任务是什么？

答：（1）结构力学的研究对象

结构力学研究的主要对象是杆系结构。

（2）结构力学的具体任务

①研究结构在荷载等因素作用下的内力和位移的计算。在此基础上，即可利用后续相关专业课程知识进行结构设计或结构验算；

②研究结构的稳定计算，以及动力荷载作用下结构的动力反应；

③研究结构的组成规则和合理形式等问题。

2．什么是荷载？结构主要承受哪些荷载？如何区分静力荷载和动力荷载？

答：（1）荷载的定义

荷载是指作用在结构上的主动力。

（2）荷载的分类

①按作用时间分为：恒载和活载。

②按荷载的作用位置是否变化分为：固定荷载和移动荷载。

③按荷载对结构所产生的动力效应大小分为：静力荷载和动力荷载。

（3）静力荷载和动力荷载的主要区别

荷载是否使结构产生不可忽略的加速度，即是否可以略去惯性力的影响。若可忽略加速度（惯性力），则为静荷载；若不可忽略加速度（惯性力），则为动荷载。

3．什么是结构的计算简图？如何确定结构的计算简图？

答：（1）计算简图的定义

结构的计算简图是指略去次要因素，用一个简化图形来代替实际结构的图形。

（2）确定计算简图的方法

①杆件的简化，常以其轴线代表。

②支座和结点的简化。

③荷载的简化，常简化为集中荷载及线分布荷载。

④体系的简化，将空间结构简化为平面结构。

4．结构的计算简图中有哪些常用的支座和结点？

答：结构的计算简图中常用的支座和结点分别有：

（1）常用的支座：活动铰支座、固定铰支座、固定支座、滑动支座。

（2）常用的结点：铰结点、刚结点、组合结点。

5．哪些结构属于杆系结构？它们有哪些受力特征？

答：（1）杆系结构的定义

杆系结构是指长度远大于其他两个尺度（即截面的高度和宽度）的杆件组成的结构。杆系结构包括：梁、拱、刚架、桁架、组合结构、悬索结构。

（2）各种杆系结构的受力特征

①梁。梁是一种受弯杆件，其轴线通常为直线，当荷载垂直于梁轴线时，横截面上的内力只有弯矩和剪力，没有轴力。

②拱。拱的轴线为曲线且在竖向荷载作用下会产生水平反力（推力），这使得拱比跨度、荷载相同的梁的弯矩及剪力都要小，而且有较大的轴向压力。

③刚架。刚架是由直杆组成并具有刚结点的结构，各杆均为受弯杆，内力通常是弯矩、剪力和轴力都有。

④桁架。桁架是由直杆组成，但所有结点均为铰结点的结构，当只受到作用于结点的集中荷载时，各杆只产生轴力。

⑤组合结构。组合结构是由桁架和梁或桁架与刚架组合在一起的结构，其中有些杆件只承受轴力，另一些杆件同时还承受弯矩和剪力。

⑥悬索结构。悬索结构的主要承重构件为悬挂于塔、柱上的缆索，索只受轴向拉力，可最充分地发挥钢材强度，且自重轻，跨度大。

1.3 名校考研真题详解

本章暂未编选名校考研真题。

第 2 章　平面体系的机动分析

2.1　复习笔记

【知识框架】

平面体系的机动分析

- 平面体系的概述
  - 几何不变体系
  - 几何可变体系
    - 常变体系
    - 瞬变体系
- 平面体系的计算自由度
  - 自由度
    - 自由度定义
    - 自由度个数
  - 联系
    - 联系的定义
    - 联系的分类：链杆、单铰、复铰
    - 多余联系
  - 计算自由度
    - 计算自由度的公式
      - 一般体系
      - 铰结链杆体系
    - 自由度与体系是否几何不变的关系
- 几何不变体系的基本组成规则
  - 三刚片规则
  - 二元体规则
  - 两刚片规则
- 瞬变体系
  - 瞬变体系的定义
  - 几种常见的瞬变体系
    - 三刚片规则中，三个铰在同一直线上的体系
    - 二元体的两杆共线的体系
    - 两刚片规则中，三根链杆交于同一点，且互不平行
    - 两刚片规则中，三根链杆全平行
- 三刚片体系中虚铰在无穷远处的情况
  - 无穷远点的性质
  - 一铰无穷远
  - 两铰无穷远
  - 三铰无穷远
- 几何构造与静定性的关系
  - 静定体系：体系几何不变且无多余联系
  - 超静定体系：体系几何不变，而且有多余联系

【重点难点归纳】

一、体系

1．几何不变体系

几何不变体系是指在任意载荷作用时，若不考虑材料的变形，则其几何形状与位置均能保持不变的体系。

2．几何可变体系

（1）定义

几何可变体系是指在很小的荷载作用下，即使不考虑材料的变形，会发生机械运动而不能保持原有的几何形状或位置的体系。

（2）分类

①常变体系；

②瞬变体系。

二、平面体系的计算自由度

1．自由度

（1）自由度定义

自由度是指体系运动时所具有的独立运动方式数目，也就是体系运动时可以独立变化的几何参数数目，或者说确定体系位置所需的独立坐标数目。

（2）自由度个数

①平面内的一个点的自由度为 2；

②平面内的一个刚体的自由度为 3；

③机械中常用的机构是沿特定的一种轨迹运动，具有一个自由度；

④几何不变体系不能发生任何运动，其自由度应等于零；
⑤凡自由度大于零的体系都是几何可变体系。

2．联系

（1）联系的定义

联系是指限制运动的装置，也称为约束。

一个联系是指能减少一个自由度的装置。

（2）联系的分类

①链杆

一根链杆为一个联系。

②铰

a．单铰

单铰是指联结两个刚片的一个铰。

一个单铰为两个联系，也就是相当于两根链杆的作用。

b．复铰

复铰是指同时联结两个以上刚片的一个铰。

联结 n 个刚片的复铰相当于（n-1）个单铰。

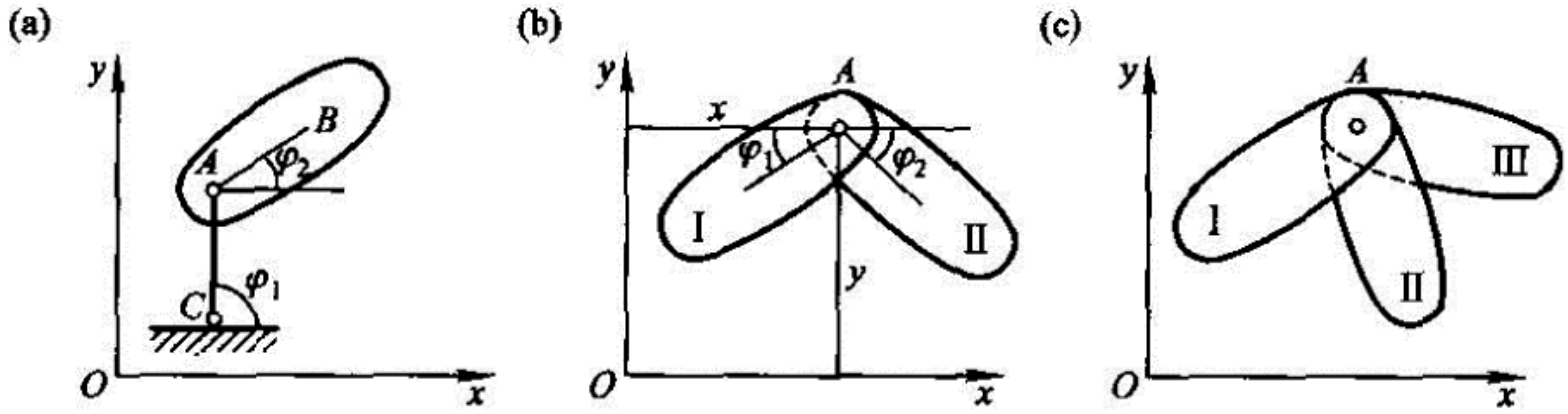


图 2-1-1

（3）多余联系

多余联系是指加入体系中而并不能减少体系的自由度的联系。

三根竖向支座链杆中有一根是多余联系。

多余联系对于保持体系的几何不变性来说是不必要的，但对于改善结构的受力等方面是需要的。

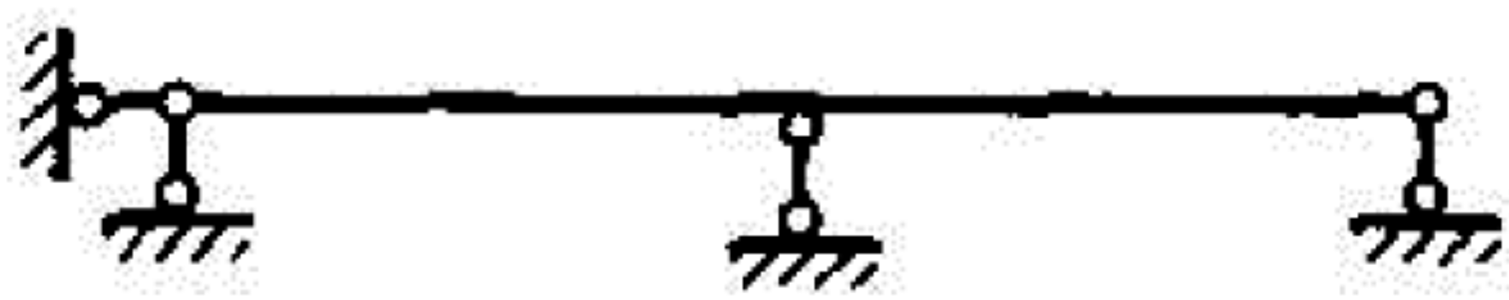


图 2-1-2

3．平面体系的计算自由度

（1）计算自由度计算公式

①一般体系

$$W=3m-(2h+r)$$

式中，m 为刚片数；h 为单铰个数；r 为支座链杆数。

②铰结链杆体系

铰结链杆体系是指完全由两端铰结的杆件所组成的体系。

自由度计算公式

$$W=2j-(b+r)$$

式中，j 为结点数；b 为杆件数；r 为支座链杆数。

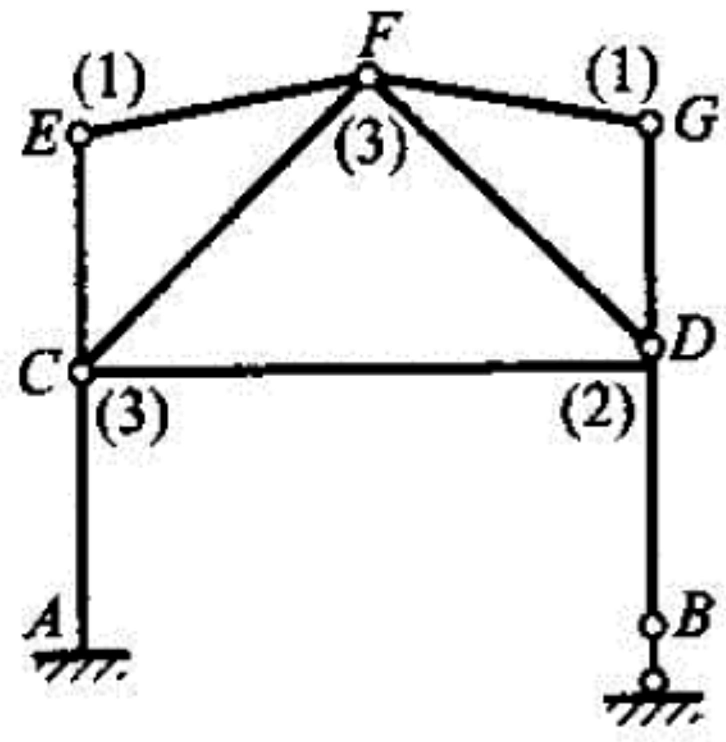


图 2-1-3

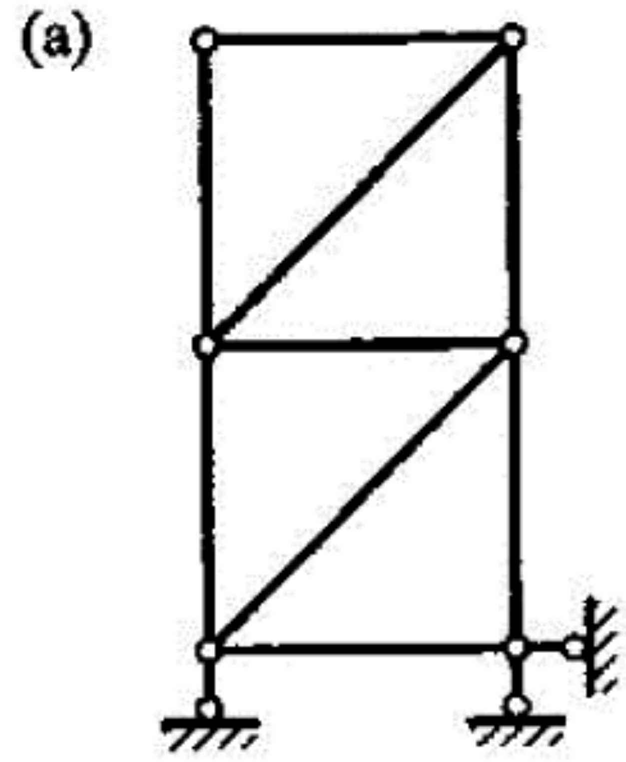


图 2-1-4

（2）自由度与体系是否几何不变的关系

①W＞0，表明体系缺少足够的联系，因此肯定是几何可变的。

②W＝0，表明体系具有成为几何不变所需的最少联系数目。如果布置得当。没有多余联系，体系将是几何不变的（图 2-1-4（a））；如果布置不当，具有多余联系，则体系是几何可变的。

③W＜0，表明体系在联系数目上还有多余，体系具有多余联系。但体系是否几何不变同样要看联系布置是否得当。

有时可不考虑支座链杆，而只检查体系本身（或称体系内部）的几何不变性。这时体系本身为几何不变时必须满足 W≤3 的条件。

一个几何不变体系必须满足 W≤0 的条件，但 W≤0 不能确定体系为几何不变体系。为了判别体系是否几何可变，还必须进一步研究几何不变体系的组成规则。

三、几何不变体系的基本组成规则

1．三刚片规则

三个刚片用不在同一直线上的三个单铰两两铰联，组成的体系是几何不变的，而且没有多余联系。

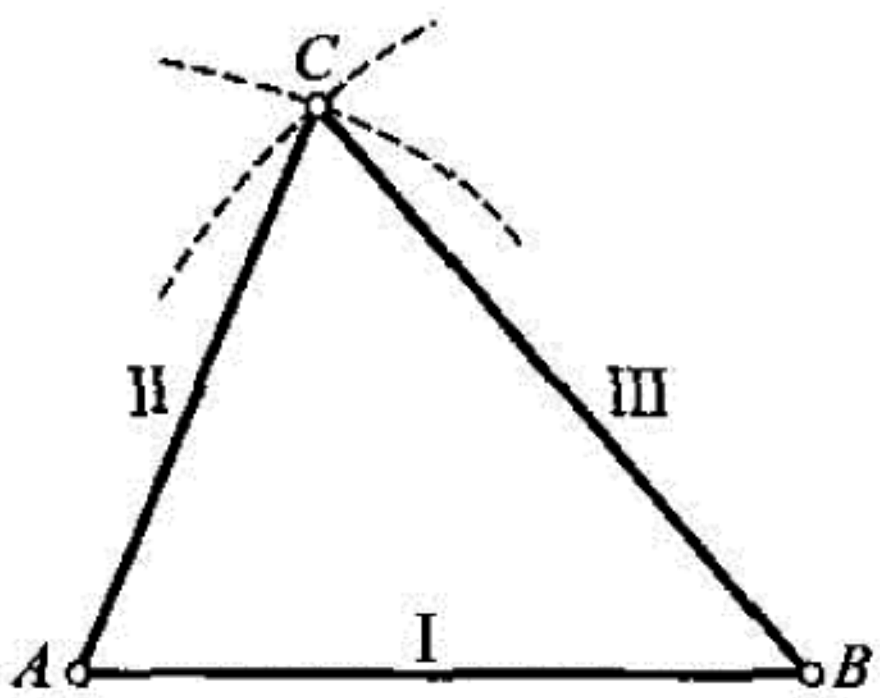


图 2-1-5

2．二元体规则

在一个刚片上增加一个二元体，仍为几何不变体系，而且没有多余联系。

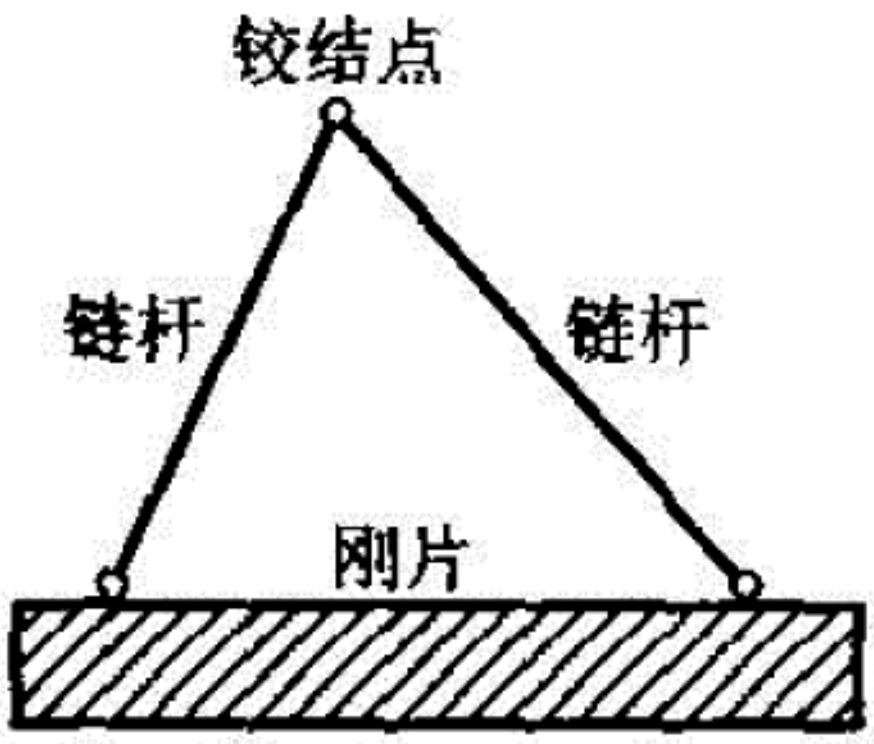


图 2-1-6

在一个体系上增加或拆除二元体，不会改变原有体系的几何构造性质。

3．两刚片规则

（1）两个刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相联，为几何不变体系，而且没有多余联系。

（2）两个刚片用三根不全平行也不交于同一点的链杆相联，为几何不变体系，而且没有多余联系。

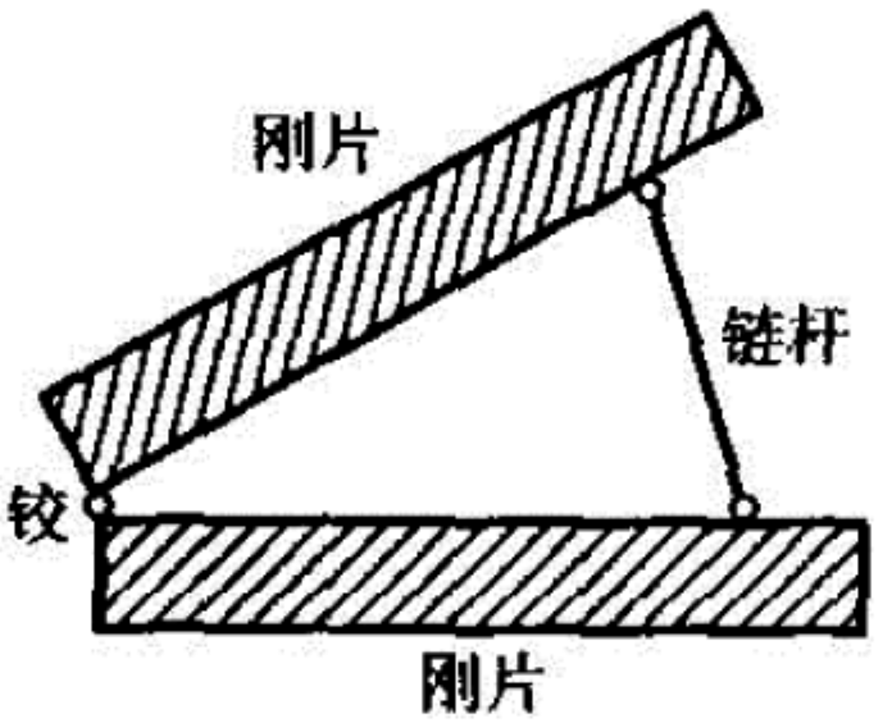


图 2-1-7

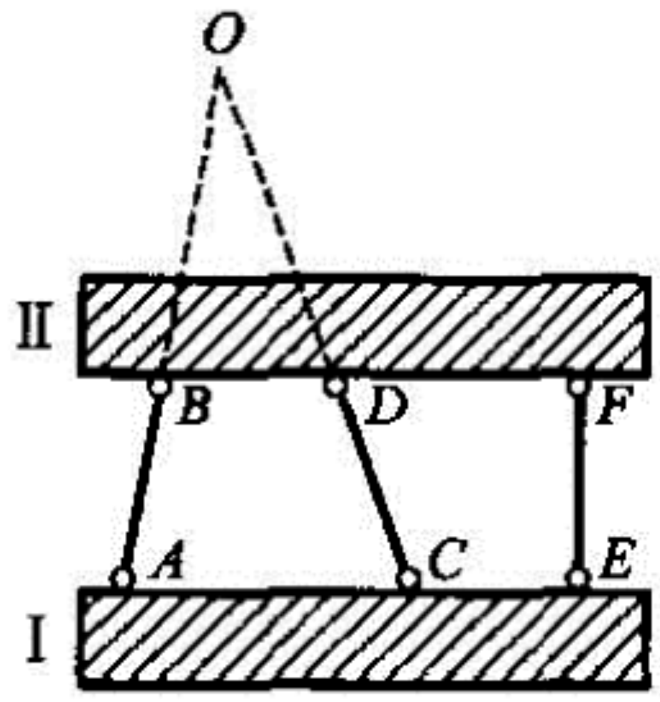


图 2-1-8

虚铰是指联结两个刚片的两根链杆延长线的交点处的位置随链杆的转动而改变的铰。

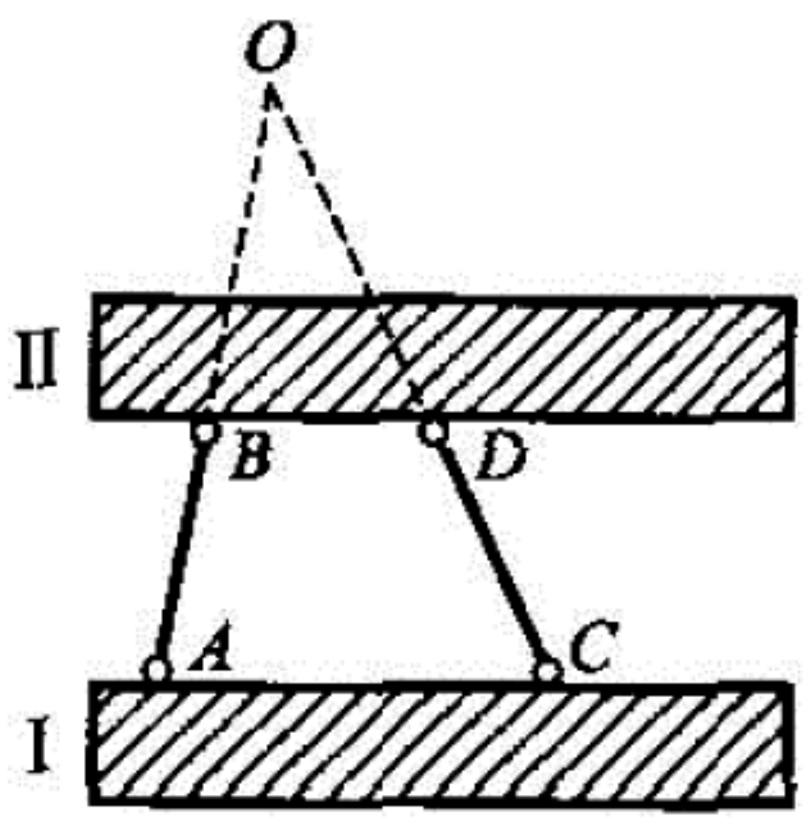


图 2-1-9

四、瞬变体系

1．定义

（1）瞬变体系

瞬变体系是指经微小位移后由几何可变转化为几何不变的体系。瞬变体系也是一种几何可变体系。

（2）常变体系

常变体系是指经微小位移后仍能继续发生刚体运动的几何可变体系。

2．几种常见瞬变体系

（1）三刚片规则中，规定三个铰在同一直线上的体系

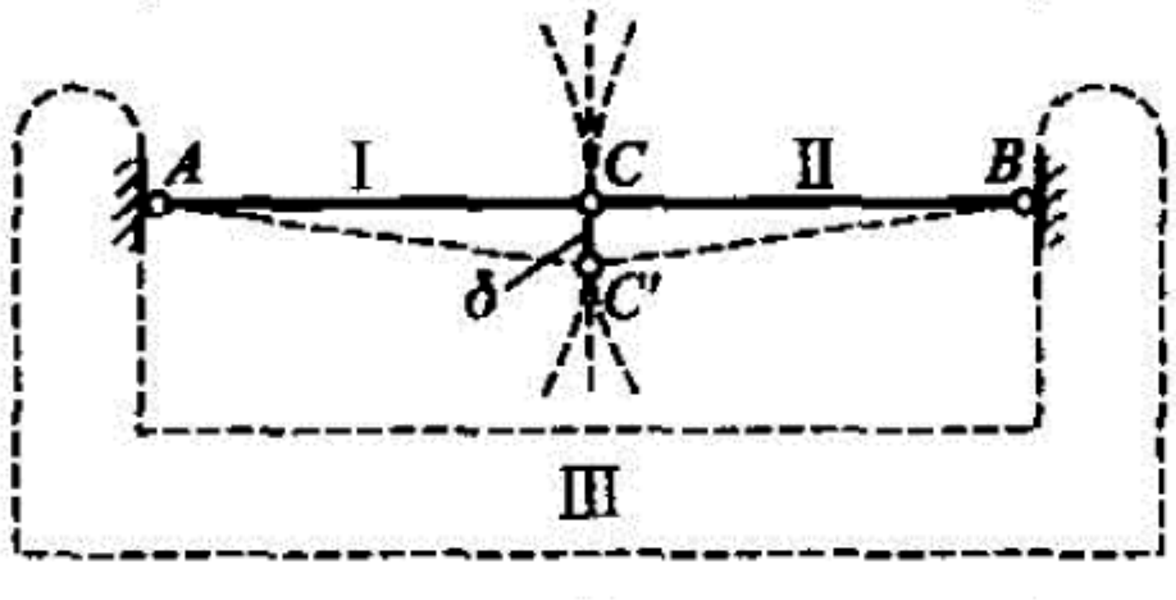


图 2-1-10

（2）二元体时，若二元体的两杆共线，该体系为瞬变体系。

（3）两个刚片用三根链杆相联时，若三根链杆交于同一点，且互相不平行（图 2-1-11（a）），两刚片可绕交点 O 作相对转动，但发生微小转动后三杆一般便不再交于同一点，该体系为瞬变体系。

（4）三根链杆全平行时，可以认为它们均交于无穷远点。故亦属交于同一点的情况，两刚片可沿与链杆垂直的方向作相对平移，体系为几何可变体系。

①当三杆平行但不等长时（图 2-1-11（b）），两刚片发生微小相对移动后三杆便不再全平行，该体系为瞬变体系。

②当三杆平行且等长时（图 2-1-11（e）），则运动可一直继续下去，故为常变体系（注：这是指平行等长三杆均从每一刚片的同侧方向联出的情况，而不是如图 2-1-11（d）有从异侧联出的情况，后者仍为瞬变）。

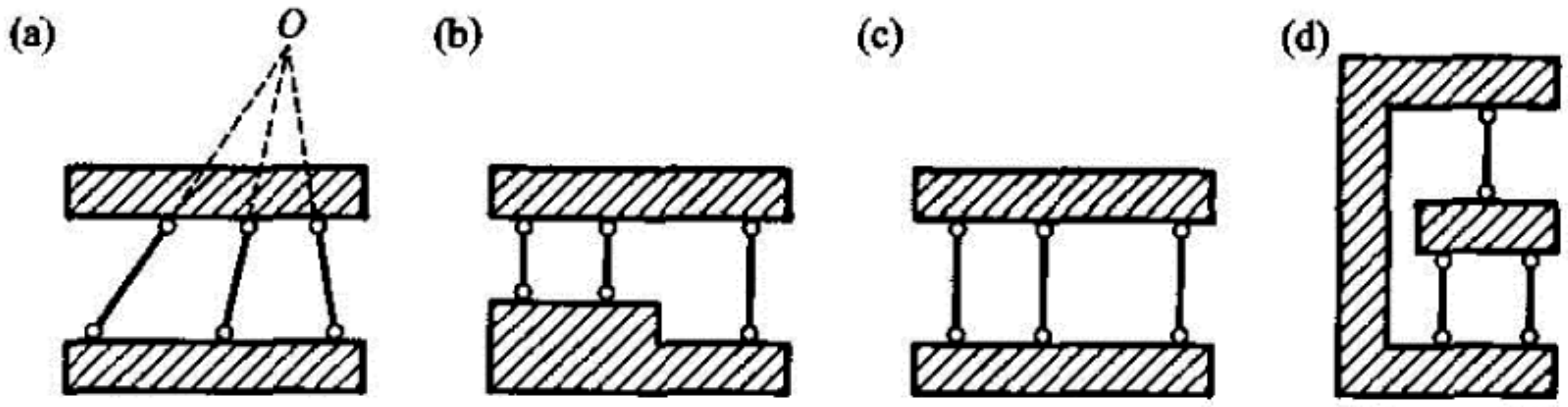


图 2-1-11

五、三刚片体系中虚铰在无穷远处的情况

1．无穷远点的性质

（1）一组平行直线相交于同一个无穷远点；

（2）方向不同的平行直线则相交于不同的无穷远点；

（3）平面上的所有无穷远点均在同一条直线上，这条直线称为无穷远直线，而一切有限远点均不在此直线上。

2．一铰无穷远

如图 2-1-12a 所示，虚铰 $O_{Ⅰ,Ⅱ}$在无穷远处，而另二铰 $O_{Ⅰ,Ⅲ}$和 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$不在无穷远处。

（1）若组成无穷远虚铰之两平行链杆与另二铰连线不平行，则体系为几何不变（图 2-1-12（a））；

（2）若组成无穷远虚铰之两平行链杆与另二铰连线平行，则体系为瞬变（图 2-1-12（b））；

（3）在特殊情况下，$O_{Ⅰ,Ⅲ}$和 $O_{Ⅱ,Ⅲ}$为实铰，其连线和杆 1、2 平行，而且三者等长，则体系为常变（图 2-1-12（c））。

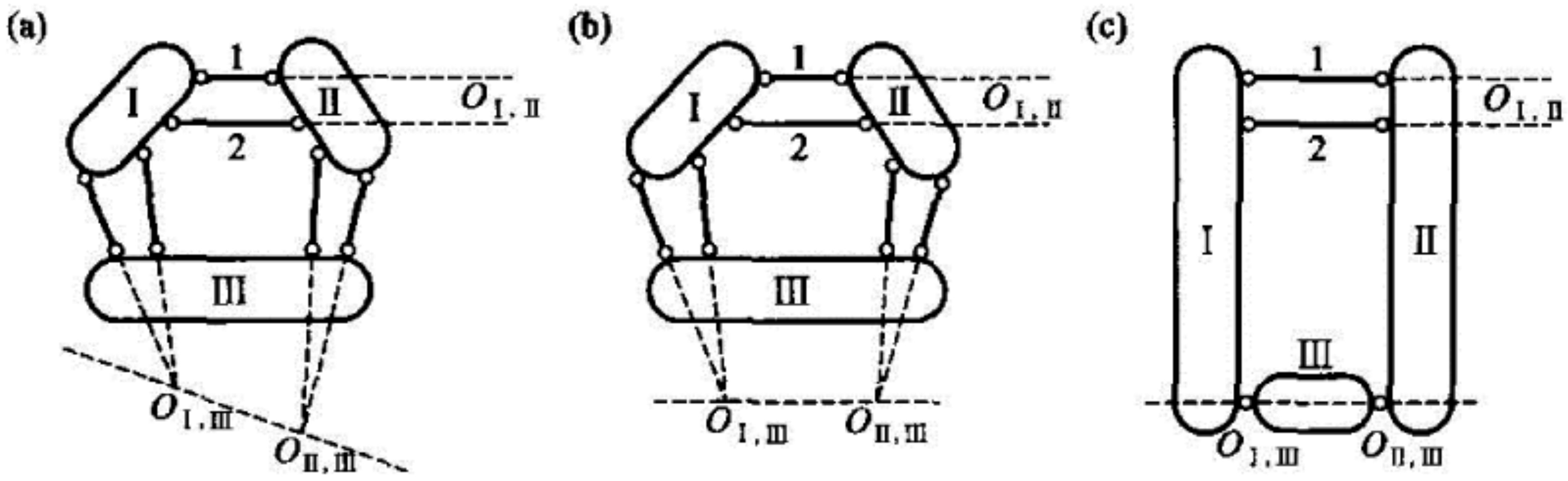


图 2-1-12

3．两铰无穷远

如图 2-1-13a 所示，铰 $O_{\mathrm{I,II}}$不在无穷远处，铰 $O_{\mathrm{I,III}}$和 $O_{\mathrm{II,III}}$均在无穷远处。

（1）若组成二无穷远虚铰之两对平行链杆互不平行，则体系为几何不变（图 2-1-13（a））；

（2）若此两对平行链杆又相互平行（即四杆皆平行），则体系为瞬变（图 2-1-13（b））；

（3）若此两对平行链杆相互平行且等长，则体系为常变（图 2-1-13（c））。

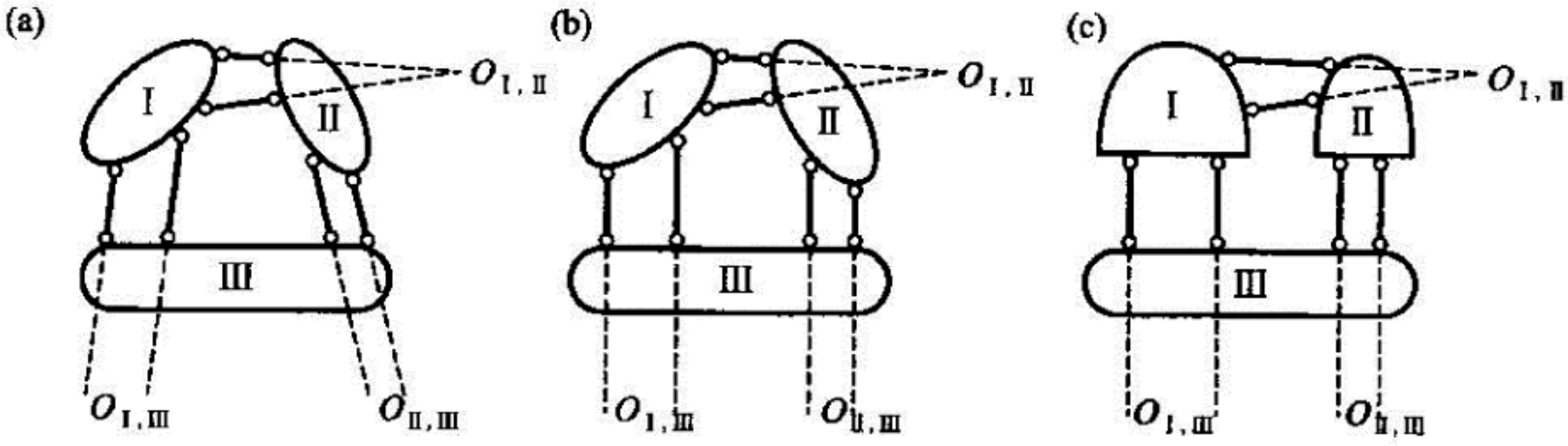


图 2-1-13

4．三铰均无穷远

如图 2-1-14a 所示，三刚片用任意方向的三对平行链杆两两铰联，三个虚铰均在无穷远。

（1）三虚铰 $O_{\mathrm{I,II}}$、$O_{\mathrm{I,III}}$、$O_{\mathrm{II,III}}$均在无穷远处，而且三对链杆不全等长，体系是瞬变的（图 2-1-14（a））；

（2）在特殊情况下，三对链杆平行且各自等长，则体系是常变的（图 2-1-14（b）），因为此时刚片间的相对平动可以继续进行下去（注意，这是指每对链杆都是从每一刚片的同侧方向联出的情况，而不是像图 2-1-14（c）有从异侧方向联出的情况，后者仍将是瞬变的）。

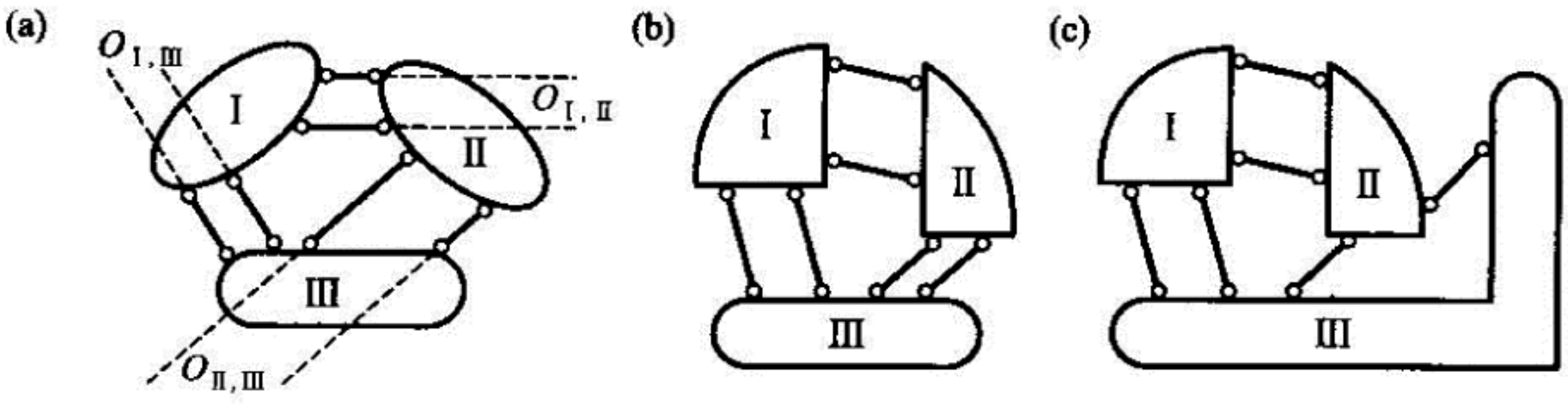


图 2-1-14

六、几何构造与静定性的关系

1．静定

当体系几何不变，而且无多余联系时，体系是静定的。

2．超静定

当体系几何不变，而且有多余联系时，体系是超静定的。

2.2　课后习题详解

复习思考题

1．为什么计算自由度 W≤0 的体系不一定就是几何不变的？试举例说明。

答：因为 W≤0 只是体系为几何不变的必要条件并非充分条件。一个体系尽管联系数目足够多甚至还有多余，但约束布置不当，体系便仍是几何可变的。如图 2-2-1 所示。



图 2-2-1

2．什么是刚片？什么是链杆？链杆能否作为刚片？刚片能否当作链杆？

答：（1）刚片的定义

刚片是指在平面体系中，由于不考虑材料的变形，可以看作刚体的一根杆件或已判明是几何不变的部分。

（2）链杆的定义

链杆是指能使体系减少一个自由度的联结装置（约束）。

（3）链杆可以看作刚片。一根链杆是几何不变的，在结构分析中可看做刚片。

（4）刚片不一定能看作链杆。将刚片看作链杆后，结构可能无法保持几何不变。

3．何谓单铰、复铰、虚铰？体系中的任何两根链杆是否都相当于在其交点处的一个虚铰？

答：（1）单铰、复铰、虚铰的定义分别是

①单铰是指联结两个刚片的一个铰。

②复铰是指同时联结两个以上刚片的一个铰。

③虚铰是指联结两个刚片的两根链杆延长线的交点处的位置随链杆的转动而改变的铰。

（2）体系中不是任何两根链杆都相当于在其交点处的一个虚铰。因为虚铰的位置随链杆的转动而改变，一般的实铰则没有这个特征，所以不是任何两根链杆都相当于虚铰。

4．试述几何不变体系的三个基本组成规则，为什么说它们实质上只是同一个规则？

答：（1）几何不变体系的三个基本组成规则

①三刚片规则

三个刚片用不在同一直线上的三个单铰两两铰联，组成的体系是几何不变的，而且没有多余联系。

②二元体规则

在一个刚片上增加一个二元体，仍为几何不变体系，而且没有多余联系。

③两刚片规则

两个刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相联或两个刚片用三根不全平行也不交于同一点的链杆相联，为几何不变体系，而且没有多余联系。

（2）基本组成规则都可以看作三刚片规则

因为链杆可以看作刚片，例如二元体规则中，二元体的两根链杆均可以看作刚片，即相当于三刚片规则。同理，两刚片规则中链杆仍然可以看作一个刚片。因此三个基本组成规则实质上只是同一个规则。

5．何谓瞬变体系？为什么土木工程中要避免采用瞬变和接近瞬变的体系？

答：（1）瞬变体系的定义

瞬变体系是指经微小位移后由几何可变转化为几何不变的体系。瞬变体系也是一种几何可变体系。

（2）在土木工程的实际中，由于材料变形，瞬变体系一经受力即偏离原有位置，而内力通常也是很大的，甚至可能导致体系的破坏。同时，瞬变体系的位移只是理论上为无穷小，实际上在很小的荷载作用下也会产生很大的位移。因此，土木工程中要避免采用瞬变和接近瞬变的体系，以保证结构的安全和正常使用。

6．试小结机动分析的一般步骤和技巧。

答：（1）机动分析的一般步骤

①一般先考察体系的计算自由度。如果 W＞0，已表明体系是几何可变的；如果 W≤0，进一步做组成分析。

②运用几何组成的基本规则做几何组成分析。

（2）机动分析的一般技巧

①对于较复杂的体系，宜先把能直接观察出的几何不变部分当作刚片。

②以地基或刚片为基础按二元体或两刚片规则逐步扩大刚片范围。

③拆除二元体使体系的组成简化，以便进一步用基本的组成规则去分析它们。

7．在图 2-2-2 中，如果首先把 AC 杆和 BC 杆当作二元体去掉，则剩下的部分为常变体系，故推知原体系也是常变的，这样分析正确否？为什么？

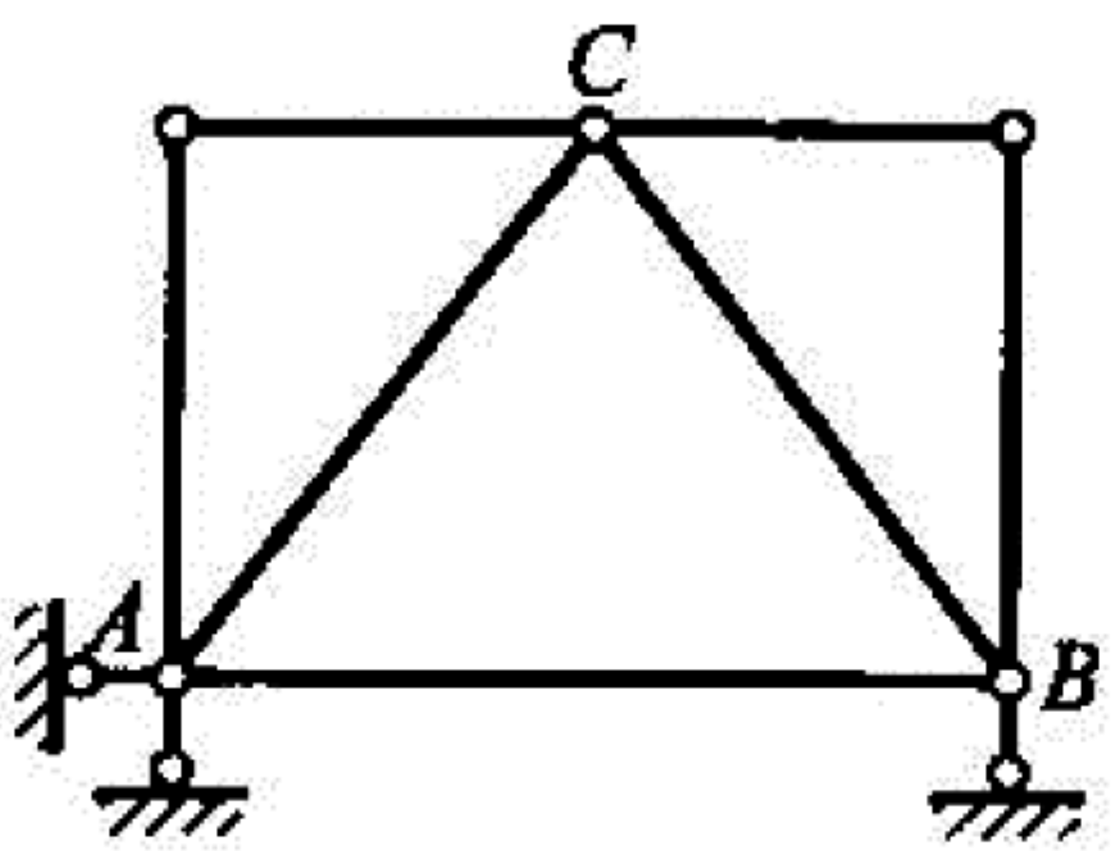


图 2-2-2

答：不正确。因为铰接点 C 除了链杆 AC 和链杆 BC 外还有其他链杆，即不是独立的二元体，在几何组成分析中要优先考虑独立二元体，即只能从暴露在最外面的两杆铰点开始，而不能从中间任意抽取。

8．图 2-2-3 所示体系因 A、B、C 三铰共线所以是瞬变的，这样分析正确否？为什么？

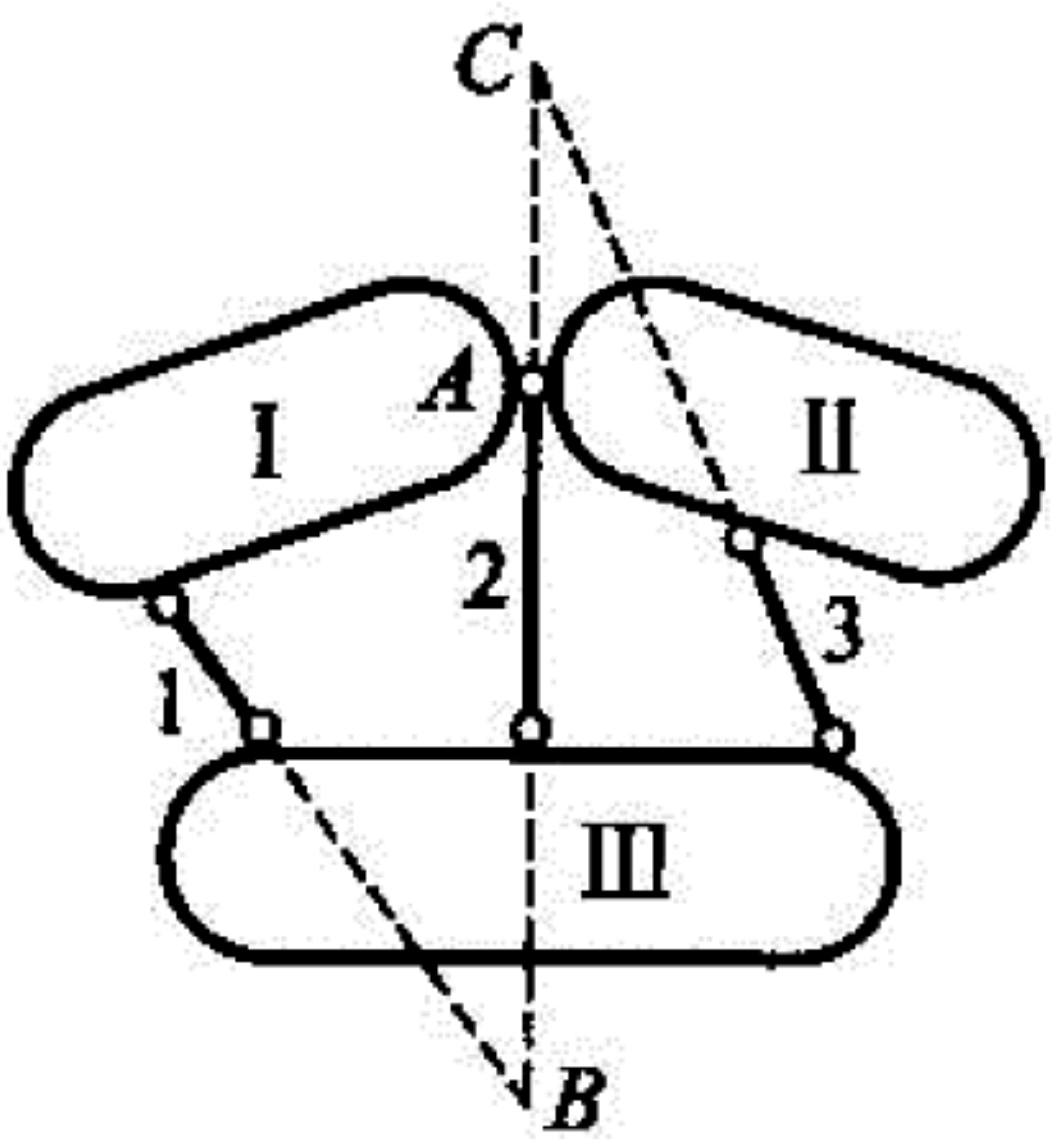


图 2-2-3

答：不正确。因为链杆 2 联结了 I、II、III 三个刚片，在分析中链杆 2 用了两次（与链杆 3 组成一个虚铰和与链杆 1 组成一个虚铰），在三刚片规则中，同一根链杆只允许用一次，所以该分析不正确。

习题

2-1～2-17　试对图示平面体系进行机动分析。

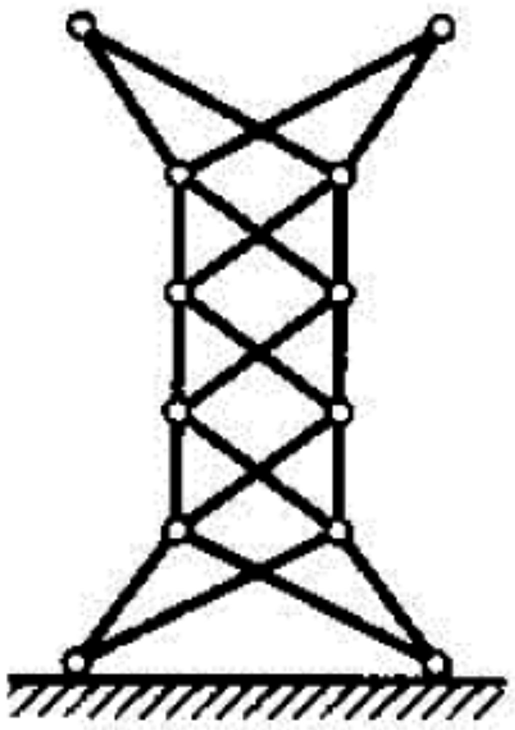


图 2-2-4（题 2-1）

2-1　答：根据几何组成分析的二元体规则，将大地看作一个刚片，自下而上依次增加二元体，可得最终 2-2-4 图中所示的几何体系，所以该结构为无多余约束的几何不变体系。

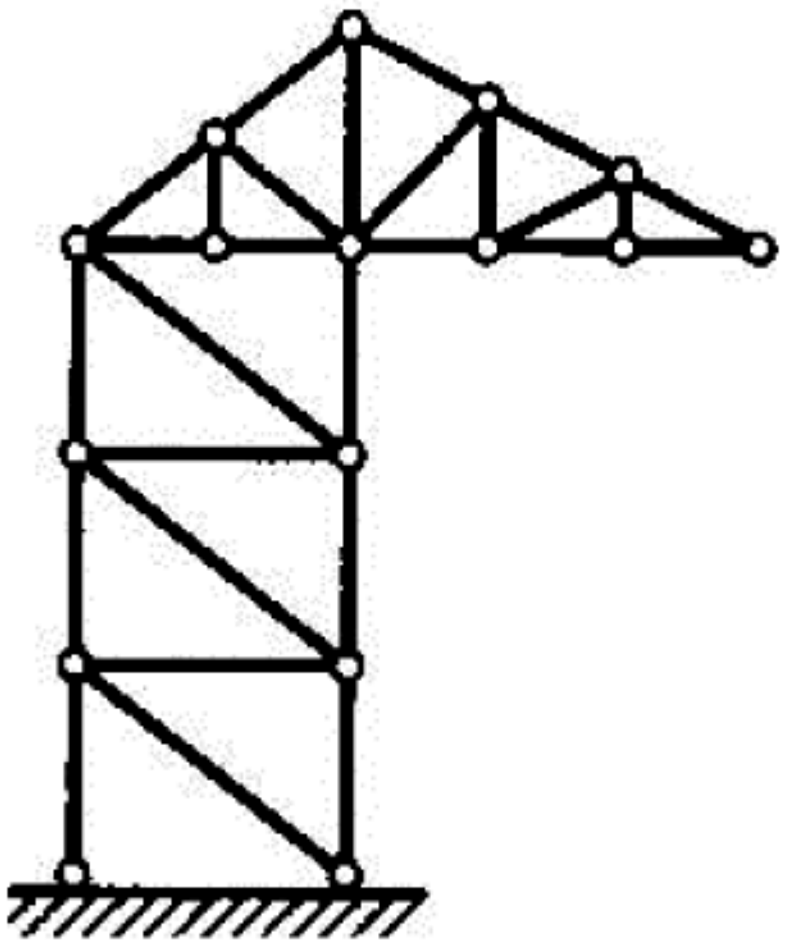


图 2-2-5（题 2-2）

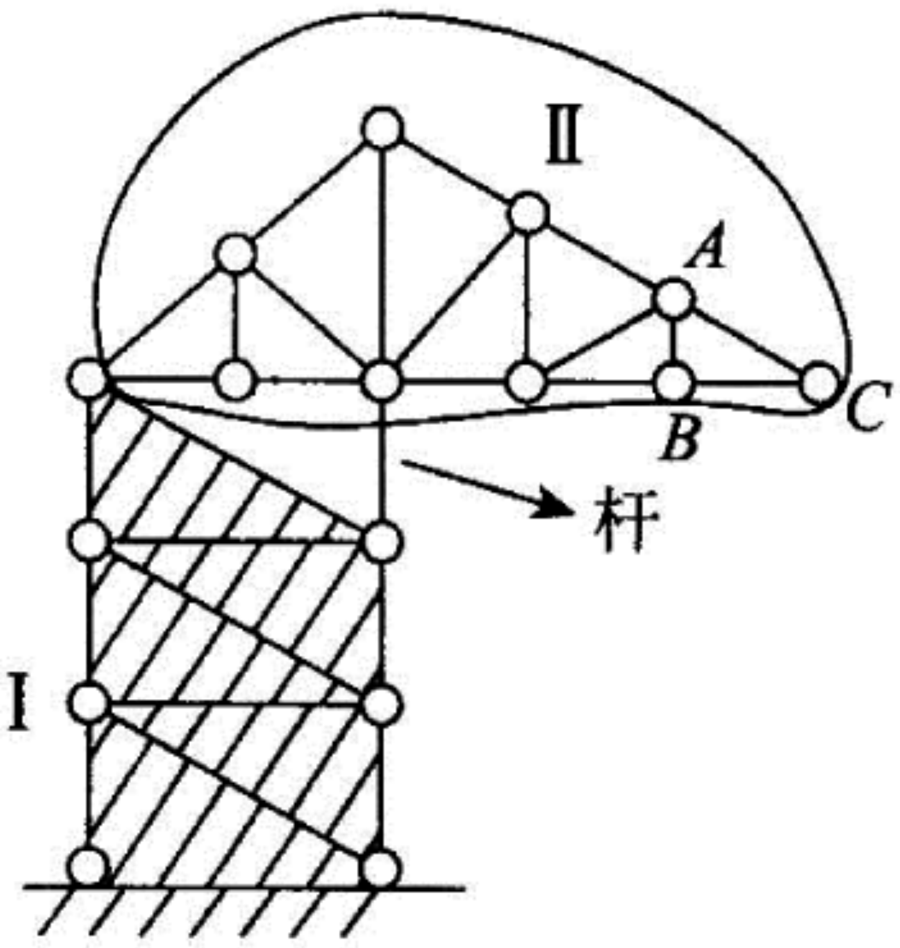


图 2-2-6

2-2　答：根据几何组成分析的二元体规则，将大地看作一个刚片，自下而上依次增加二元体组成刚片Ⅰ；如图 2-2-6 所示，ABC 可以看作一个刚片，添加二元体可以组成刚片Ⅱ，则根据两刚片规则，刚片Ⅰ和刚片Ⅱ由一根链杆和一个实铰相联，组成几何不变且无多余约束的体系。

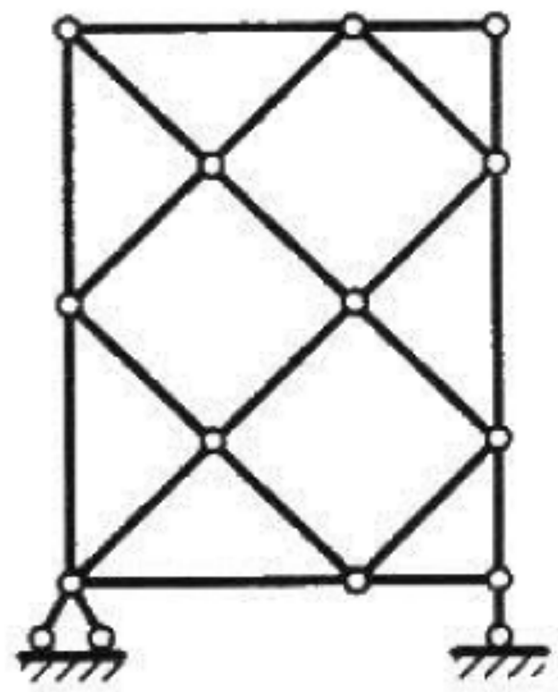


图 2-2-7（题 2-3）

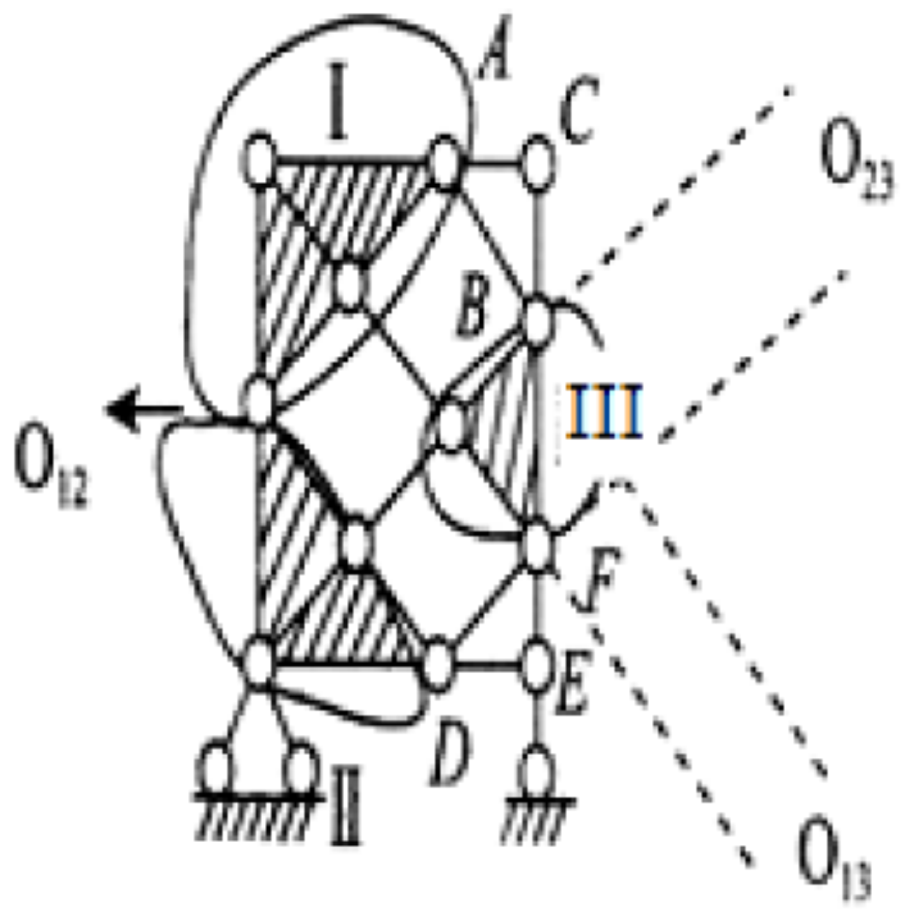


图 2-2-8

2-3　答：如图 2-2-8 所示，首先将链杆划分为刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，则可观察出刚片Ⅰ、Ⅱ组成实铰 O_{12}，刚片Ⅱ、Ⅲ组成虚铰 O_{23}，刚片Ⅰ、Ⅲ组成虚铰 O_{13}；根据三刚片规则，可知刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ组成一个无多余约束的几何不变结构，可以看成一个大刚片。再根据二元体规则，依次添加二元体 ACB 和 DEF，最后与大地通过单铰和一链杆相连，组成了几何不变且无多余约束的体系。

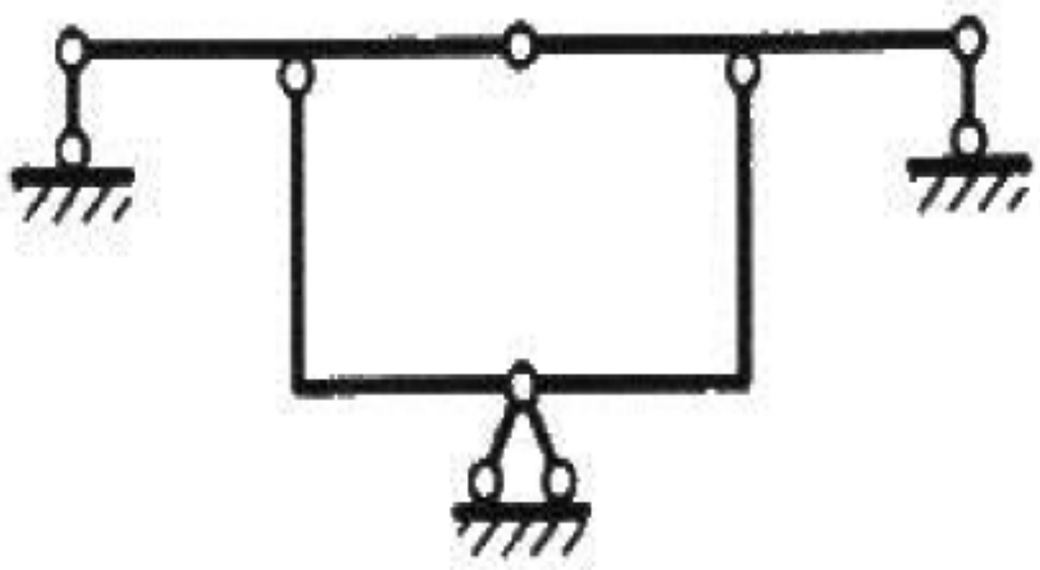


图 2-2-9（题 2-4）

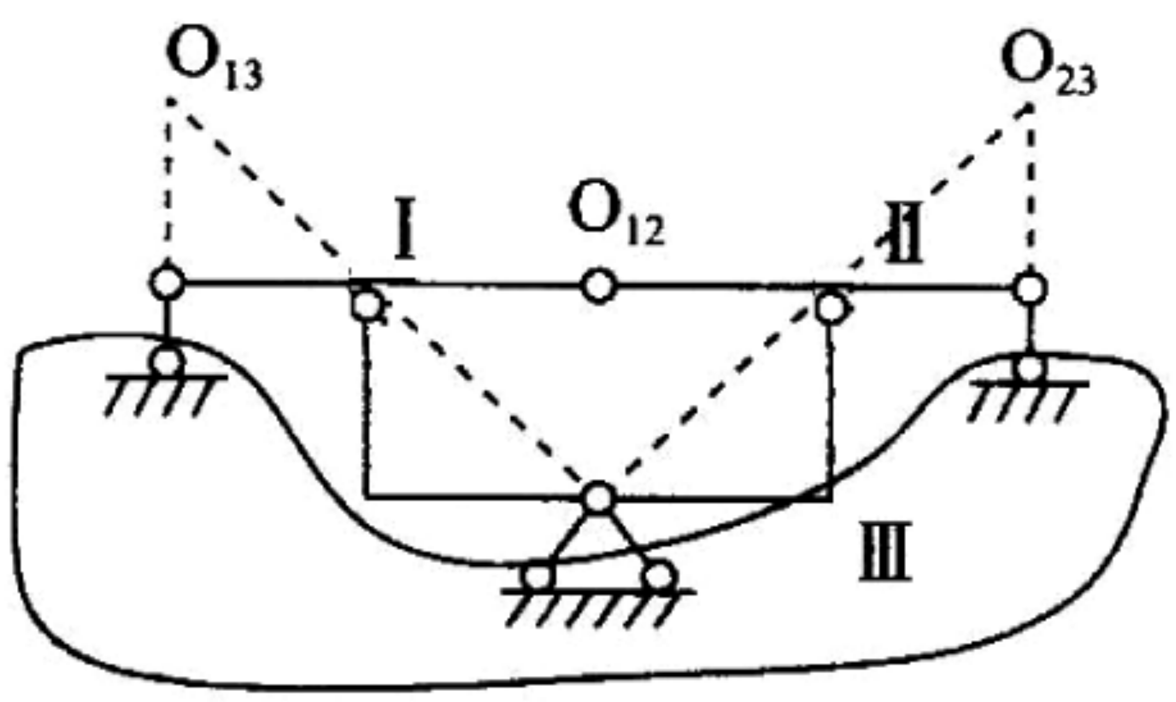


图 2-2-10

2-4　答：如图 2-2-10 所示，把两根水平的梁看作刚片Ⅰ、Ⅱ，大地看作Ⅲ，刚片Ⅰ、Ⅲ虚铰在 O_{13}，刚片Ⅱ、Ⅲ虚铰在 O_{23}，刚片Ⅰ、Ⅱ实铰 O_{12}。根据三刚片规则可知，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ组成了几何不变且无多余约束的体系。

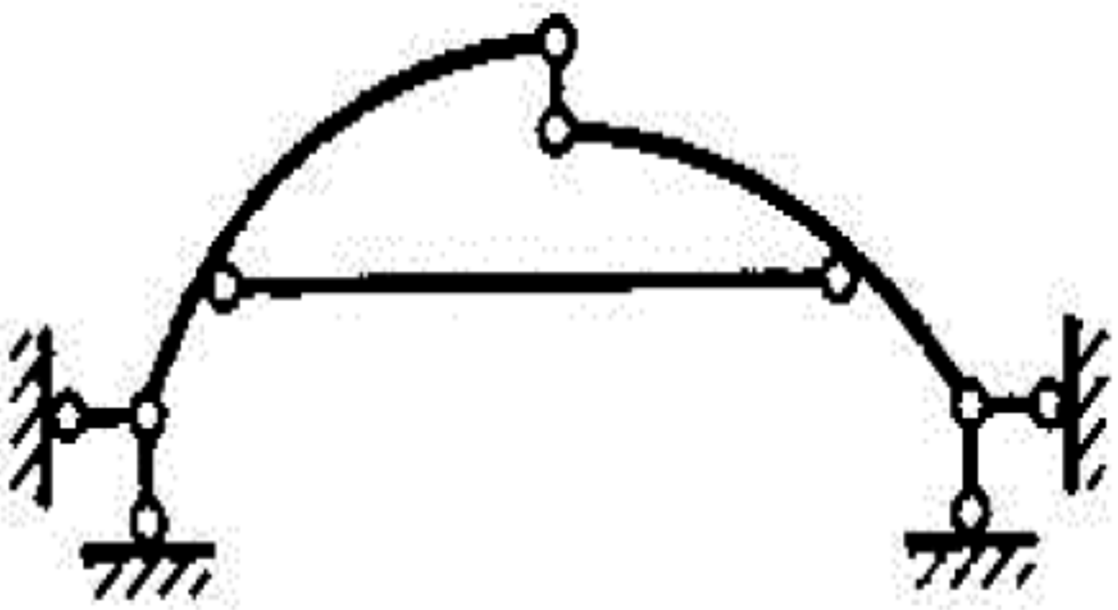


图 2-2-11（题 2-5）

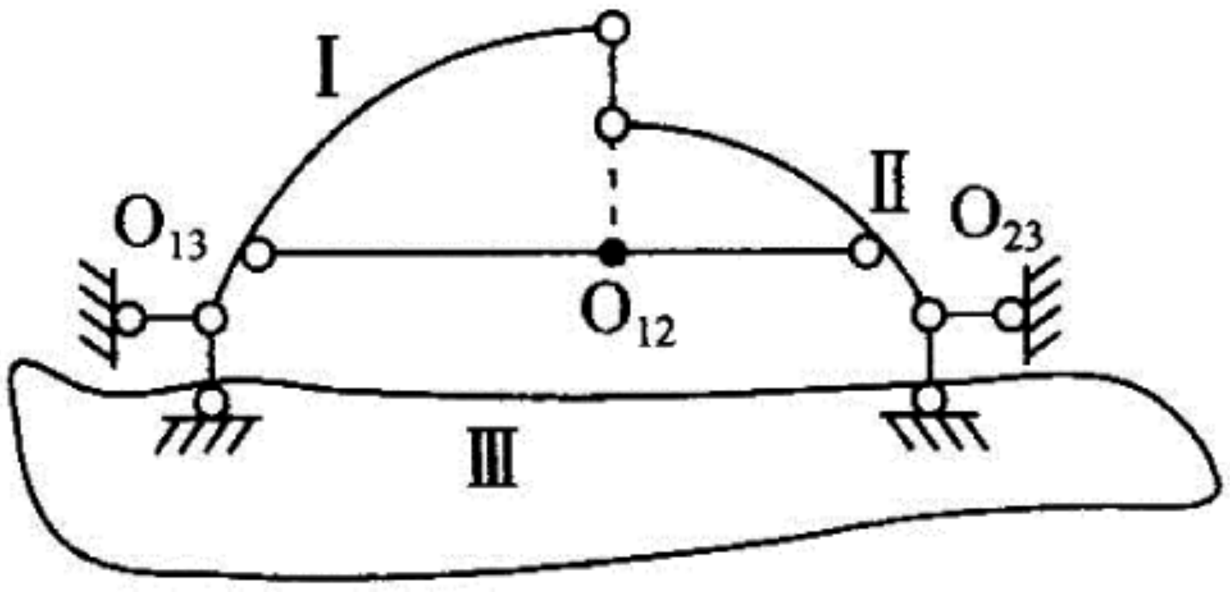


图 2-2-12

2-5　答：如图 2-2-12 所示，将体系划分为刚片Ⅰ、Ⅱ，大地看作刚片Ⅲ，那么刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分别用虚铰 O_{12}，实铰 O_{23} 和 O_{13} 联结。根据三刚片规则可知，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ组成了几何不变且无多余约束的体系。

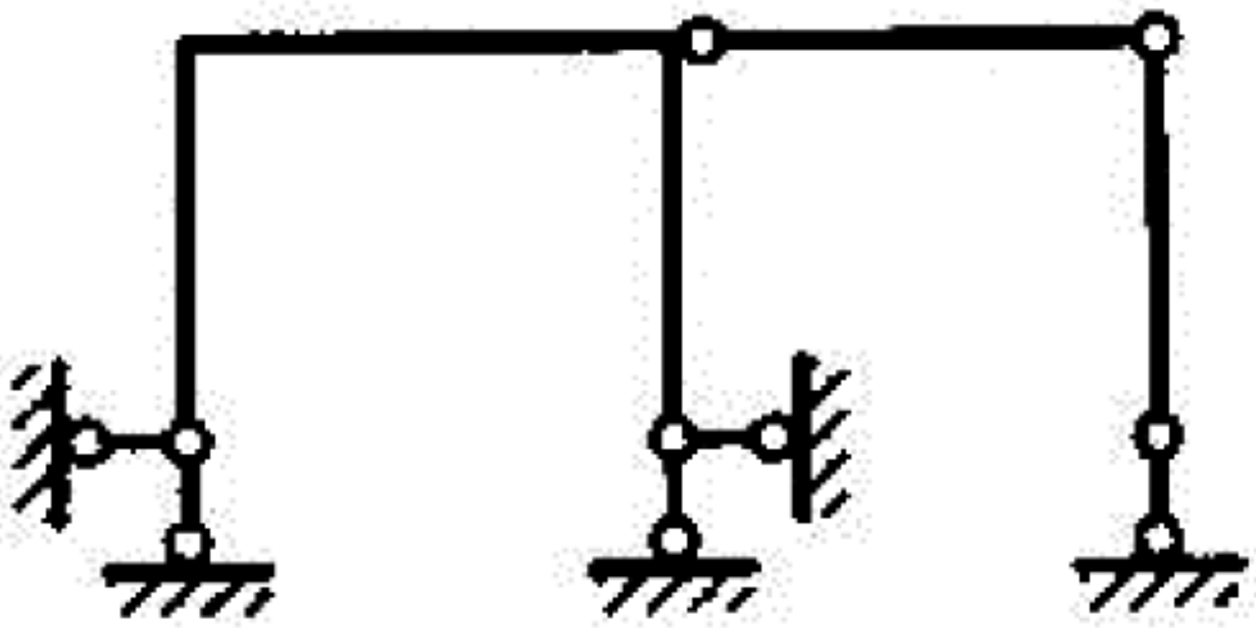


图 2-2-13（题 2-6）

2-6　答：先求计算自由度

$$W=3m-(2h+r)=3\times3-(2\times4+1)=0$$

对图 2-2-13 进一步进行几何组成分析，左部为有一个多余联系的几何不变体系，右部为少一个联系的几何常变体系，所以整个体系为常变体系。

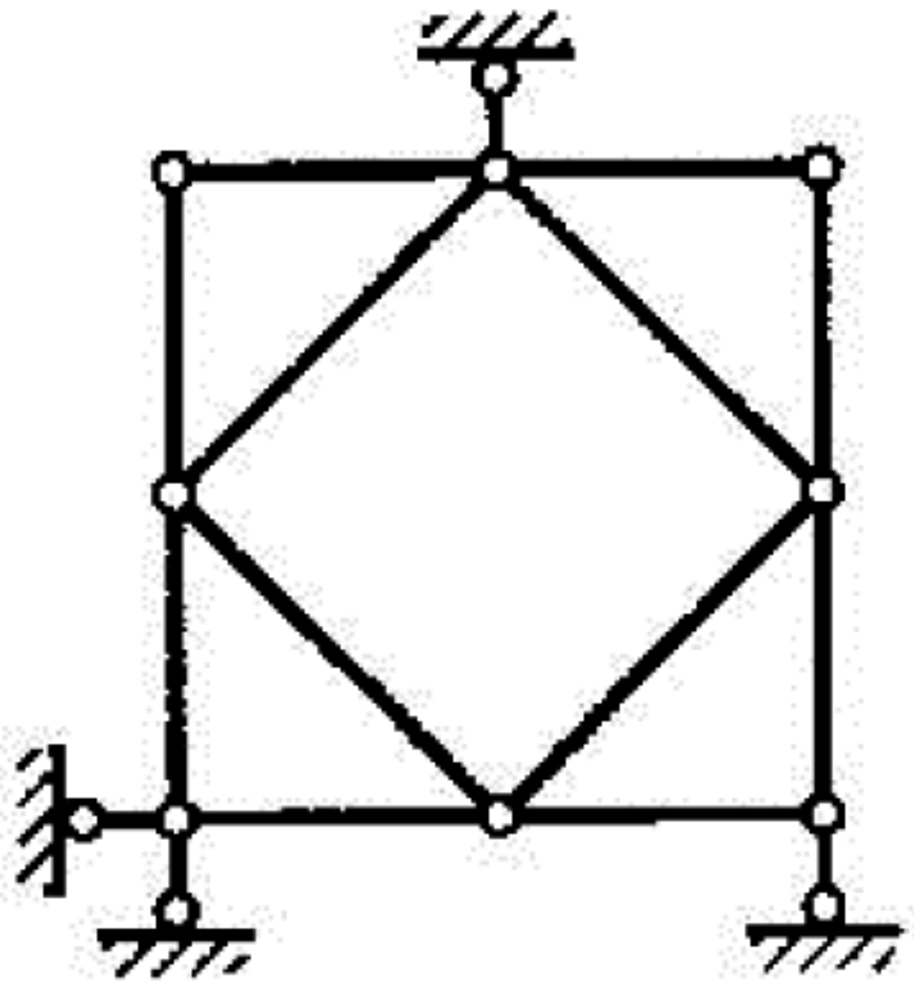


图 2-2-14（题 2-7）

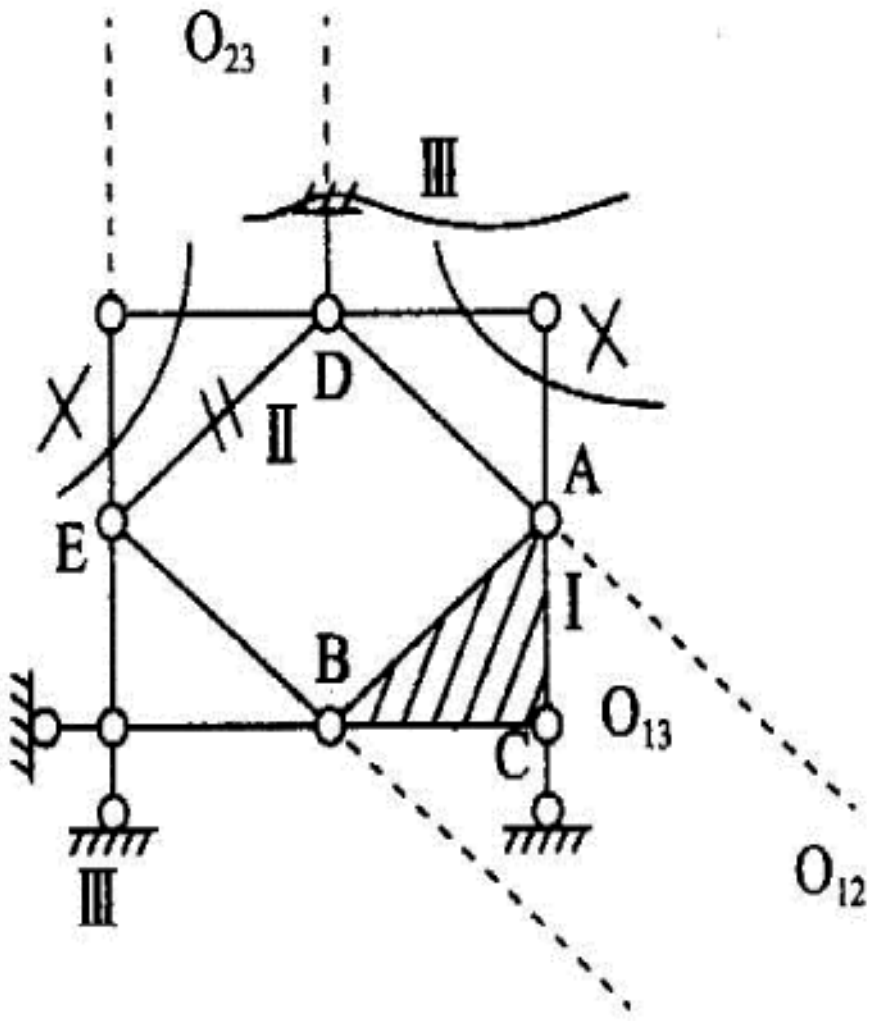


图 2-2-15

2-7　答：先拆除二元体（图 2-2-15 中打×）；剩余部分，将 ABC 看作刚片Ⅰ，链杆 DE 看作刚片Ⅱ，大地看作刚片Ⅲ，那么三刚片组成两个无穷远处的虚铰 O_{12}、O_{23} 和一个实铰 O_{13}，根据三刚片规则，三铰不共线，为几何不变且无多余约束的体系。

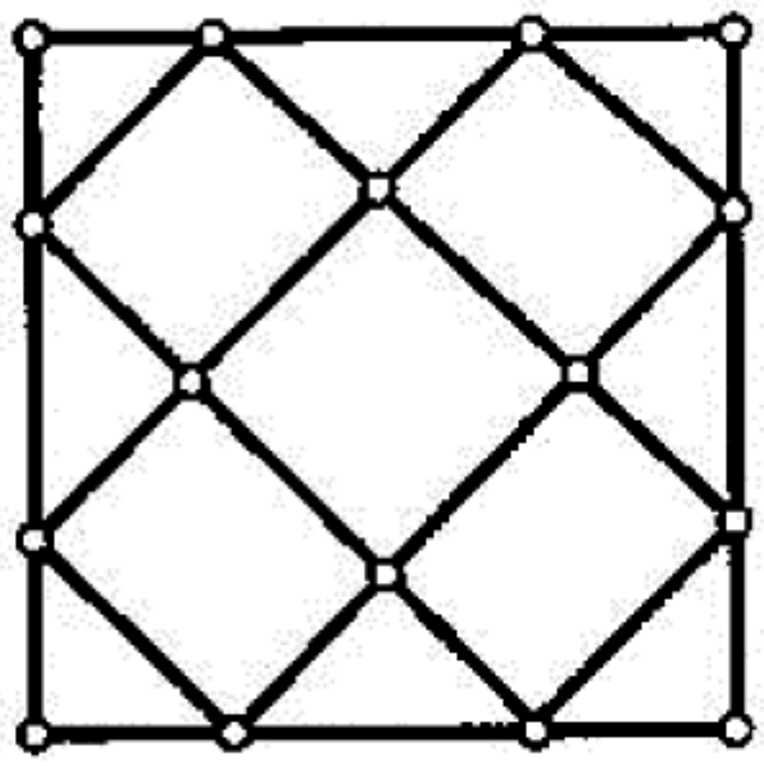


图 2-2-16（题 2-8）

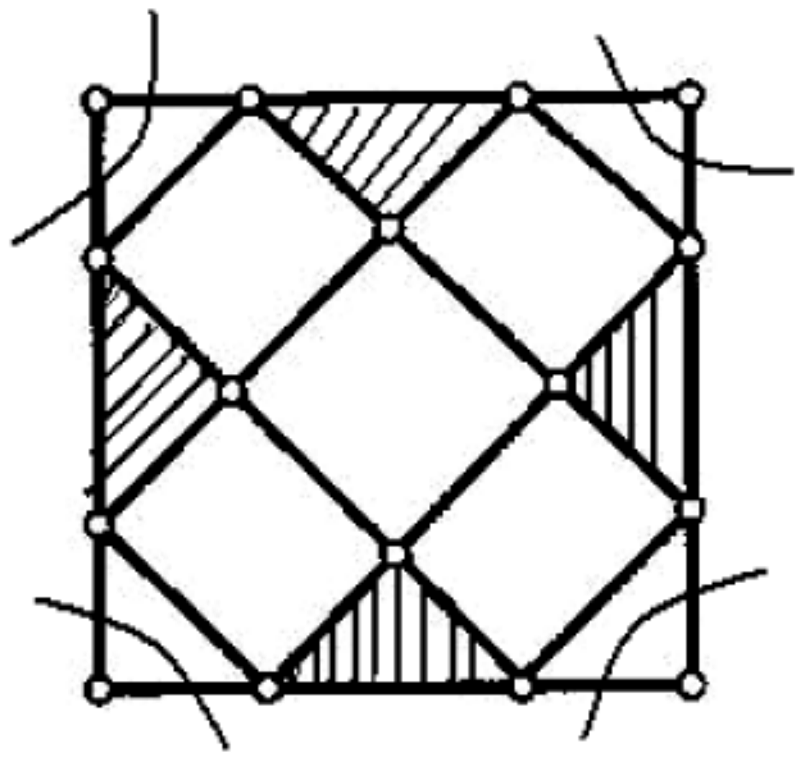


图 2-2-17

2-8　答：如图 2-2-17 所示，首先拆除四角的二元体，再分析剩余体系。

求其计算自由度

$$W=2j-b=12\times 2-20=4>3$$

显然体系为常变体系。

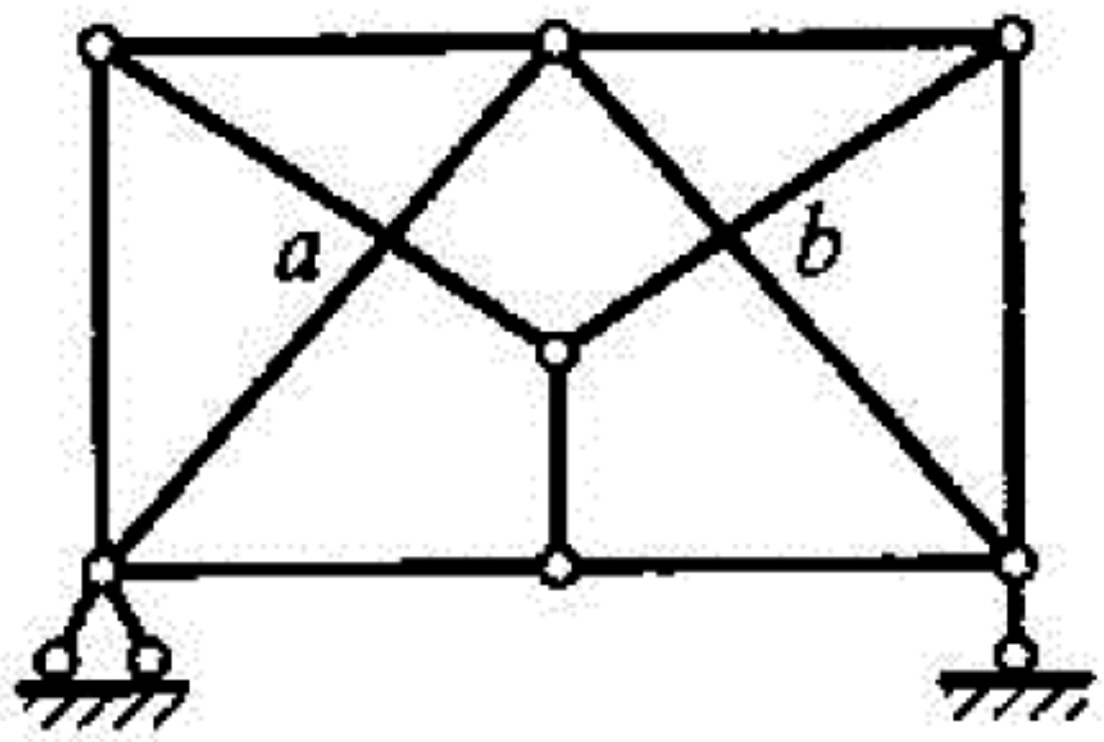


图 2-2-18（题 2-9）（a、b 处非结点）

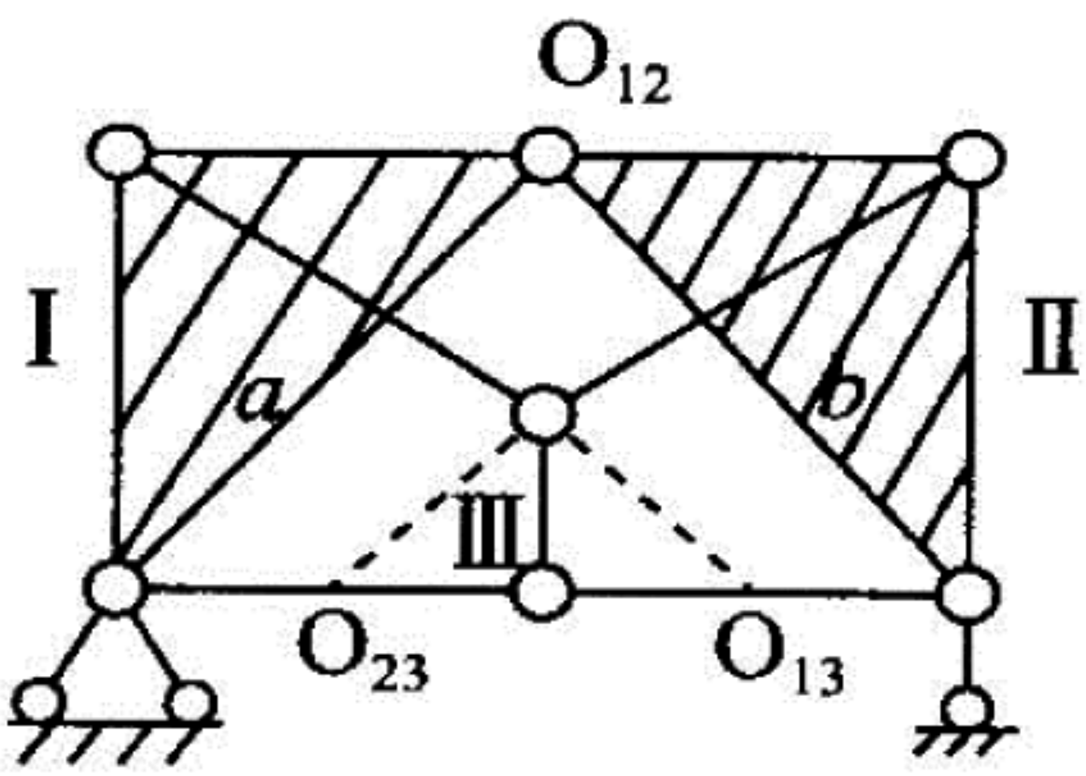


图 2-2-19

2-9　答：如图 2-2-19 所示，可将体系划分为三个刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，刚片Ⅰ、Ⅱ用实铰 O_{12} 联结、刚片Ⅰ、Ⅲ和刚片Ⅱ、Ⅲ分别用虚铰为 O_{13}、O_{23} 联结。根据三刚片规则，三铰不共线，几何不变且无多余约束的体系。

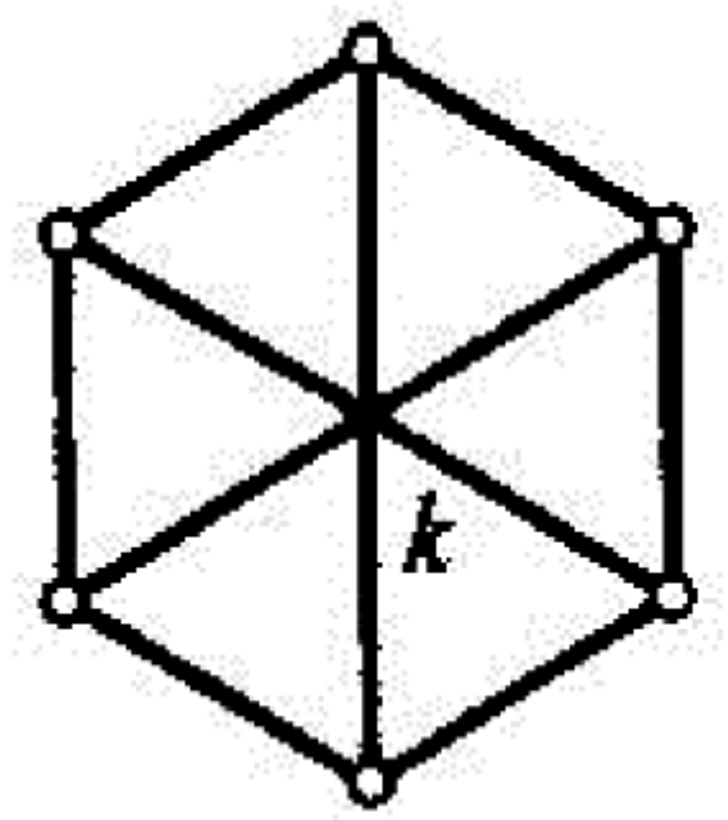


图 2-2-20（题 2-10）（k 处非结点）

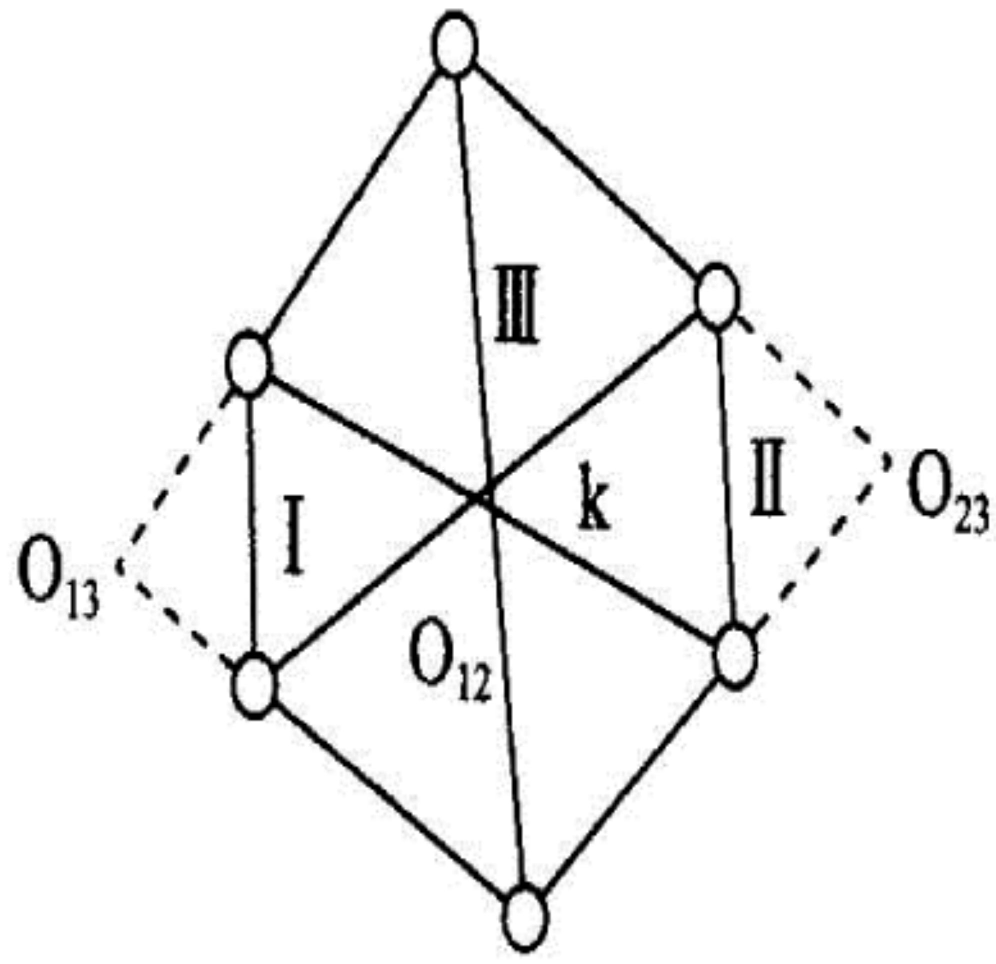


图 2-2-21

2-10 答：选择如图 2-2-21 所示的三根链杆分别看作刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ组成三个铰分别为为 O_{13}、O_{23}、O_{12}，则容易判断三铰共线，为瞬变体系。

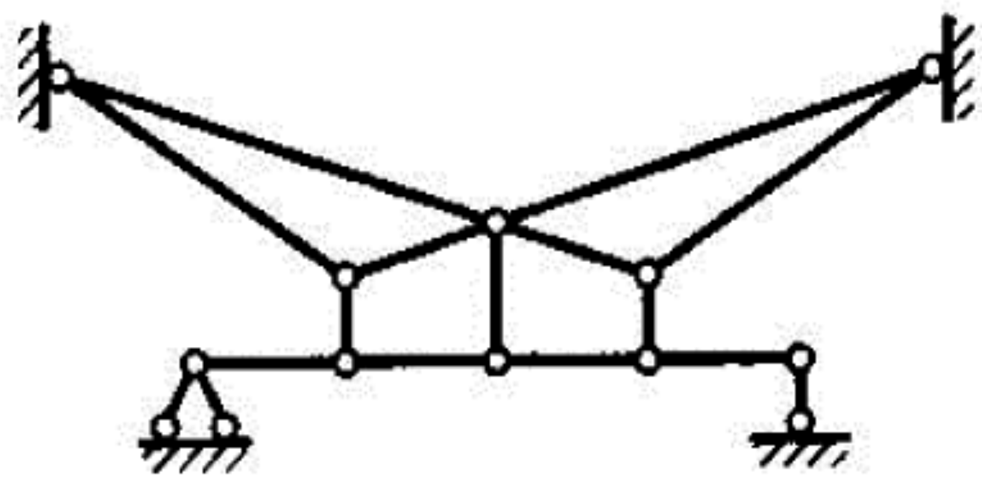


图 2-2-22（题 2-11）

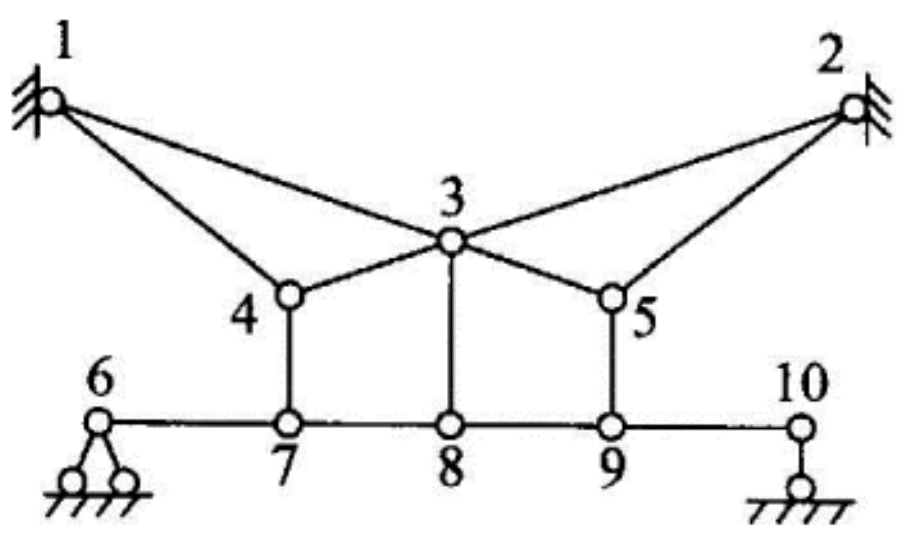


图 2-2-23

2-11 答：将大地看作一个刚片，如图 2-2-23 所示，由结点 1，2，3…顺序以此添加二元体，根据二元体规则知，该体系为几何不变且无多余约束的体系。

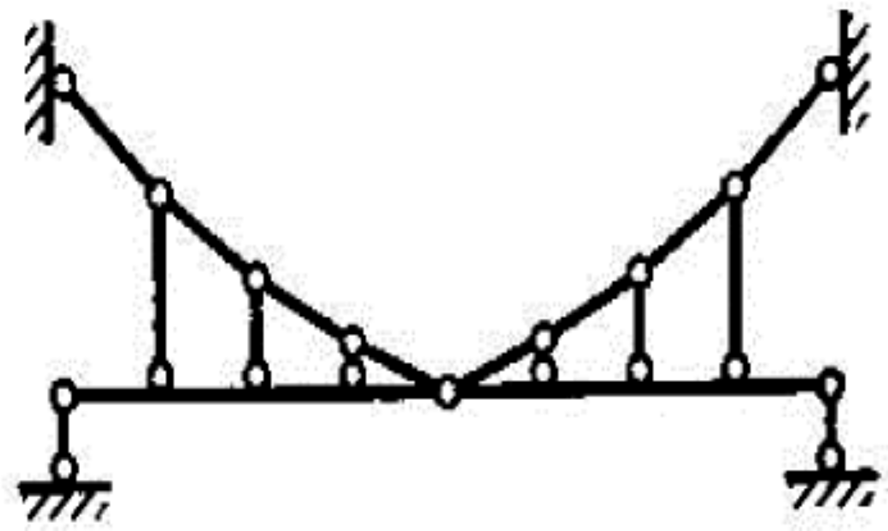


图 2-2-24（题 2-12）

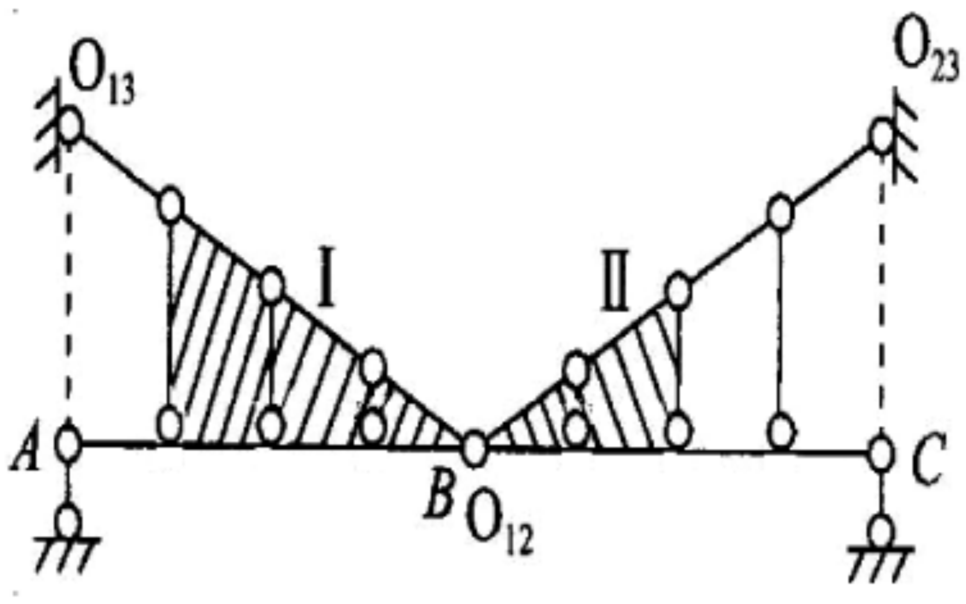


图 2-2-25

2-12　答：如图 2-2-25 所示，在刚片 AB、BC 上依次添加二元体，组成大刚片Ⅰ、Ⅱ，将大地看作刚片Ⅲ，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ组成铰 O_{12}、O_{13}、O_{23}；根据三刚片规则，三铰不共线，则体系为几何不变且无多余约束。

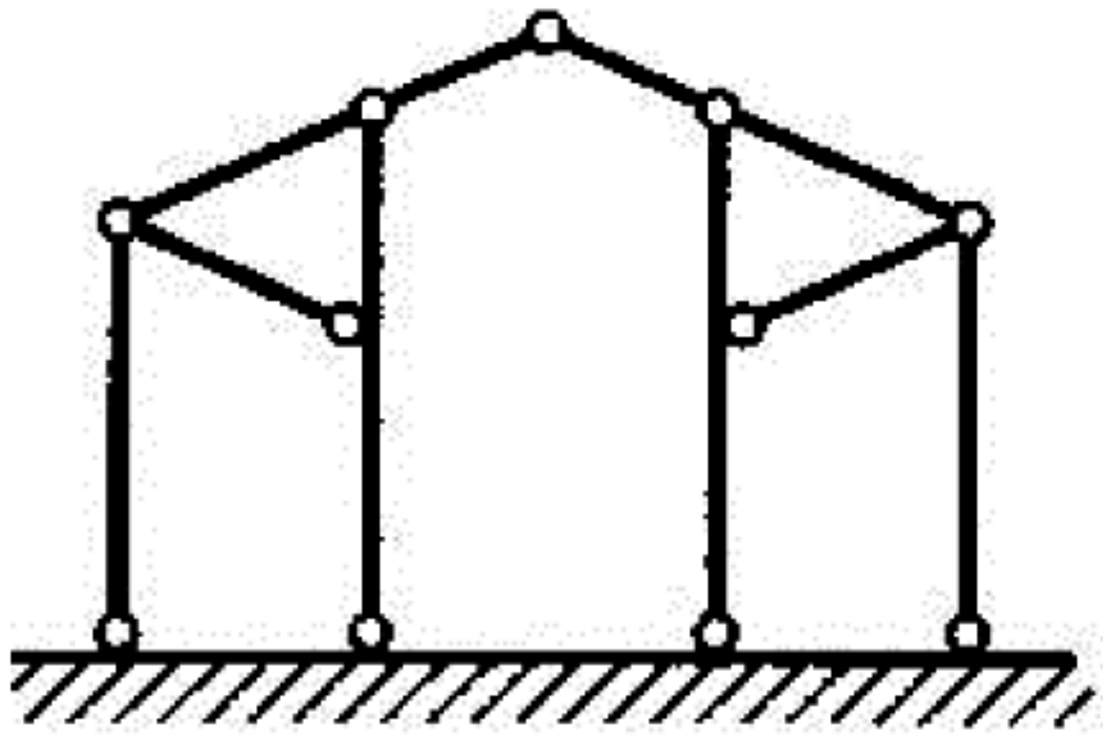


图 2-2-26（题 2-13）

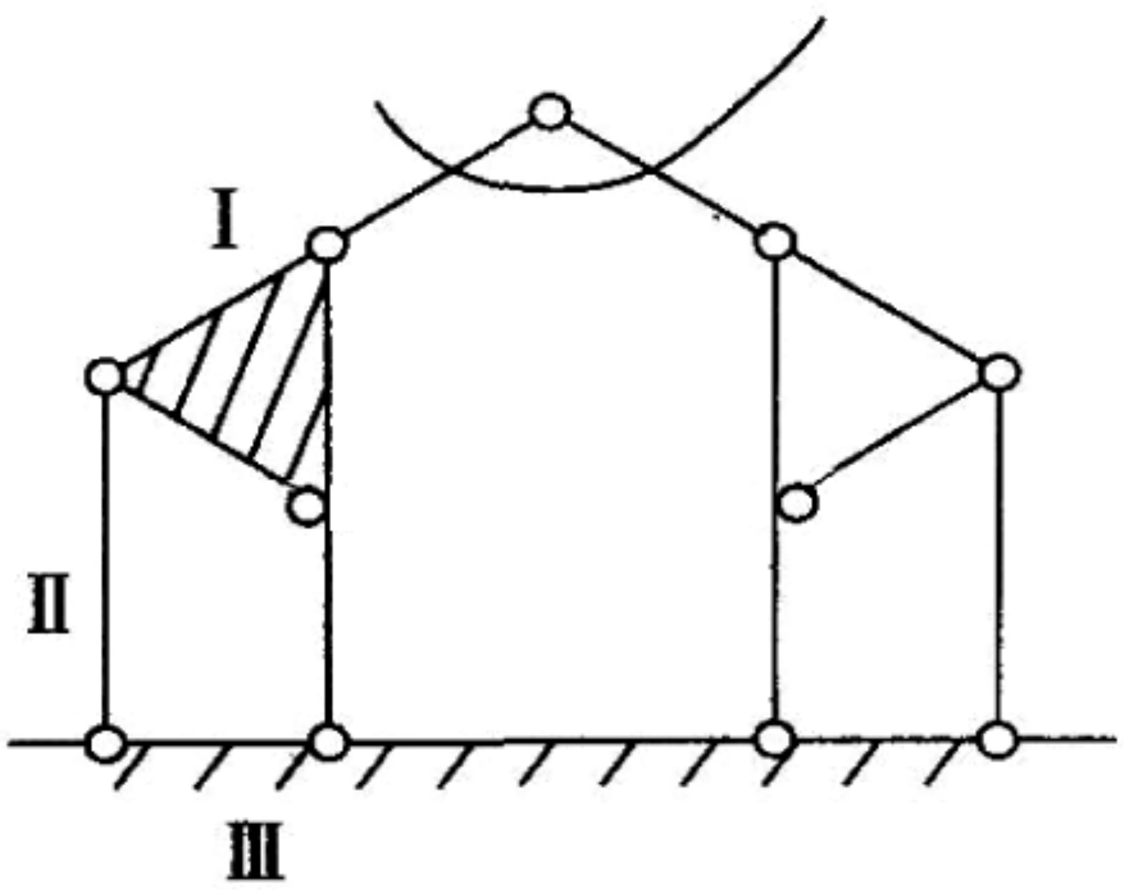


图 2-2-27

2-13　答：首先去掉顶部的二元体，如图 2-2-27 所示，左边划分为三个刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，分别用三个实铰联结，根据三刚片规则，三铰不共线，则体系为几何不变且无多余约束。右边同理，所以整个结构为几何不变且无多余约束的体系。

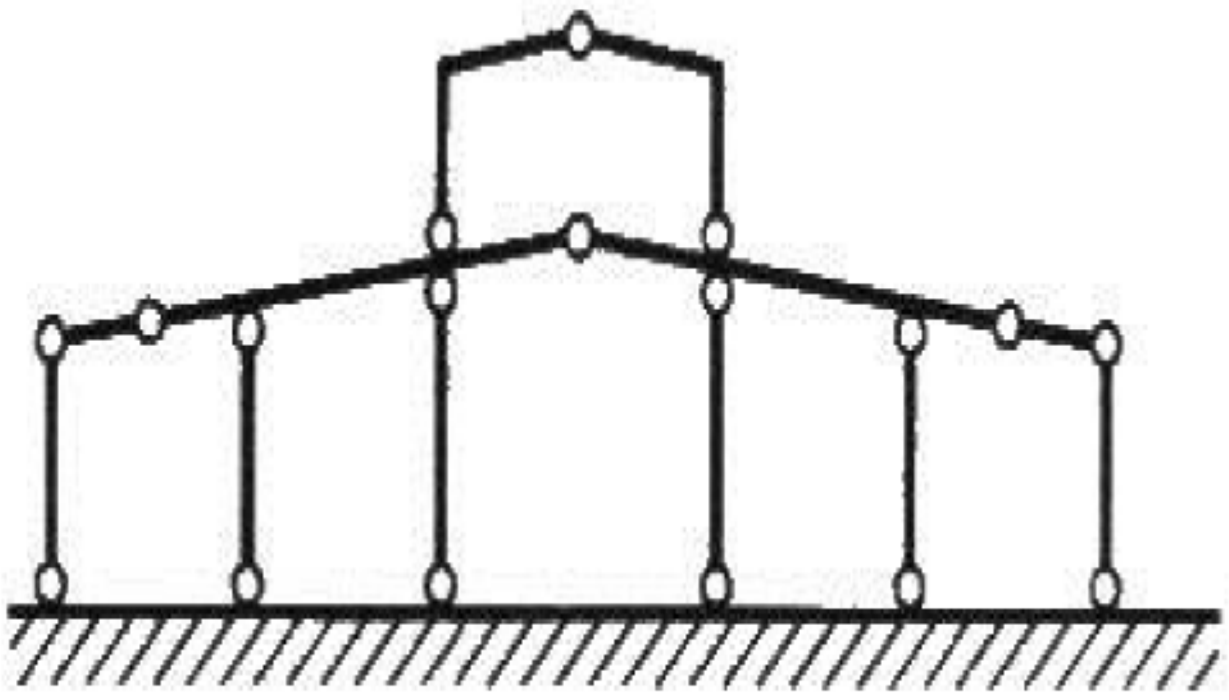


图 2-2-28（题 2-14）

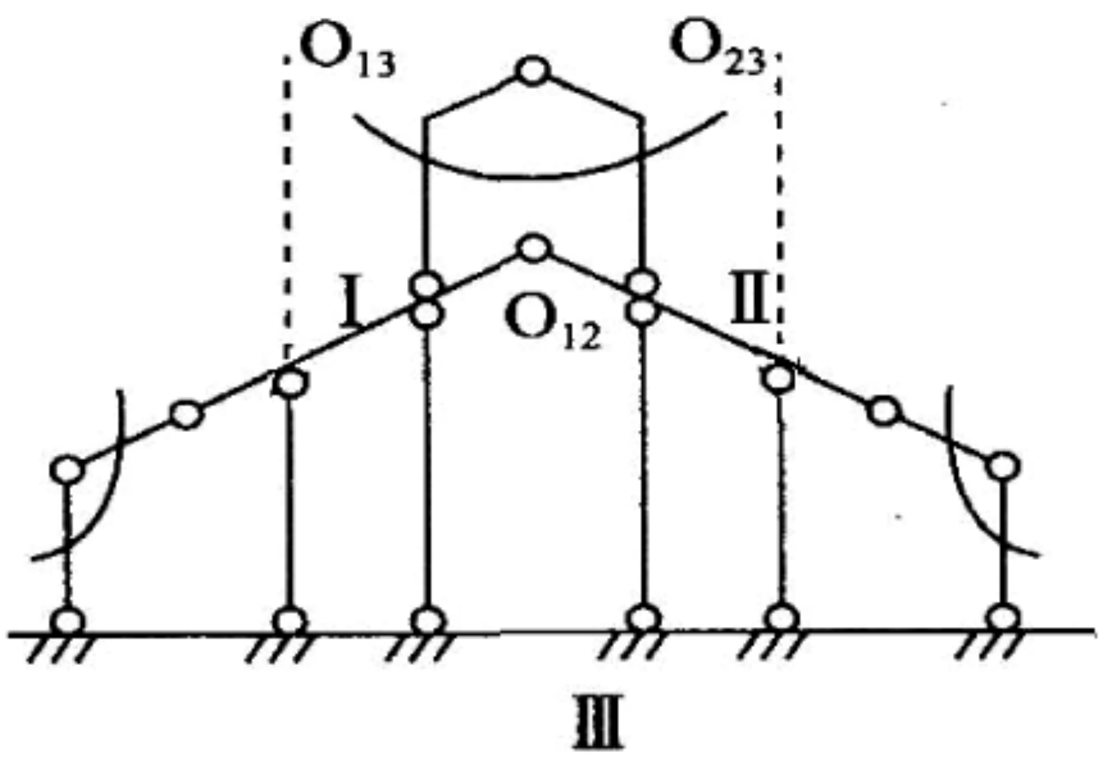


图 2-2-29

2-14　答：先去掉左右两边和顶部的二元体，然后选择链杆Ⅰ、Ⅱ作为刚体，将大地看作刚体Ⅲ，则刚体片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ用两个无穷远处的虚铰 O_{23}、O_{23} 和一个实铰 O_{12} 联结；根据三刚片规则，两铰在无穷远处，四杆皆平行，为瞬变体系。

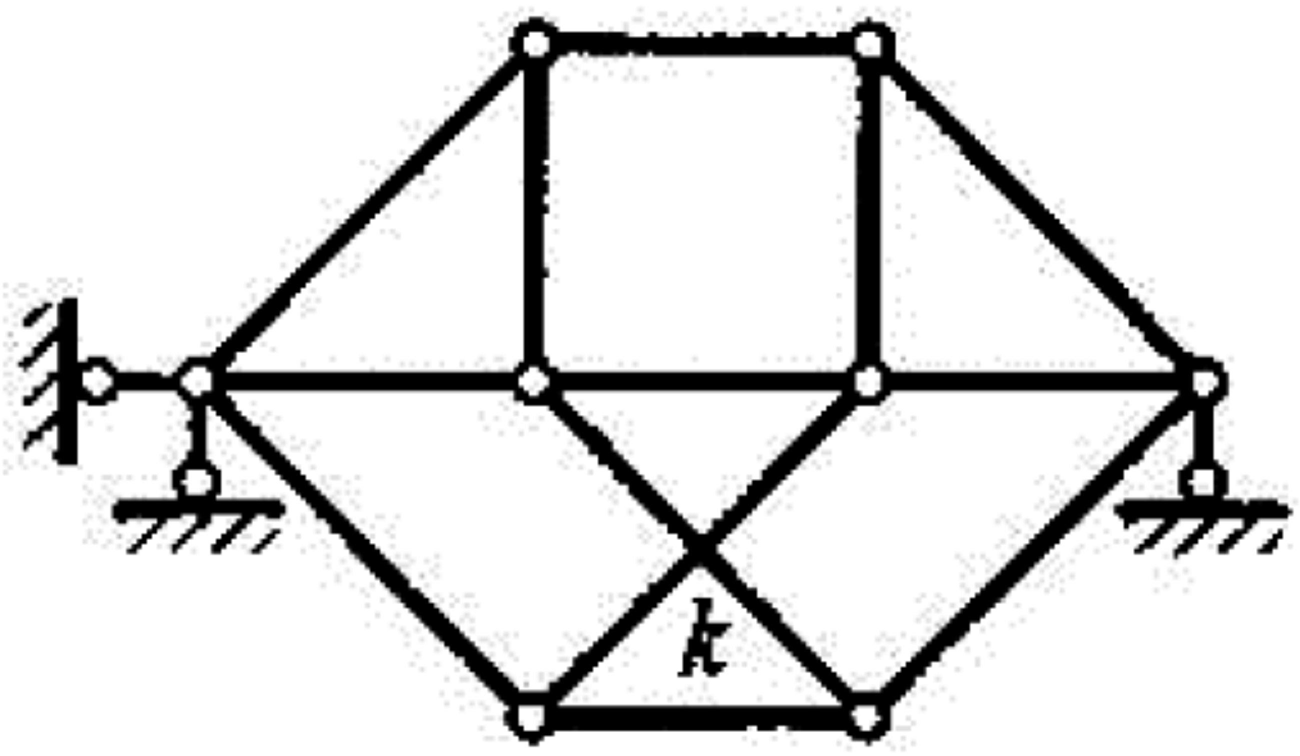


图 2-2-30（题 2-15）（k 处非结点）

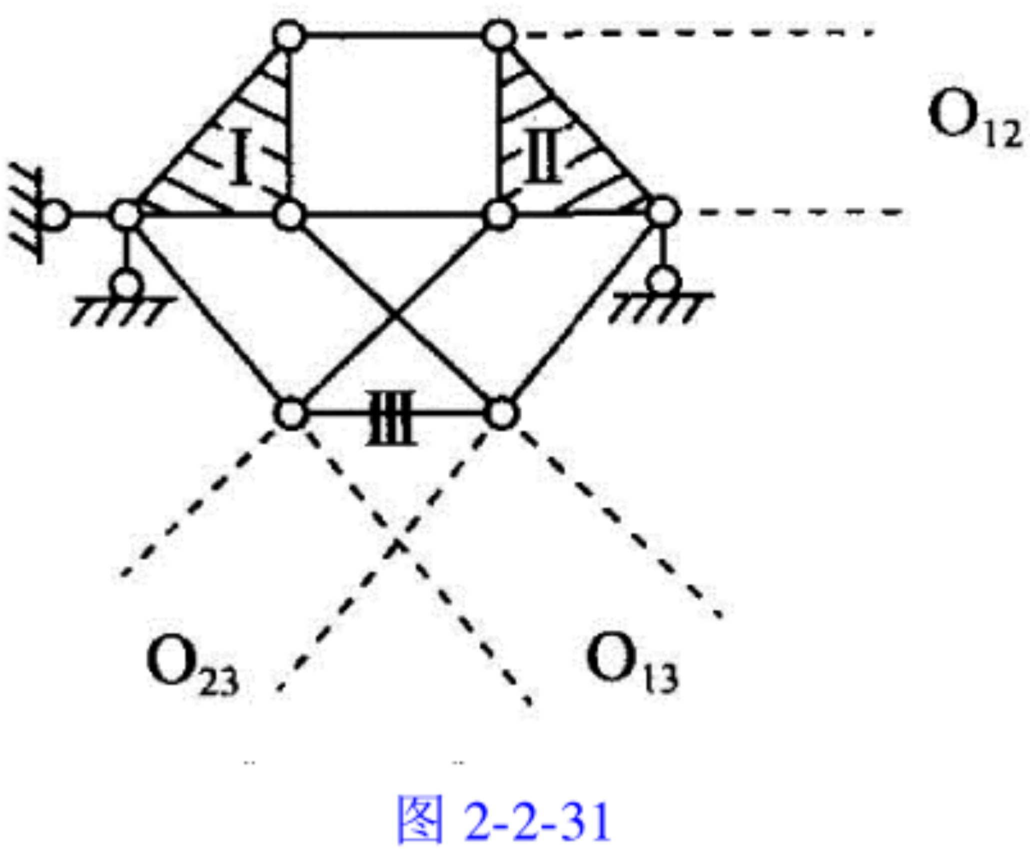


图 2-2-31

2-15　答：如图 2-2-31 所示，可以将体系划分为刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，分别用无穷远处的三个虚铰 O_{12}、O_{23}、O_{13} 联结；根据三刚片规则，三铰均在无穷远处，三对平行链杆又各自等长，为常变体系。

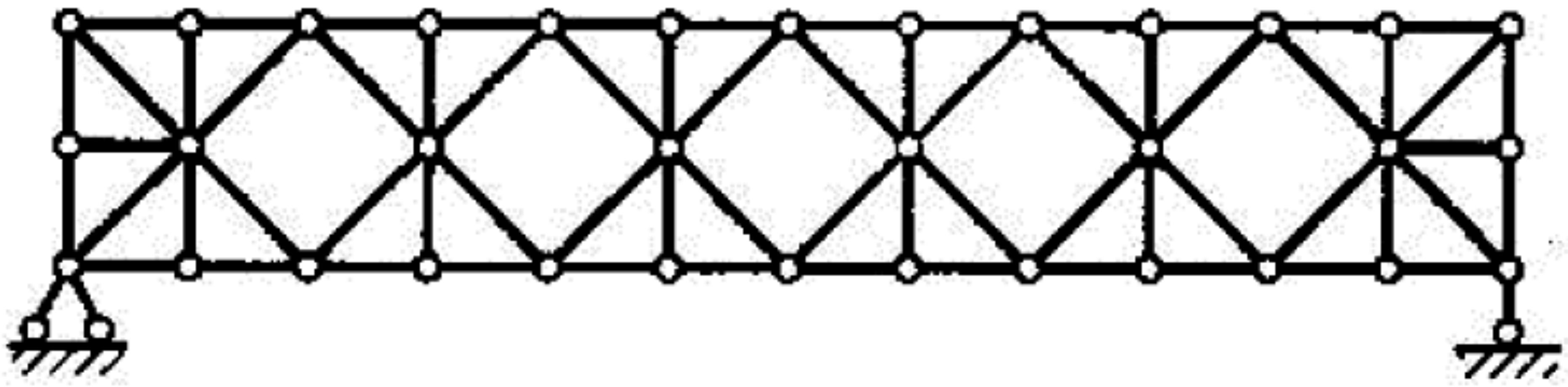


图 2-2-32（题 2-16）

2-16　答：对于该桁架结构，由于上部结构与大地用三根不交于一点的链杆联结，故只需对上部结构作几何组成分析即可。从左至右依次加二元体，根据二元体规则，可知该桁架结构为几何不变，有一个多余约束的体系。

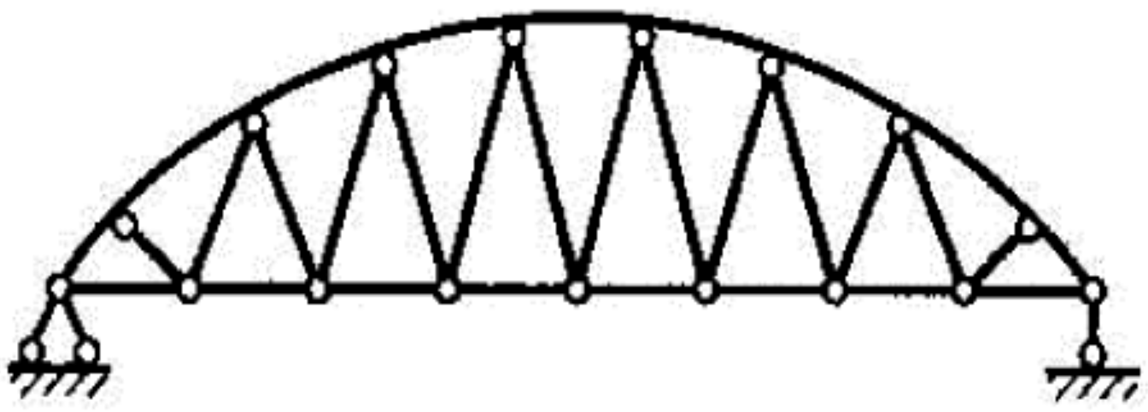


图 2-2-33（题 2-17）

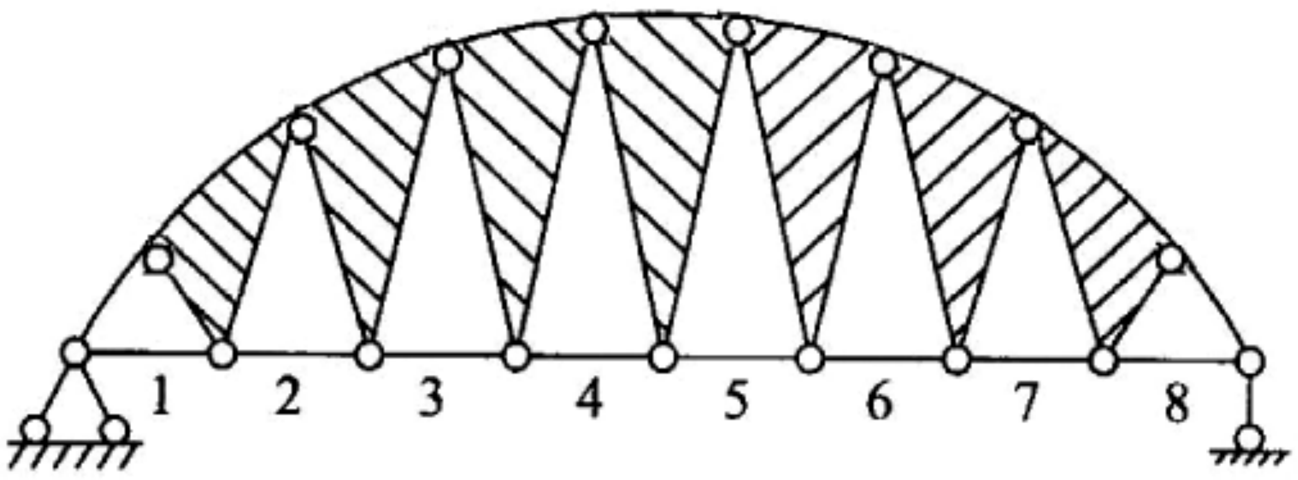


图 2-2-34

2-17　答：将曲杆看作一刚片，分别加二元体，如图阴影所示，则曲杆与大地组成一个刚片，该体系为几何不变且有 8 根多余约束（链杆）。

2-18、2-19　添加最少数目的链杆和支承链杆，使体系成为几何不变，而且无多余联系。

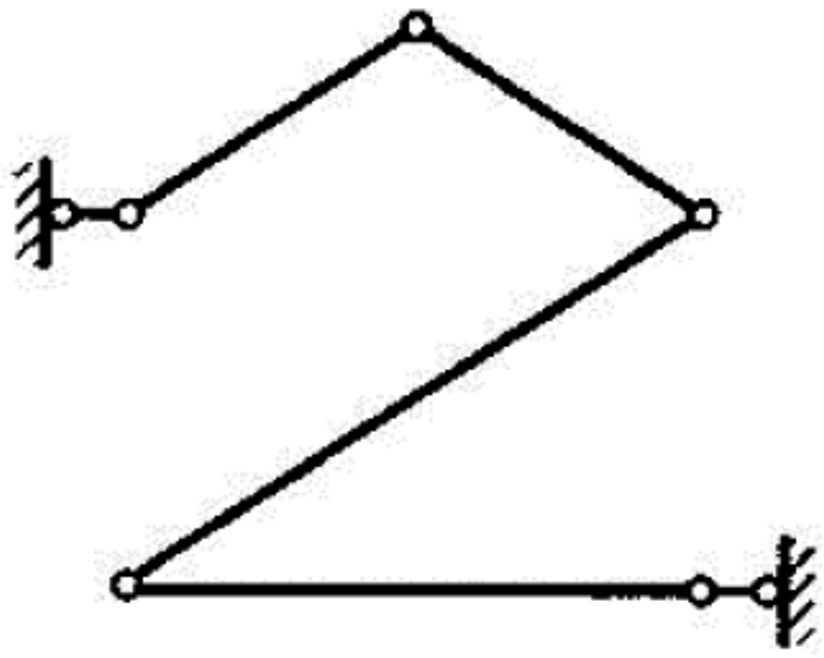


图 2-2-35（题 2-18）

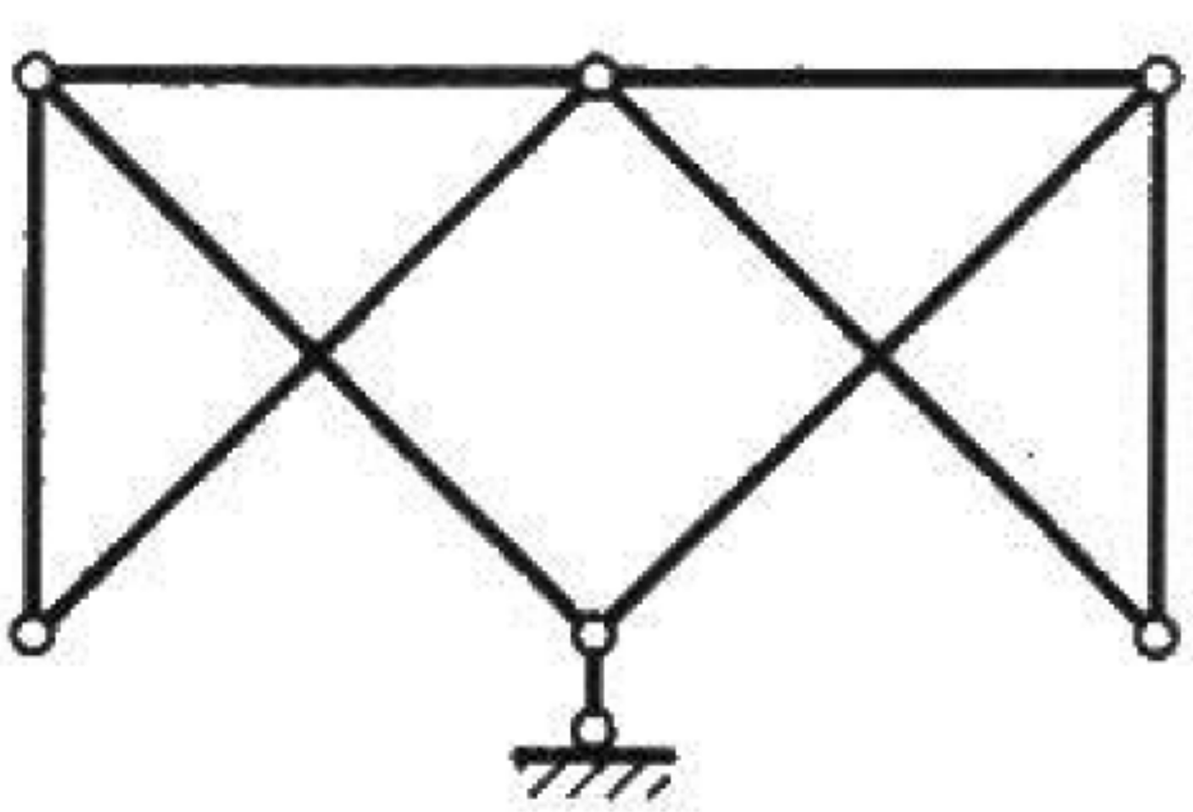


图 2-2-36（题 2-19）

2-18　答：需要添加加 4 根链杆，可有不同方案。

方案一，如图 2-2-37 所示，加粗编号部分为所添加的链杆和支承链杆。

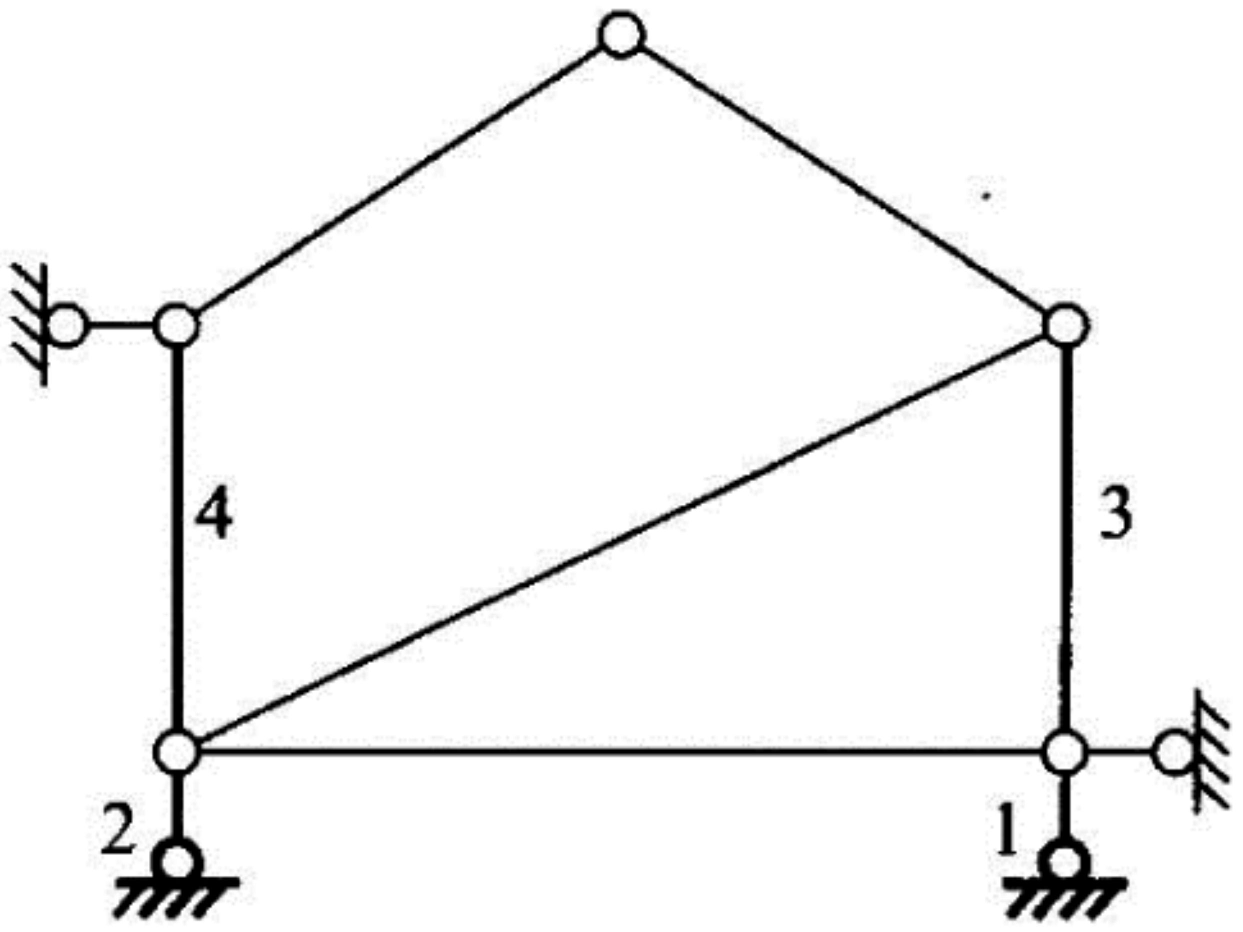


图 2-2-37

2-19　答：需要添加 3 根链杆，可有不同方案。

方案一，如图 2-2-38 所示，加粗编号部分为所添加的链杆和支承链杆。

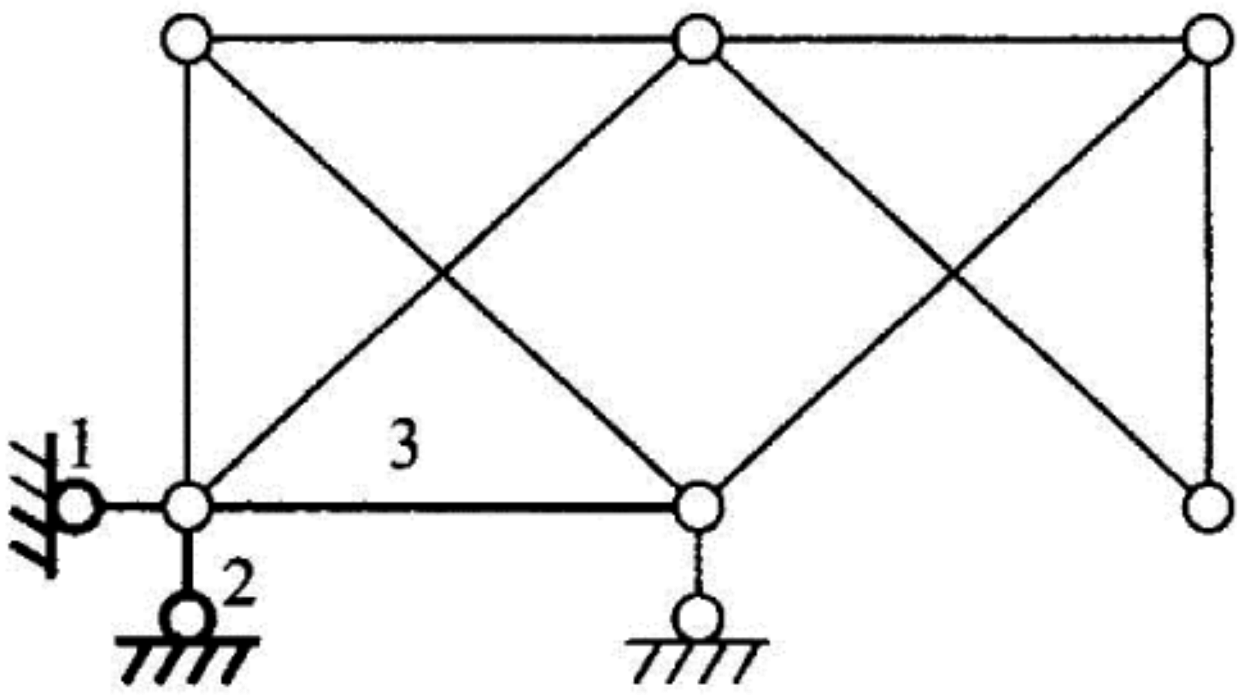


图 2-2-38

2.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．在平面体系中，联结____的铰称为单铰，联结____的铰称为复铰。[哈尔滨工业大学 2007 研]

【答案】两个刚片；两个以上的刚片

【解析】根据定义，单铰是指联结两个刚片的一个铰；复铰是指同时联结两个以上刚片的一个铰。

2．图 2-3-1 所示体系均有___个多余约束的___体系。[国防科技大学 2007 研]

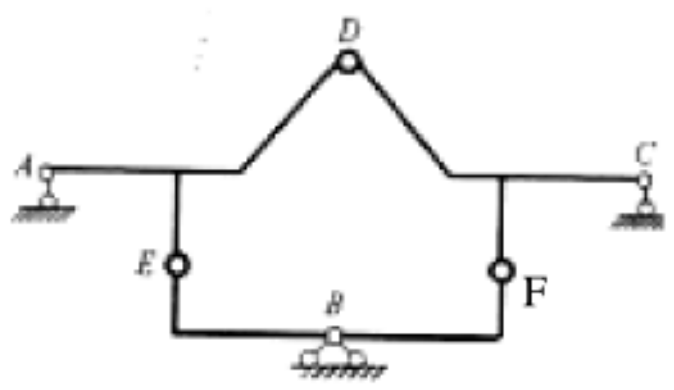


图 2-3-1

【答案】0；几何不变

【解析】几何组成分析：将 AED 和 DCF 分别看作两个刚片，BE 和 BF 可以分别看作两根链杆，再大地看作一个刚片，此体系可看作通过两个虚铰和一个实铰（三个铰不共线）联结的；根据三刚片规则，可判断出该体系为无多余约束的几何不变体系。

3．图 2-3-2 所示体系均有___个多余约束的___体系。[国防科技大学 2004 研]

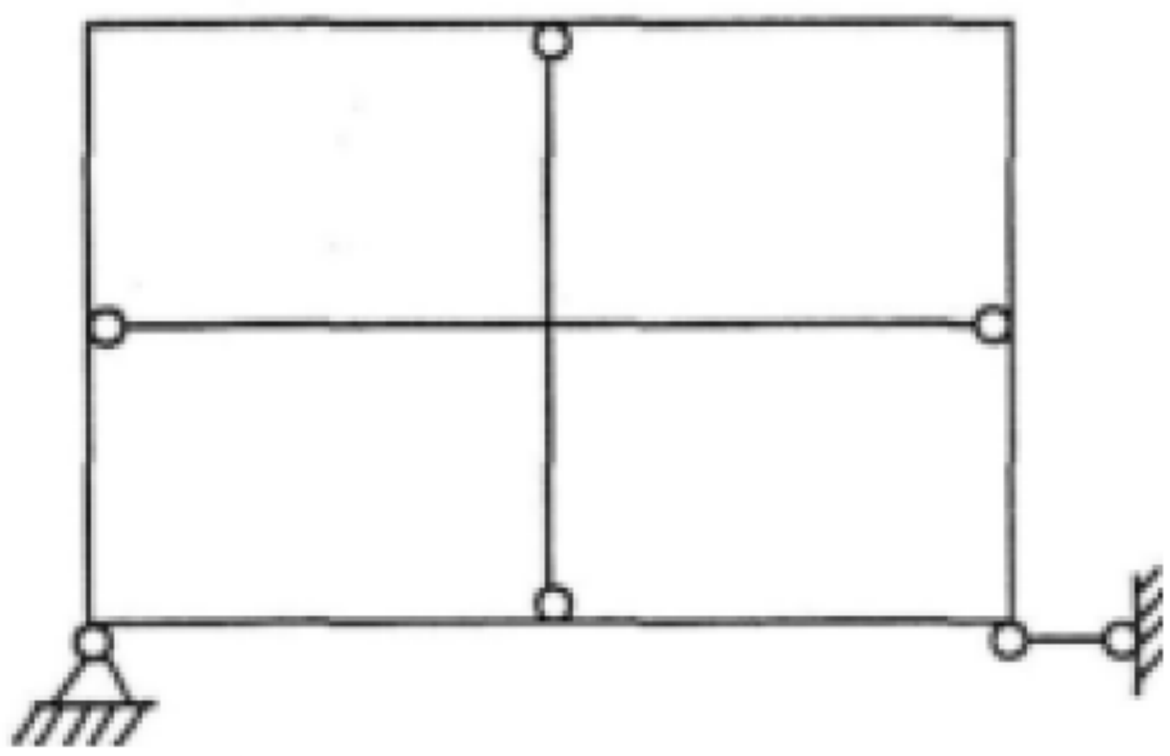


图 2-3-2

【答案】5；瞬变

【解析】几何组成分析，分析上部结构：将 4 个组合节点全部变成铰接点，则减少 4 个多余约束；分析剩余结构，易知该剩余部分为有 1 个多余约束的几何不变体系，故上部结构为有 5 个多余约束的几何不变体系。上部结构与基础通过一个铰和与该铰共线的链杆联结。根据两刚片规则，可判断出该体系为有 5 个多余约束的瞬变体系。

二、选择题

1．下列说法正确的是：（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．几何不变体系一定无多余联系

B．静定结构一定无多余联系

C．结构的制造误差不会使结构产生内力

D．有多余联系的体系是超静定结构

【答案】B

【解析】在实际分析的结构中大部分为有多余约束的几何不变体系，例如门式刚架；静定结构的制造误差不会使结构产生内力，超静定结构的制造误差会使结构产生内力；静定结构和超静定结构的几何组成特征分别为：静定结构是无多余约束的几何不变体系，而超静定结构则是有多余约束的几何不变体系。

2．图 2-3-3 示体系的几何组成是（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．几何不变，无多余约束

B．几何不变，有多余约束

C．瞬变

D．常变

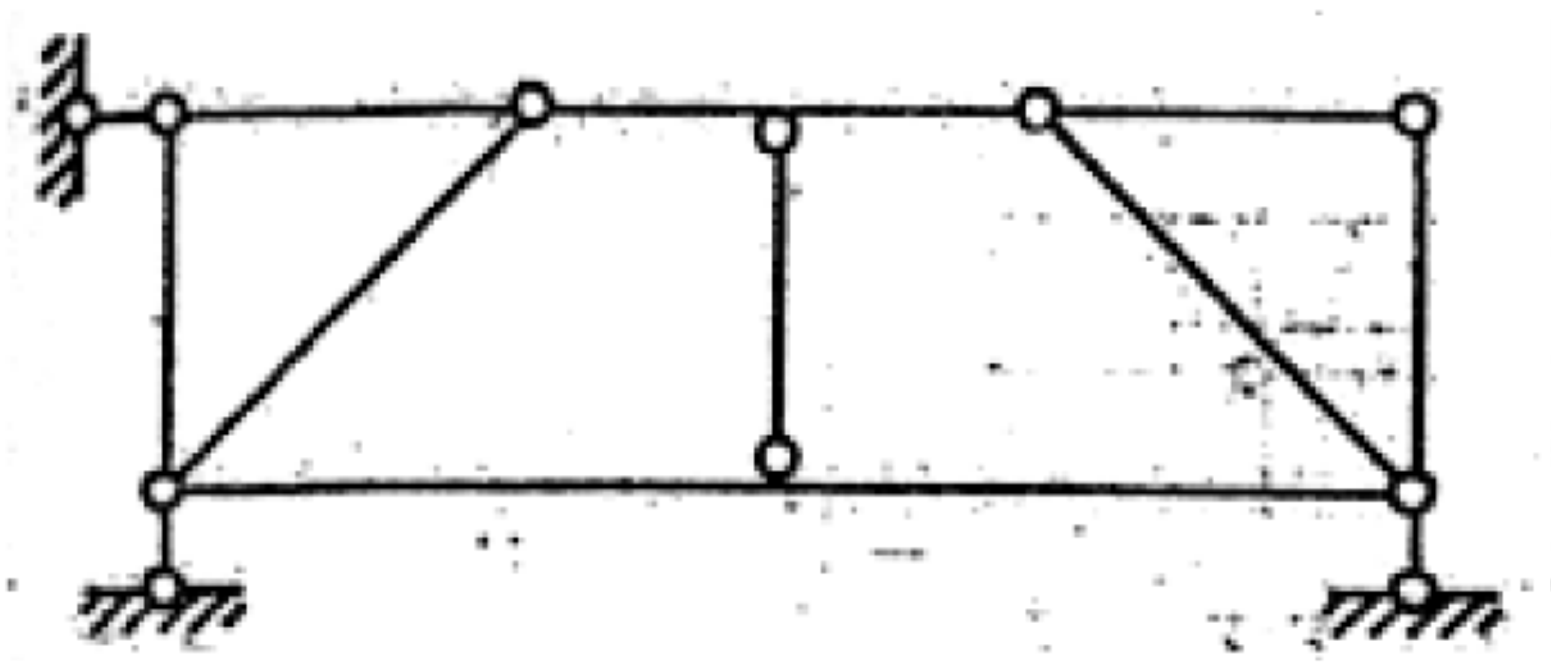


图 2-3-3

【答案】C

【解析】几何组成分析：由于上部结构与基础通过三根不交于一点的链杆联结，故只需考虑上部结构的几何性质即可。对于上部结构，先去掉左右两个二元体，将上下两个平行的杆件看作两个刚片，这两个刚片通过三根延长线相交的链杆联结。根据两刚片规则，可判断出该体系为瞬变体系。

3．图 2-3-4 示体系的几何组成为：（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．几何不变，无多余约束

B．几何不变，有多余约束

C．瞬变体系

D．可变体系

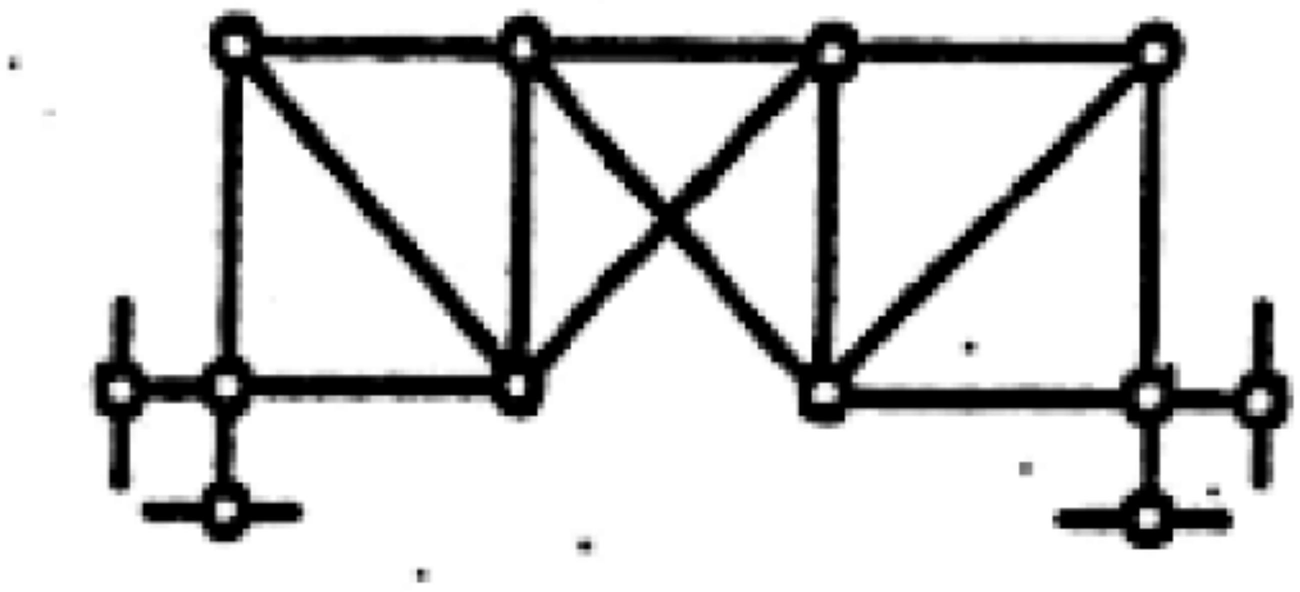


图 2-3-4

【答案】B

【解析】几何组成分析：采用添加二元体的方法，可知上部结构为无多余约束的几何不变体系；上部结构与基础通过 4 根链杆联结，显然根据三刚片规则易知，该体系为有一个多余约束的几何不变体系。

4．图 2-3-5 示体系的几何组成为（　　）。[哈尔滨工业大学 2008 研]

A．几何不变，无多余联系

B．几何不变，有多余联系

C．瞬变

D．常变

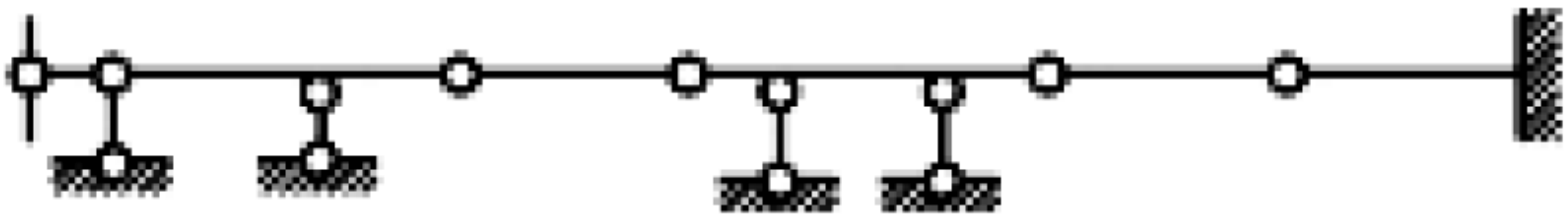


图 2-3-5

【答案】B

【解析】几何组成分析：从左边开始分析，左边第一根水平链杆与大地通过三根不相交的水平链杆联结，与大地组成一个刚片；左边第三根水平链杆通过两根水平链杆和两根竖向链杆与大地联结。根据两刚片规则可知，该体系为有一个多余约束的几何不变体系。

5．图 2-3-6 示体系的几何组成为（　　）。[浙江大学 2005 研]

A．几何不变，无多余联系

B．几何不变，有多余联系

C．瞬变

D．常变

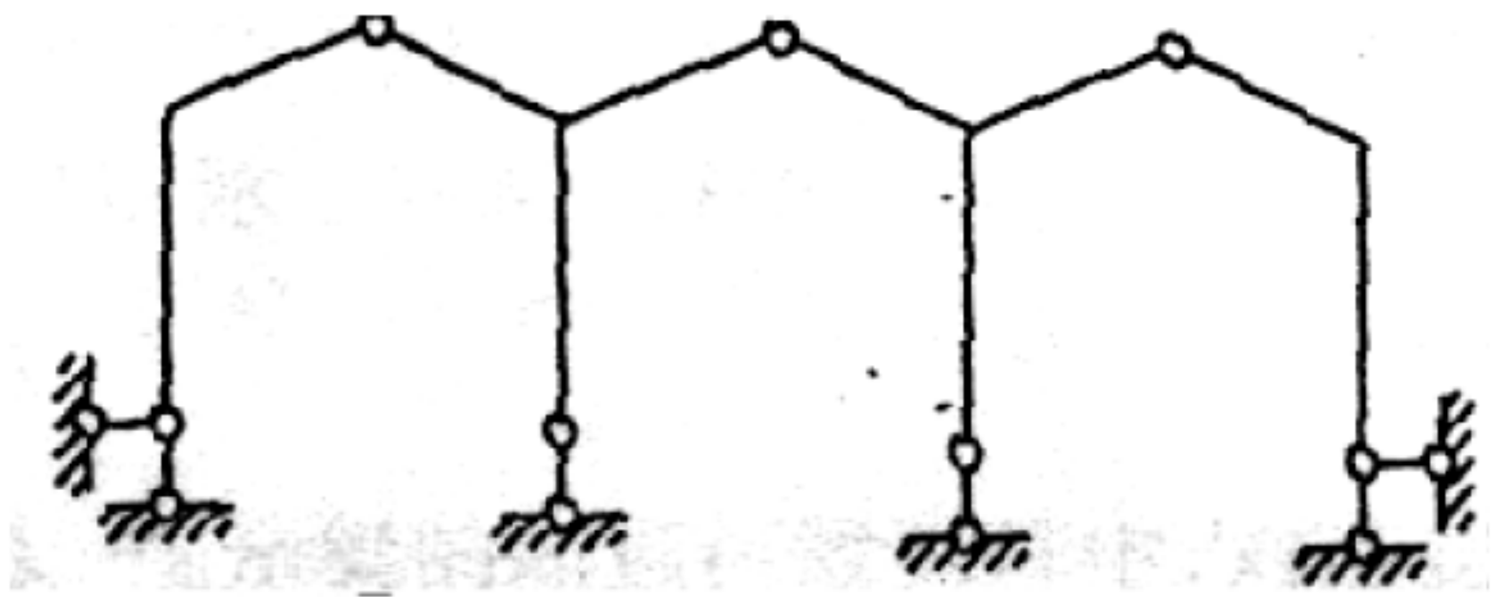


图 2-3-6

【答案】A

【解析】几何组成分析：两边的折杆可以等效为两根斜直杆，中间两个 Y 型的结构可以分别看作两个刚片，大地看作一个刚片，这三个刚片通过不共线的三个铰联结。根据三刚片规则可判断出该体系为无多余约束的几何不变体系。

6．图 2-3-7 示结构的超静定次数为（　　）。[哈尔滨工业大学 2007 研]

A．12 次

B．15 次

C．24 次

D．35 次

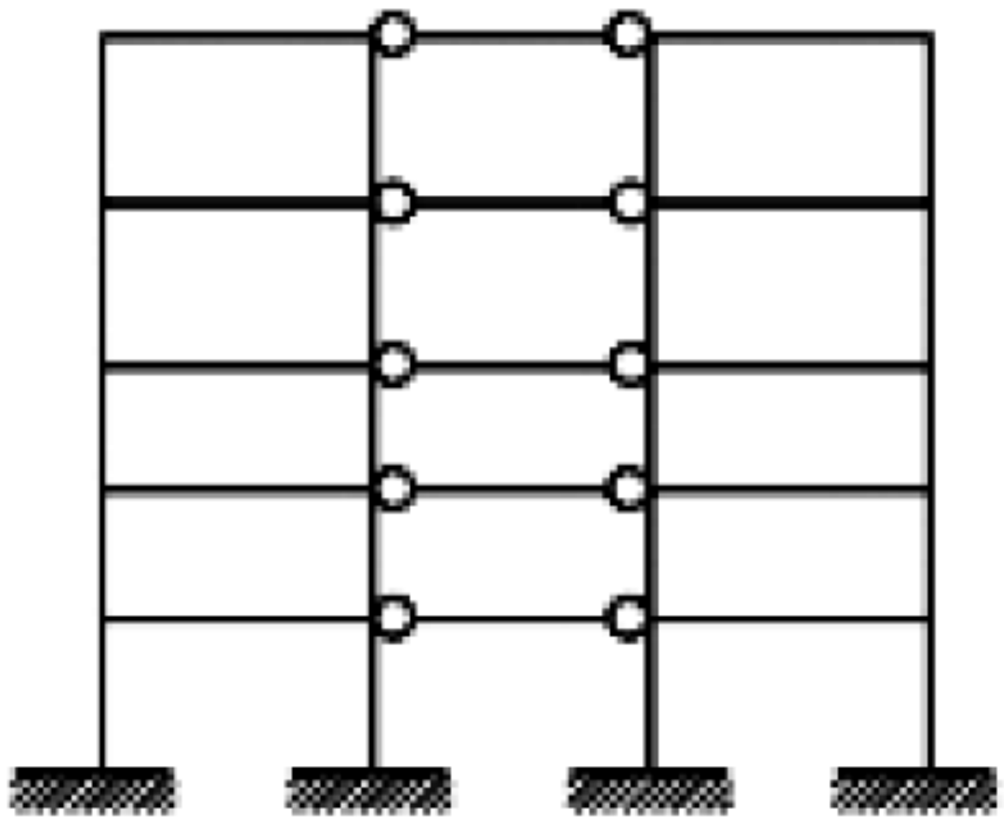


图 2-3-7

【答案】D

【解析】刚结的封闭框的多余约束为 3 个，图示结构有是个封闭框，多余约束为 10×3＝30 个，再加上中间的 5 根多余链杆，总共的多余约束为 35 个，故超静定次数为 35 次。

三、判断题

1．任意两根链杆的约束作用都相当于其交点处的一个虚铰。（　）[中南大学 2005 研]

【答案】对

【解析】虚铰是指两根链杆的延长线相交于一点，实铰也可以看作特殊的虚铰。

2．瞬变体系一定存在多余约束。（　）[东南大学 2003 研]

【答案】错

【解析】瞬变体系不一定存在多余约束，例如两根刚片用三根平行不等长的链杆相联为瞬变体系，但该体系无多余约束。

3．自由度 $W\leqslant0$ 是体系保持几何不变的充分条件。（　）[湖南大学 2003 研]

【答案】错

【解析】自由度 $W\leqslant0$ 是体系保持几何不变的必要非充分条件。因为 $W\leqslant0$ 不一定为几何不变，还需要进行几何组成分析；但若体系为几何不变体系，其自由度一定是小于等于零的。

四、计算题

1.分析图 2-3-8 示体系的几何组成。[宁波大学 2009 研]

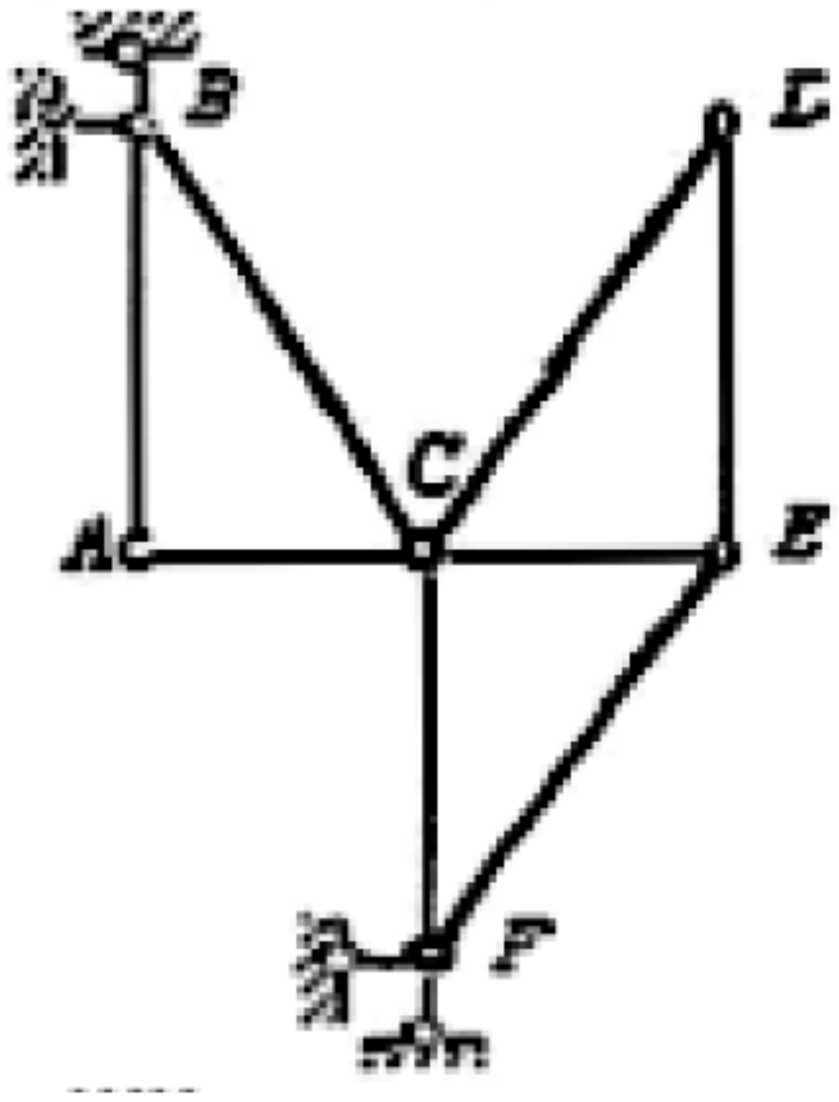


图 2-3-8

解：ABC 为铰接三角形，视为刚片 1；铰接三角形组成 CDEF，为刚片 2；基础视为刚片 3。三刚片由不共

线的三个铰支 B、C、F 两两相连，故体系为无多余约束的几何不变体系。

2.试对图 2-3-9 所示体系进行几何构造分析。[福州大学 2007 研]

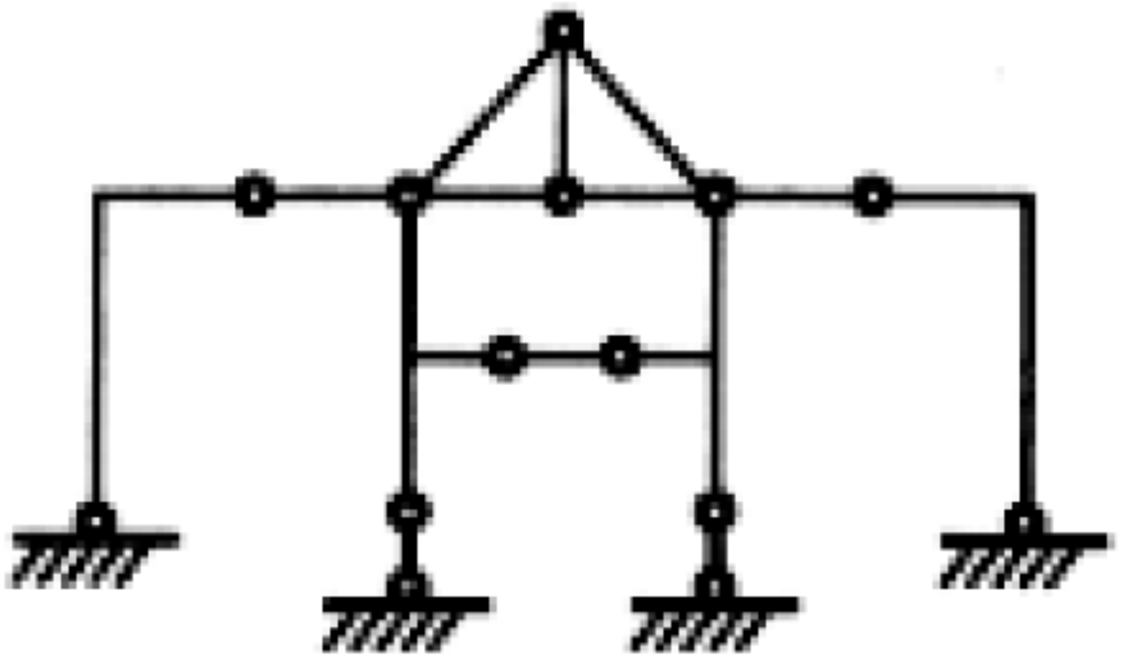


图 2-3-9

解:（1）首先计算自由度，判断体系类型。由图示可知，体系中存在着 10 个链杆，14 个铰支点，2 个刚片，所以自由度为

$$W = 3m - 2h - r = 3 \times 10 - 2 \times 14 - 2 = 0$$

由此可知，体系为几何不变体系或者几何瞬变体系。

（2）几何结构分析。对各个杆件进行编号，如下图 1-3-10 所示。

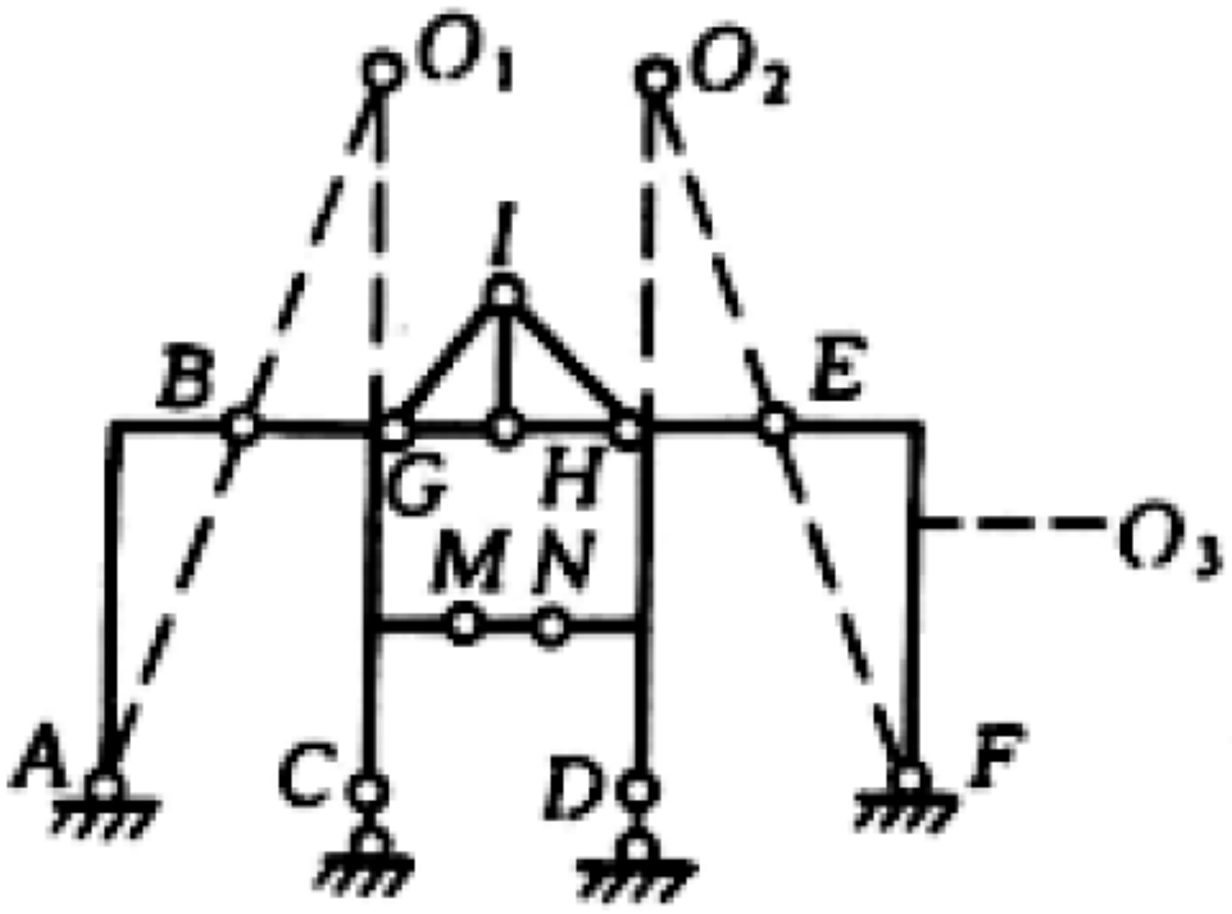


图 2-3-10

视 BGC、EHD 和大地分别为刚体 1、2、3，而 AB、EF 和刚片 GHI 为连接的链杆，如图 2-3-10 所示，则 1 和 3 是通过虚铰O_1连接，2 和 3 是通过虚铰O_2连接，而 1 和 2 是以两个互相平行但是长度不等的链杆连接，它们的交点在无限远处的O_3处，与O_1和O_2的连线平行，所以是几何瞬变体系。

3.分析图 2-3-11 所示平面体系的几何组成性质。[西南交通大学 2007 研]

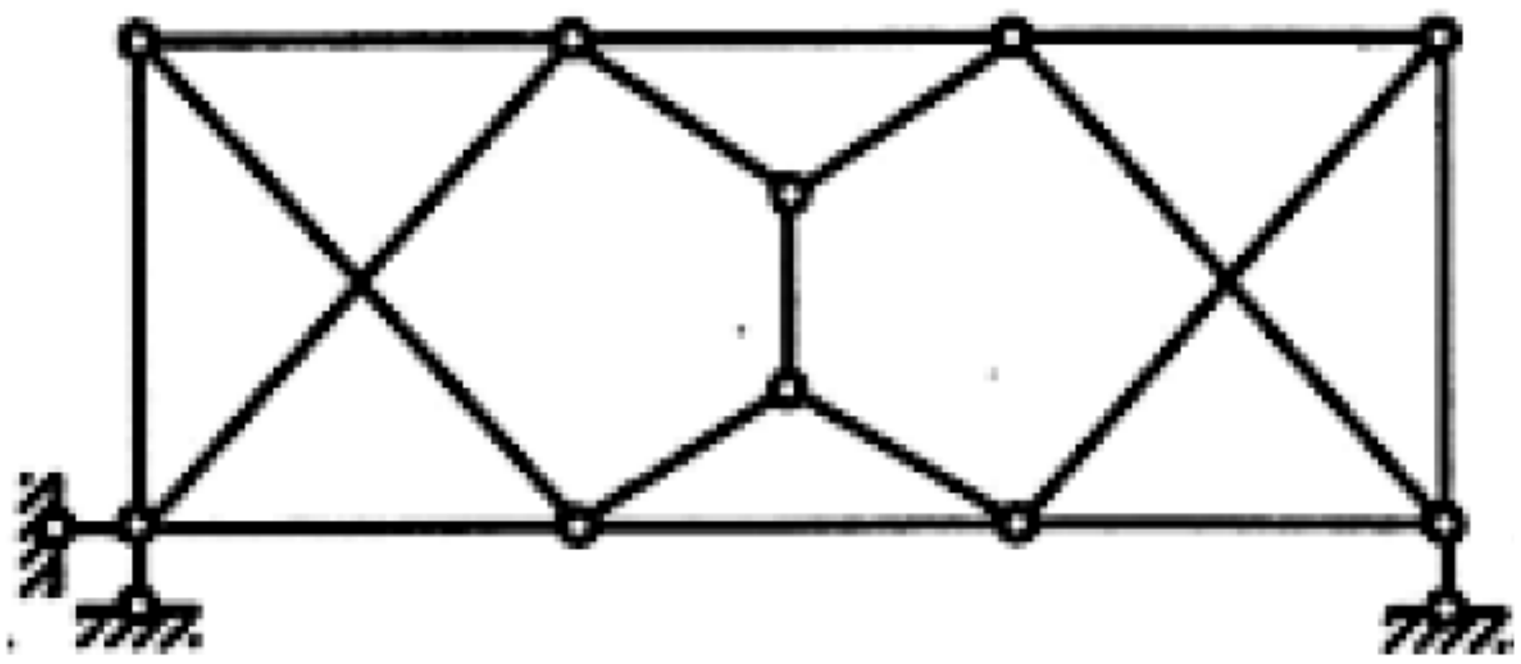


图 2-3-11

解:由图示结构可知，仅分析内部结构即可。首先对结构进行分析，结构是对称的，两边可以视为两个刚体，中间的竖杆为一个刚体，如下图 2-3-12 所示。

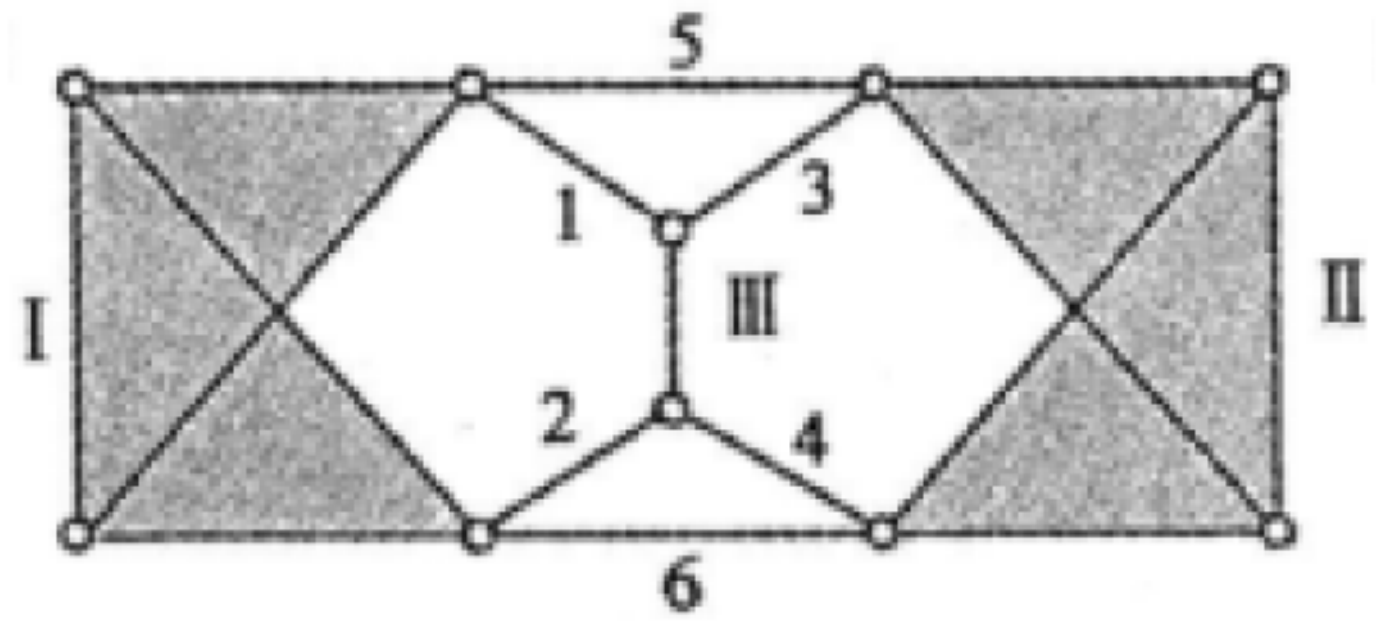


图 2-3-12

三个刚体由链杆 1、2、3、4、5、6 连接，对刚体进一步分析，如下图 2-3-13 所示。

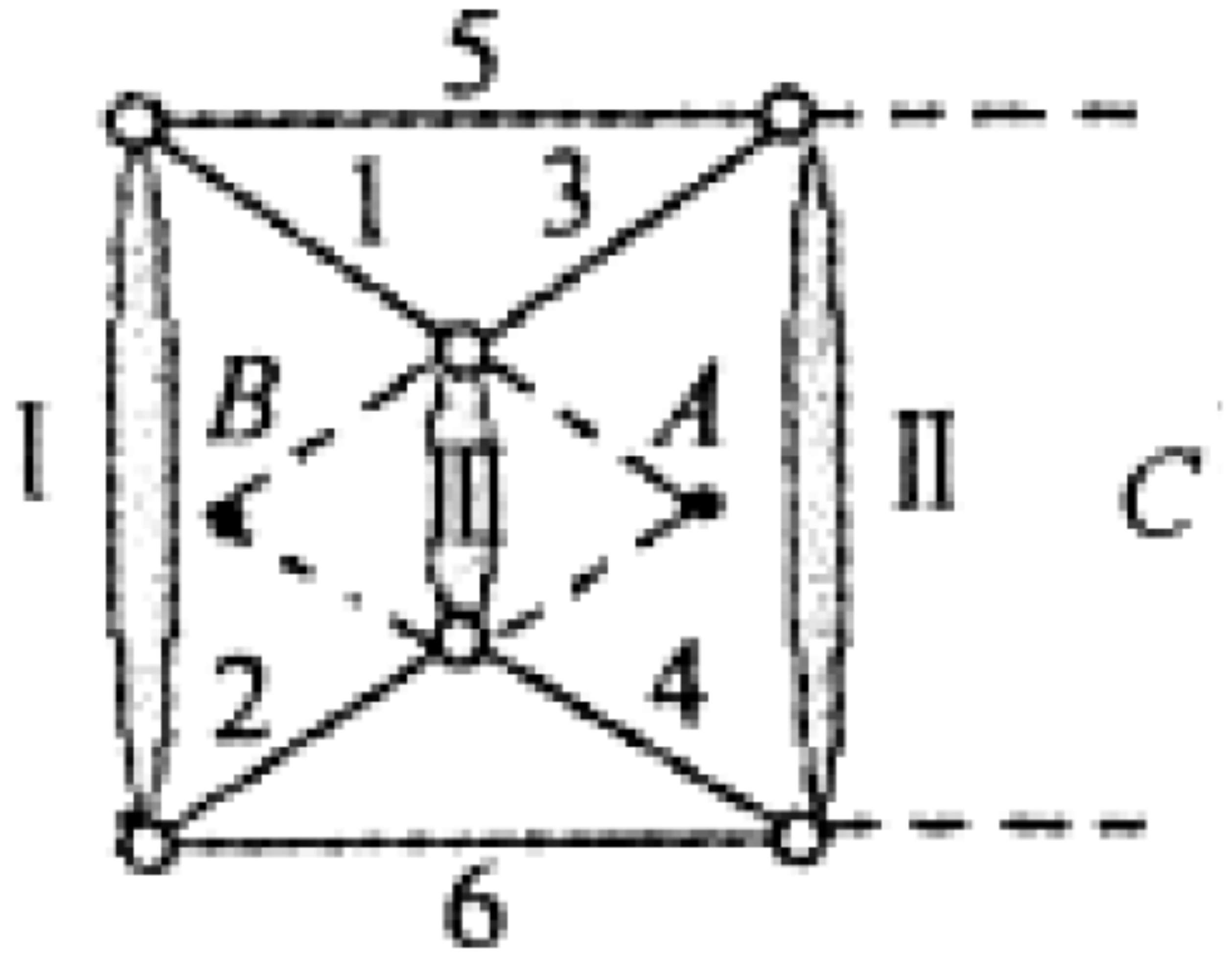


图 2-3-13

由上图可以看出，刚体 I 和 II 相连的 1 和 2 链杆的交点为 A，II 和 III 连接的 3、4 杆的交点为 B，I 和 III 相连的 5 和 6 杆的交点在无限远处，与 AB 铰连接平行，所以体系为几何可变体系。

第 3 章　静定梁与静定刚架

3.1　复习笔记

【知识框架】

- 静定梁与静定刚架
  - 单跨静定梁
    - 常见的单跨静定梁：简支梁、悬臂梁、伸臂梁
    - 支座反力
    - 内力
      - 内力的种类：轴力、剪力、弯矩
      - 内力的正负
      - 内力的计算方法
      - 内力的大小
      - 内力图
    - 内力与外力间的微分关系及内力图形状判断
      - 内力与外力的微分关系
      - 微分关系式的几何意义
      - 内力图的形状特征
    - 区段叠加法作弯矩图注意事项
    - 绘制内力图的一般步骤：求反力、分段、定点、连线
  - 多跨静定梁
    - 多跨静定梁的定义
    - 多跨静定梁的组成
      - 基本部分
      - 附属部分
    - 多跨静定梁的受力分析
      - 基本部分与附属部分之间的传力关系
      - 计算多跨静定梁的顺序
    - 多跨静定梁的基本组成型式
  - 静定平面刚架
    - 刚架的定义
    - 常见的型式：悬臂刚架、简支刚架、三铰刚架
    - 支座反力的计算
    - 内力的计算
    - 刚架弯矩图绘制技巧
      - 优先绘制悬臂部分或简支部分
      - 充分利用弯矩图的形状特征
      - 对称性的利用
      - 区段叠加法作弯矩图
  - 静定结构的特性
    - 静力解答的唯一性
    - 除荷载外其他任何因素均不引起静定结构的内力
    - 平衡力系的影响
    - 荷载等效变换的影响
  - 静定空间刚架
    - 空间刚架横截面内力
    - 内力的正负：轴力的正负、剪力的正负、扭矩的正负、弯矩的正负
    - 内力的计算
    - 内力图的绘制

【重点难点归纳】

一、单跨静定梁

1．常见单跨静定梁的分类

（1）简支梁；

（2）伸臂梁；

（3）悬臂梁。

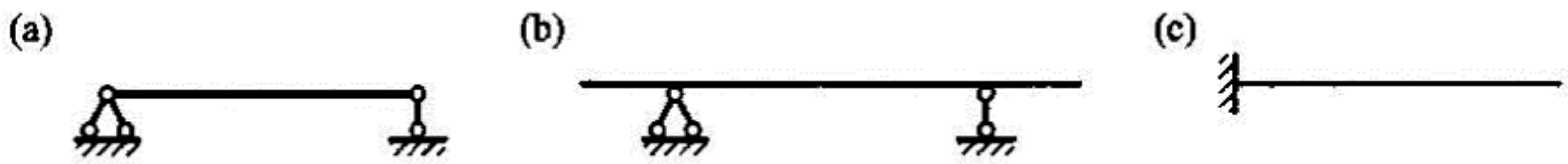


图 3-1-1

2．反力

常见的单跨静定梁是由梁和地基按两刚片规则组成的静定结构，其支座反力都只有三个，由平面一般力系的

三个平衡方程求出。

3．内力

（1）内力的种类

①轴力 F_N；

②剪力 F_S；

③弯矩 M。

（2）内力的正负

①轴力以拉力为正；

②剪力以绕隔离体顺时针方向转动者为正；

③弯矩以使梁的下侧纤维受拉者为正。

（3）内力计算方法

计算内力的基本方法是截面法：将结构沿拟求内力的截面截开，取截面任一侧的部分为隔离体，利用平衡条件计算所求内力。

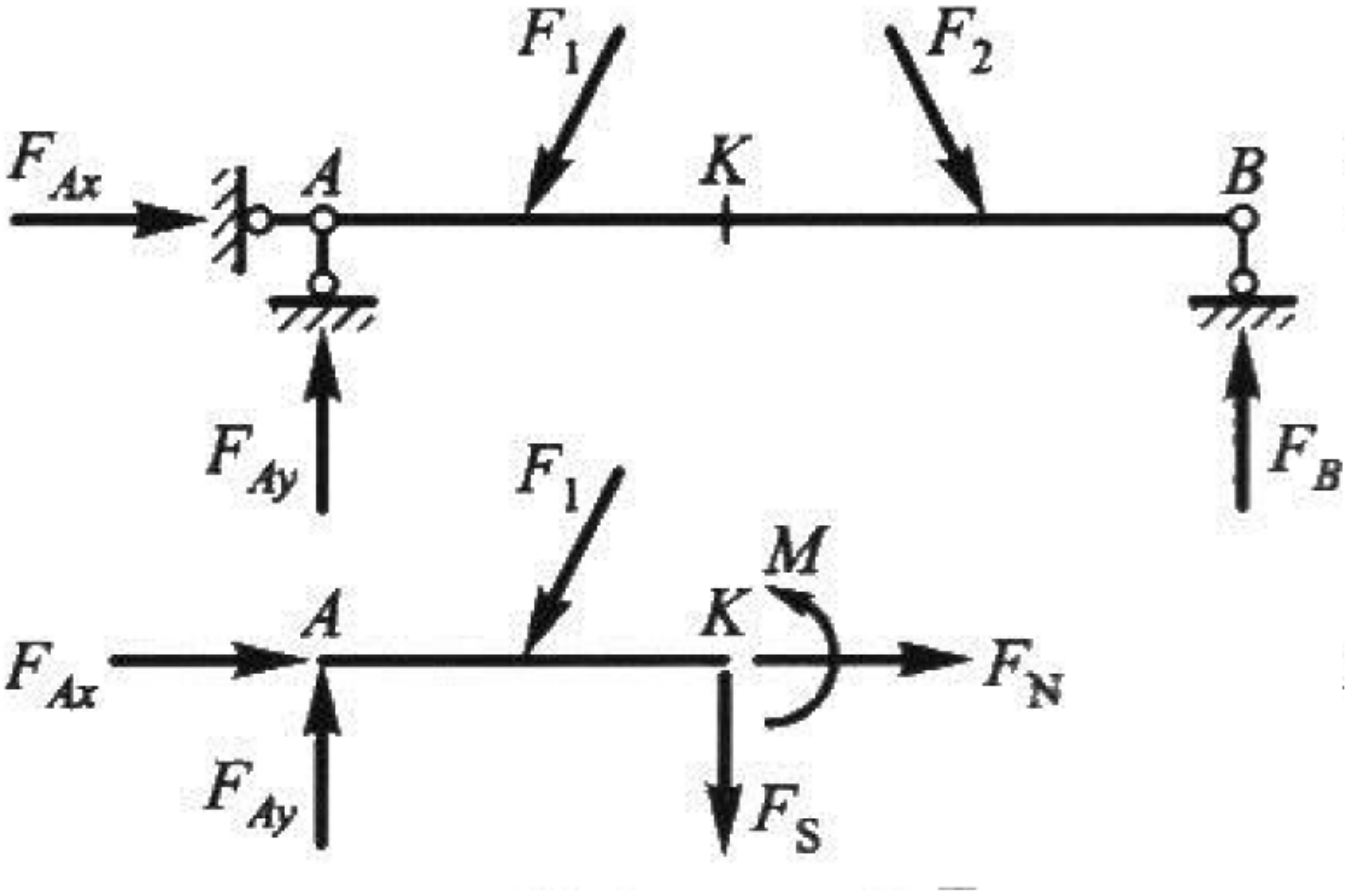


图 3-1-2

（4）内力的大小

①轴力等于截面一侧所有外力（包括荷载和反力）沿截面法线方向投影的代数和；

②剪力等于截面一侧所有外力沿截面方向投影的代数和；

③弯矩等于截面一侧所有外力对截面形心力矩的代数和；

④对于直梁，当所有外力均垂直于梁轴线时，横截面上通常只有剪力和弯矩，没有轴力。

（5）内力图

①定义

内力图是指表示结构上各截面内力数值的图形。

②画法

a．内力图通常是用平行于杆轴线的坐标表示截面的位置（此坐标轴通常又称为基线），而用垂直于杆轴线的坐标（又称竖标）表示内力的数值而绘出的。

b．弯矩图习惯绘在杆件受拉的一侧，而图上可不注明正负号。

c．剪力图和轴力图则将正值的竖标绘在基线的上方，同时标明正负号。

d．基本方法：写出内力方程；简便方法：利用微分关系判断内力形状，采用分段、定点、连线以及区段叠加法来作内力图。

4．内力与外力间的微分关系及内力图形状判断

（1）内力与外力间的微分关系

在直梁中（图 3-1-3（a）），由微段（图 3-1-3（b））的平衡条件可导出内力与外力间具有如下微分关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}&=-q(x)\\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}&=F_S\\ \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}x}&=-p(x)\end{aligned}\right\}$$

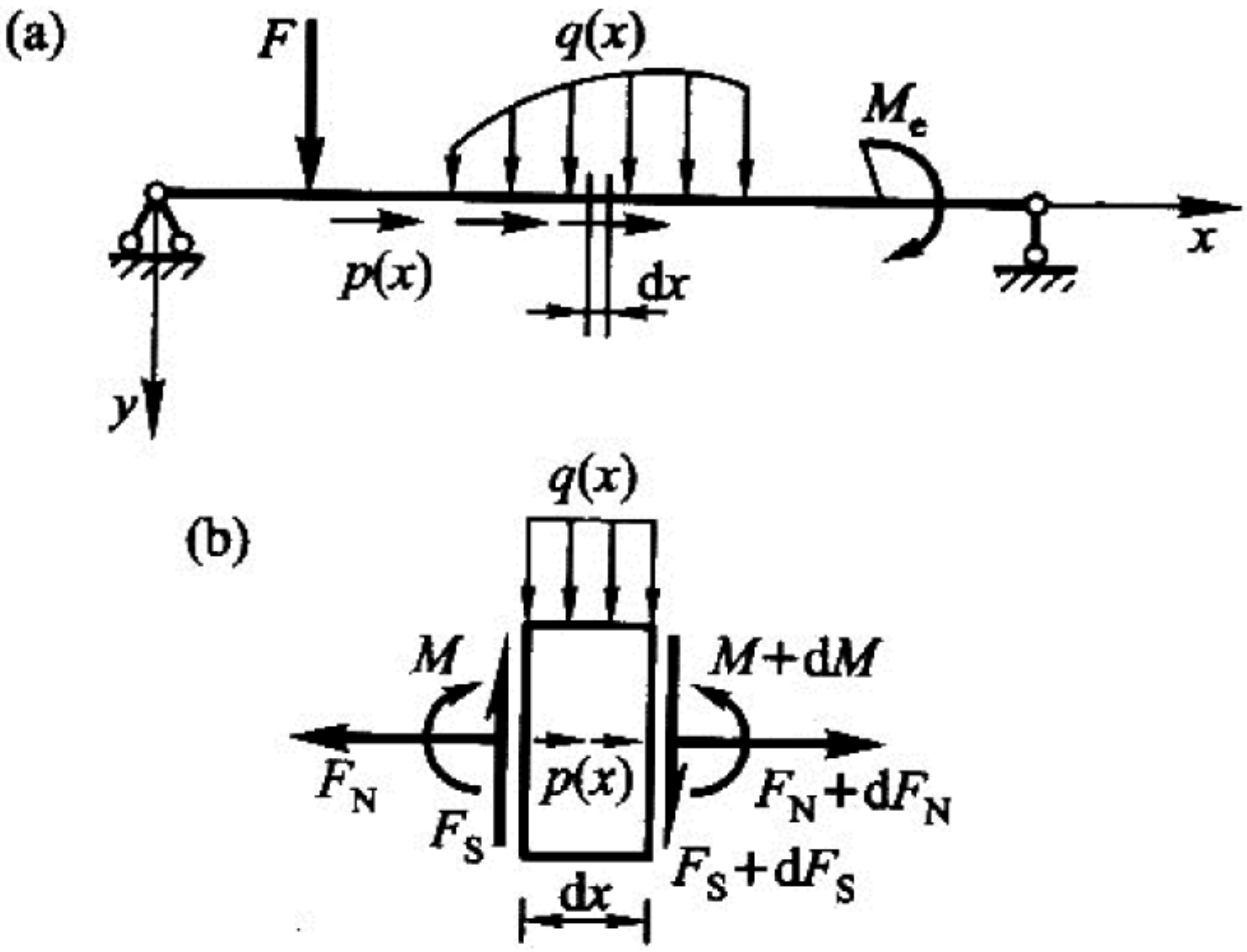


图 3-1-3

（2）微分关系式的几何意义

①剪力图上某点处切线斜率等于该点处的横向荷载集度，但符号相反。

②弯矩图上某点处切线斜率等于该点处的剪力。

③轴力图上某点处切线斜率等于该点处的轴向荷载集度，但符号相反。

（3）内力图的形状特征

表 3-1-1　直梁内力图的形状特征

梁上情况	无横向外力区段	横向均布力 q 作用区段		横向集中力 F 作用处		集中力偶 M 作用处	铰处
剪力图	水平线	斜直线	为零处	有突变（突变值 = F）	如变号	无变化	无影响
弯矩图	一般为斜直线	抛物线（凸出方向同 q 指向）	有极值	有尖角（尖角指向同 F 指向）	有极值	有突变（突变值 = M）	为零

5．区段叠加法作弯矩图

先将两端弯矩 M_A、M_B 绘出并连以直线（虚线），然后以此直线为基线叠加简支梁在荷载 F 作用下的弯矩图。必须注意

（1）这里所说弯矩图的叠加，是指其竖标值叠加。

（2）叠加法对直杆的任何区段都适用。

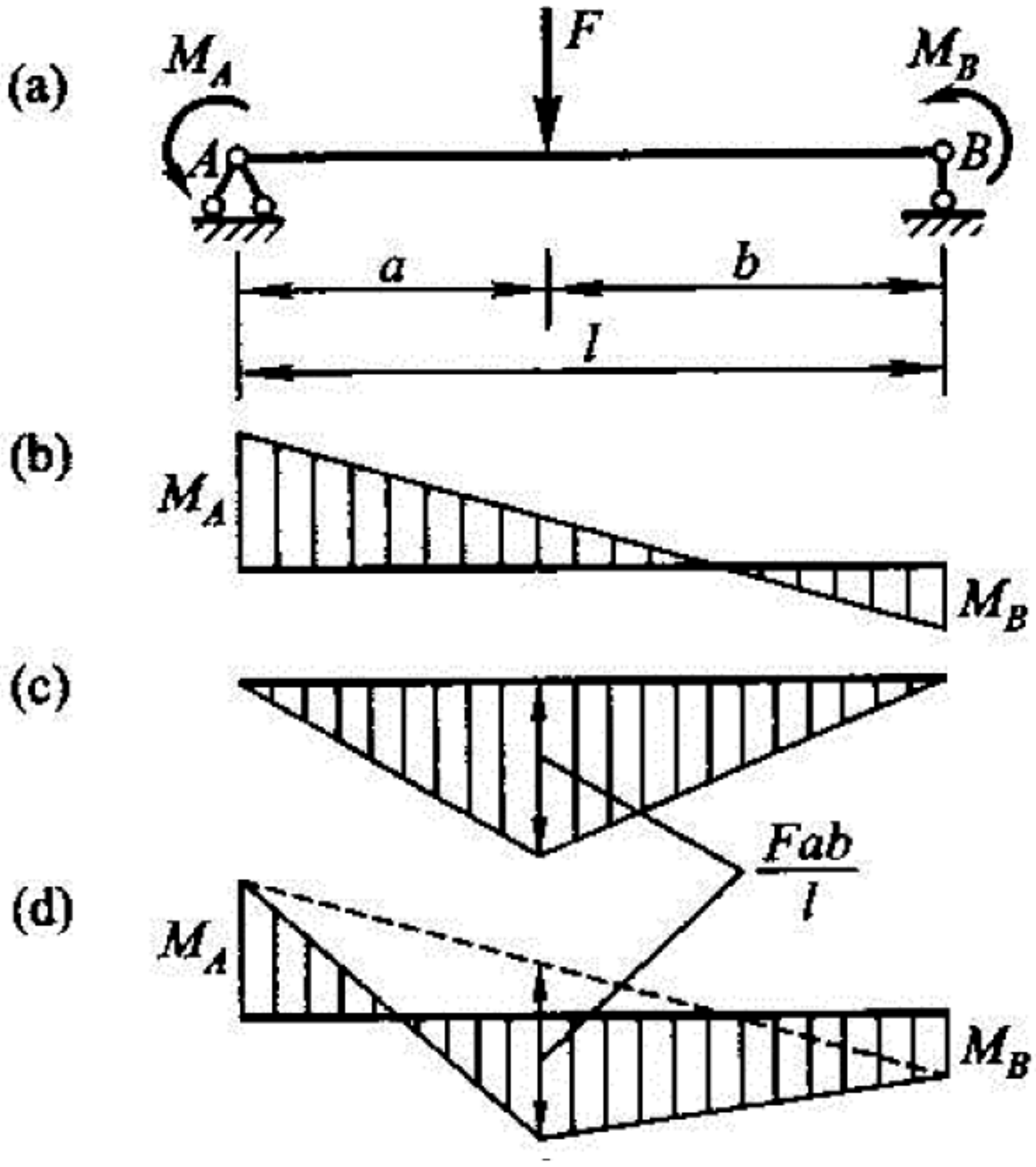


图 3-1-4

6．绘制内力图的一般步骤

（1）求反力

悬臂梁可不求反力。

（2）分段

凡外力不连续点均应作为分段点，如集中力及力偶作用点、均布荷载的起讫点等。这样，根据外力情况就可以判定各段梁的内力图形状。

（3）定点

根据各段梁的内力图形状，选定所需的控制截面，用截面法求出这些截面的内力值，并在内力图的基线上用竖标绘出。这样，就定出了内力图上的各控制点。

（4）连线

根据各段梁的内力图形状，将其控制点以直线或曲线相连。对控制点间有荷载作用的情况，其弯矩图可用区段叠加法绘制。

二、多跨静定梁

1．多跨梁定义

多跨静定梁是指由若干根梁用铰相联，并用若干支座与基础相联而组成的静定结构。图 3-1-5（a）为一用于公路桥的多跨静定梁，图 3-1-5（b）为其计算简图。

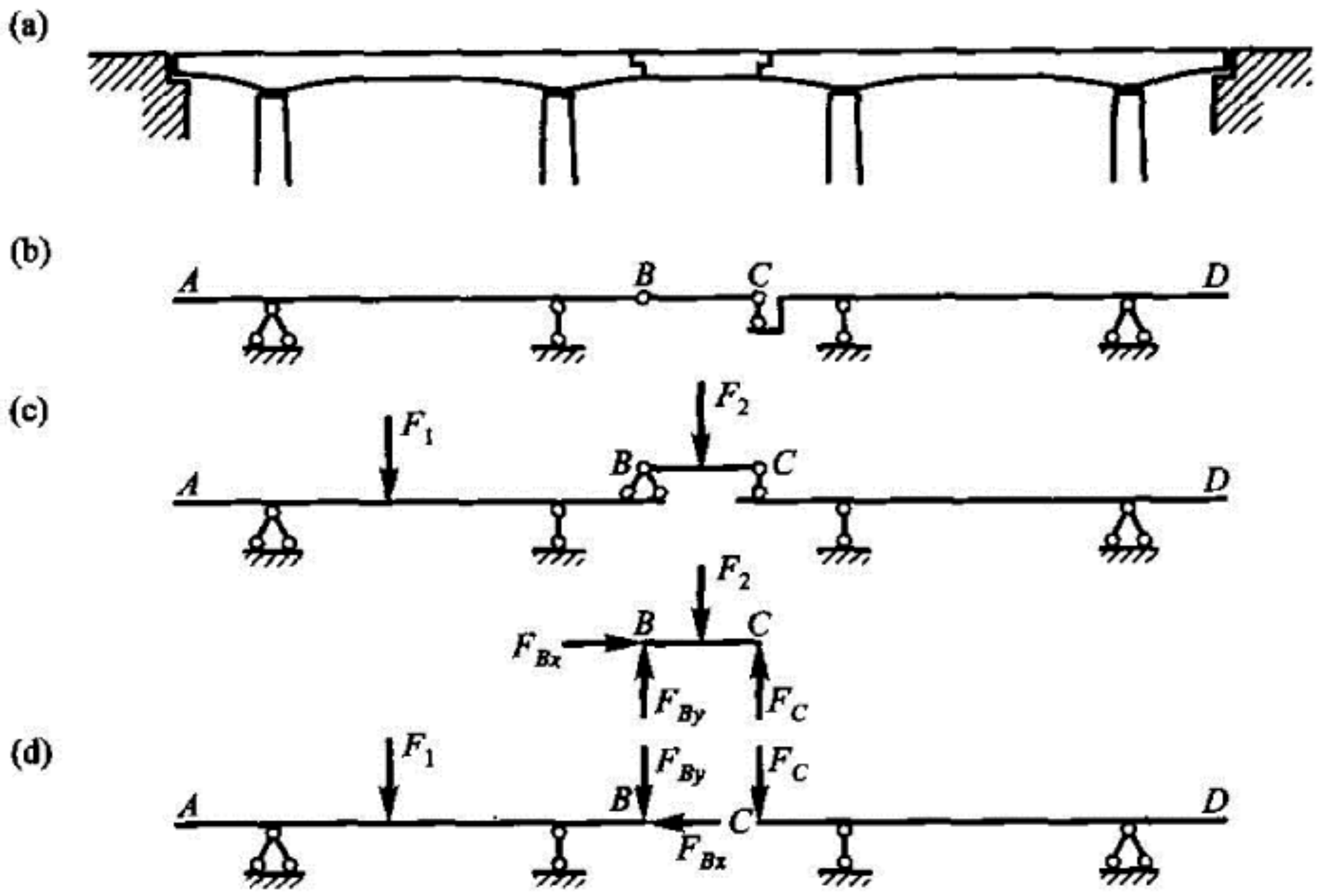


图 3-1-5

2．多跨梁的组成

（1）多跨梁的组成成分

①基本部分

基本部分是指不依赖其他部分的存在而能独立地维持其几何不变性的部分。如图 3-1-5 中的 AB 部分和 CD 部分。

②附属部分

附属部分是指必须依靠基本部分的支承才能维持其几何不变性的部分。如图 3-1-5 中的 BC 部分。

（2）各成分的关系

①若附属部分被破坏或撤除，基本部分仍为几何不变；

②若基本部分被破坏，则附属部分必随之连同倒塌。

（3）层叠图

层叠图是指把基本部分画在下层而把附属部分画在上层的图形。如图 3-1-5（c）所示。

层叠图更清晰地表示各部分之间的支承关系。

3．多跨梁的受力分析

（1）基本部分与附属部分之间的传力关系

①当荷载作用于基本部分上时

只有基本部分受力，附属部分不受力。

②当荷载作用于附属部分上时

附属部分和基本部分都受力。

（2）计算多跨静定梁的顺序

先附属部分，后基本部分。

4．基本组成型式

（1）伸臂梁与支承于伸臂梁上的挂梁交互排列。如图 3-1-6（a）所示。最左边的伸臂梁为基本部分，其余各伸臂梁在竖向荷载作用下也是基本部分，各挂梁则为附属部分。其层叠图如图 3-1-6（b）所示。分析时应先计算各挂梁，再计算各伸臂梁。

（2）另一种如图 3-1-7（a）所示，左边伸臂梁为基本部分，其余各段梁则依次分别为其左边部分的附属部分，其层叠图如图 3-1-7（b）所示。分析时应从最上层的附属部分开始，依次计算下来，最后才计算基本部分。

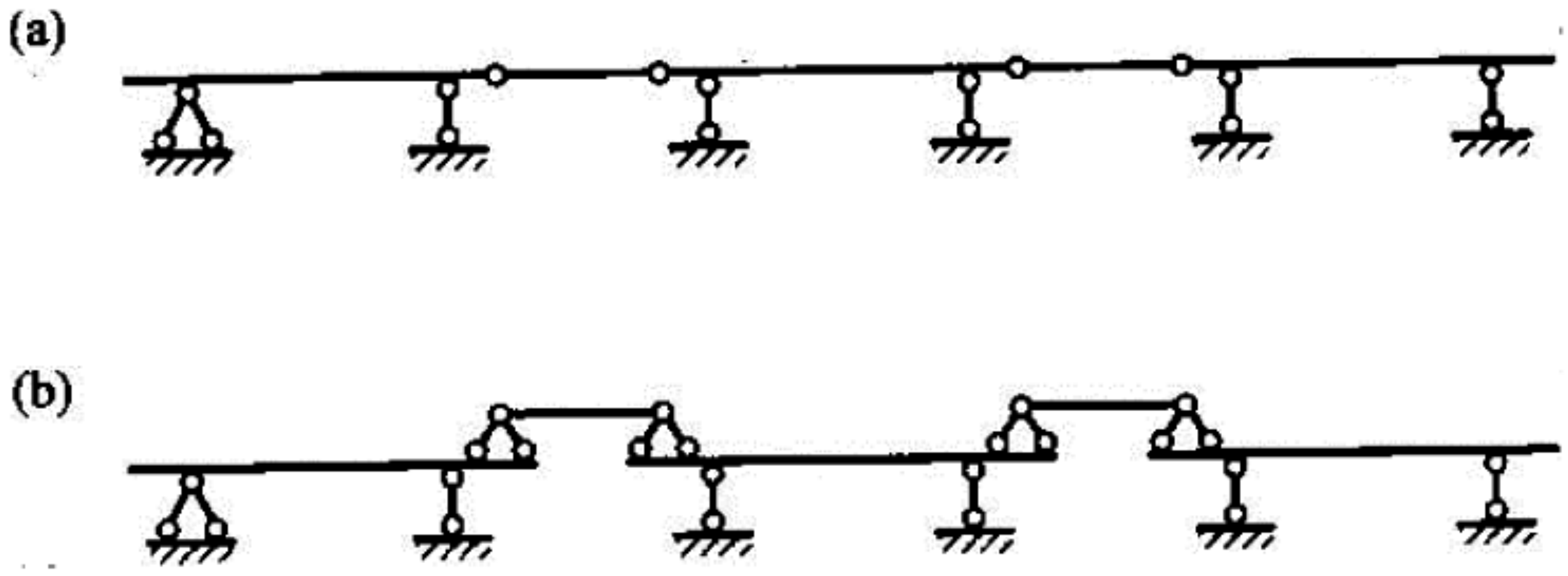


图 3-1-6

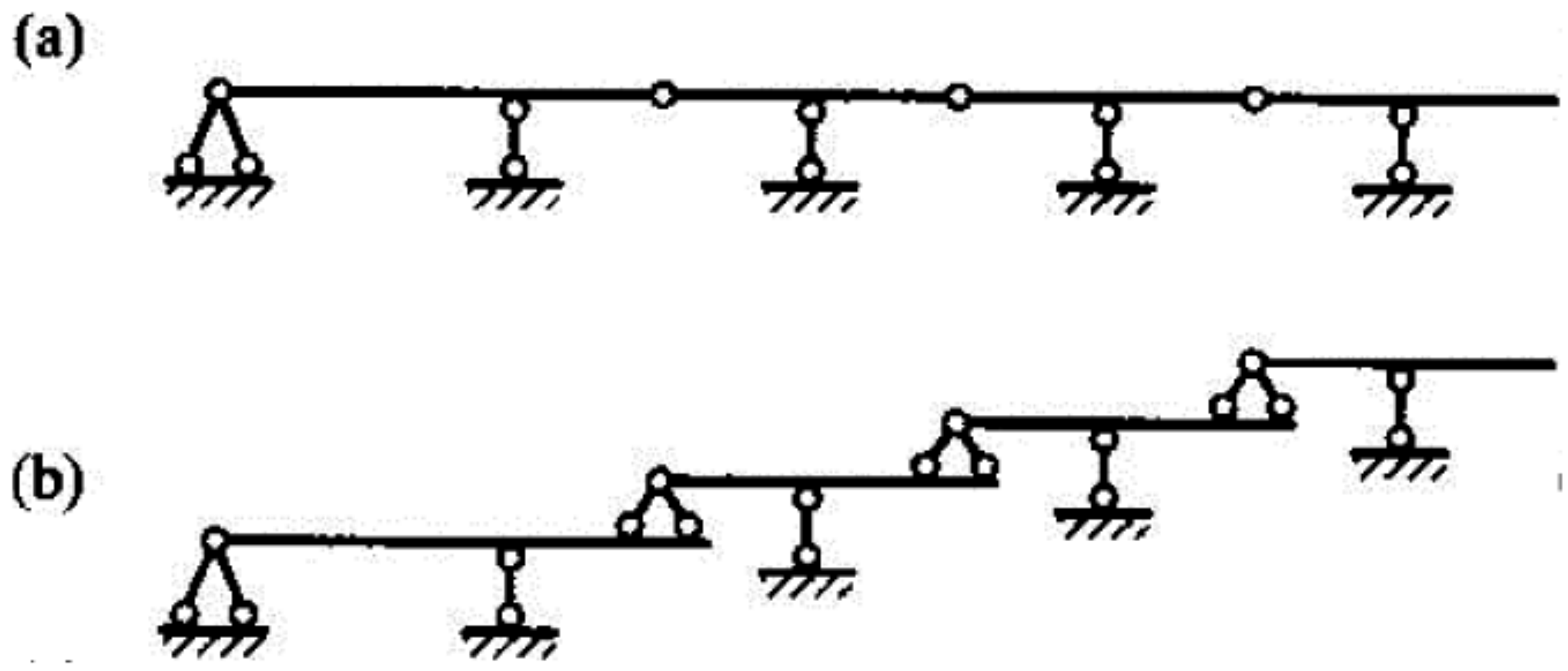


图 3-1-7

三、静定平面刚架

1．刚架的定义

刚架是指由直杆组成的具有刚结点的结构。

2．常见的型式

（1）悬臂刚架（如图 3-1-8 所示站台雨栅）；

（2）简支刚架（如图 3-1-9 所示渡槽的横向计算简图）；

（3）三铰刚架（如图 3-1-10 所示门式刚架）。

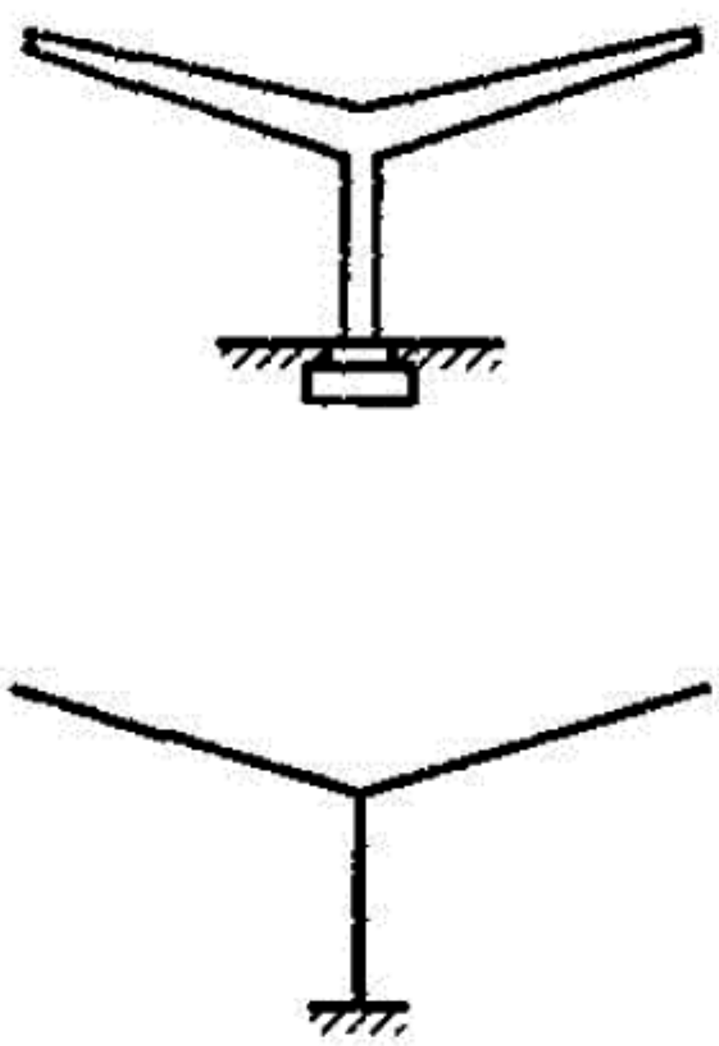


图 3-1-8

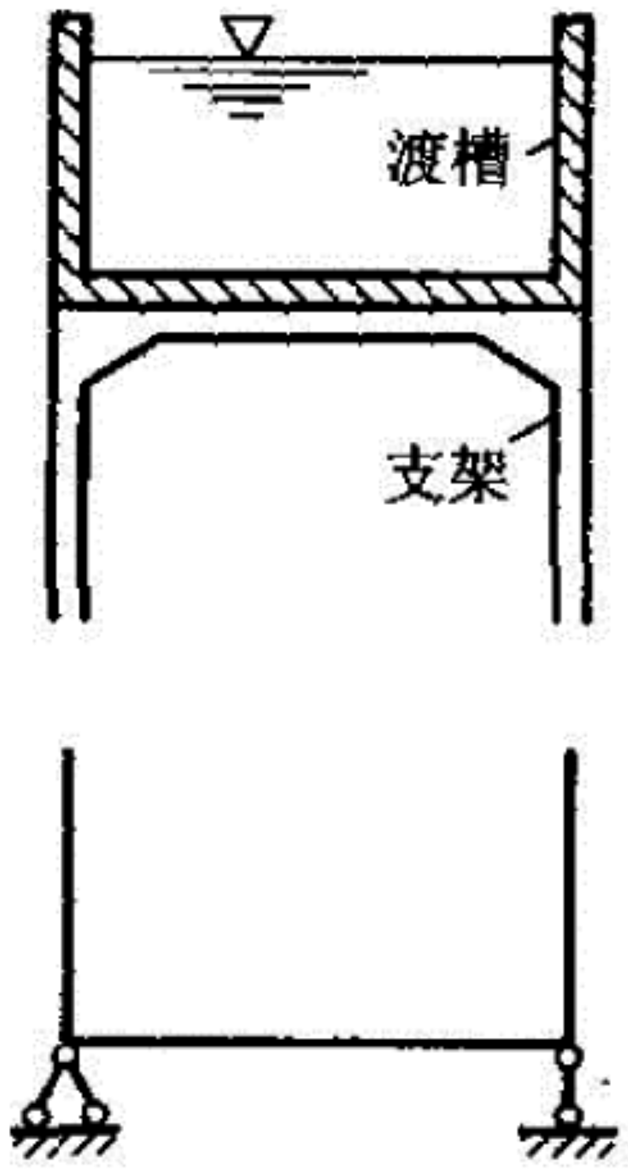


图 3-1-9

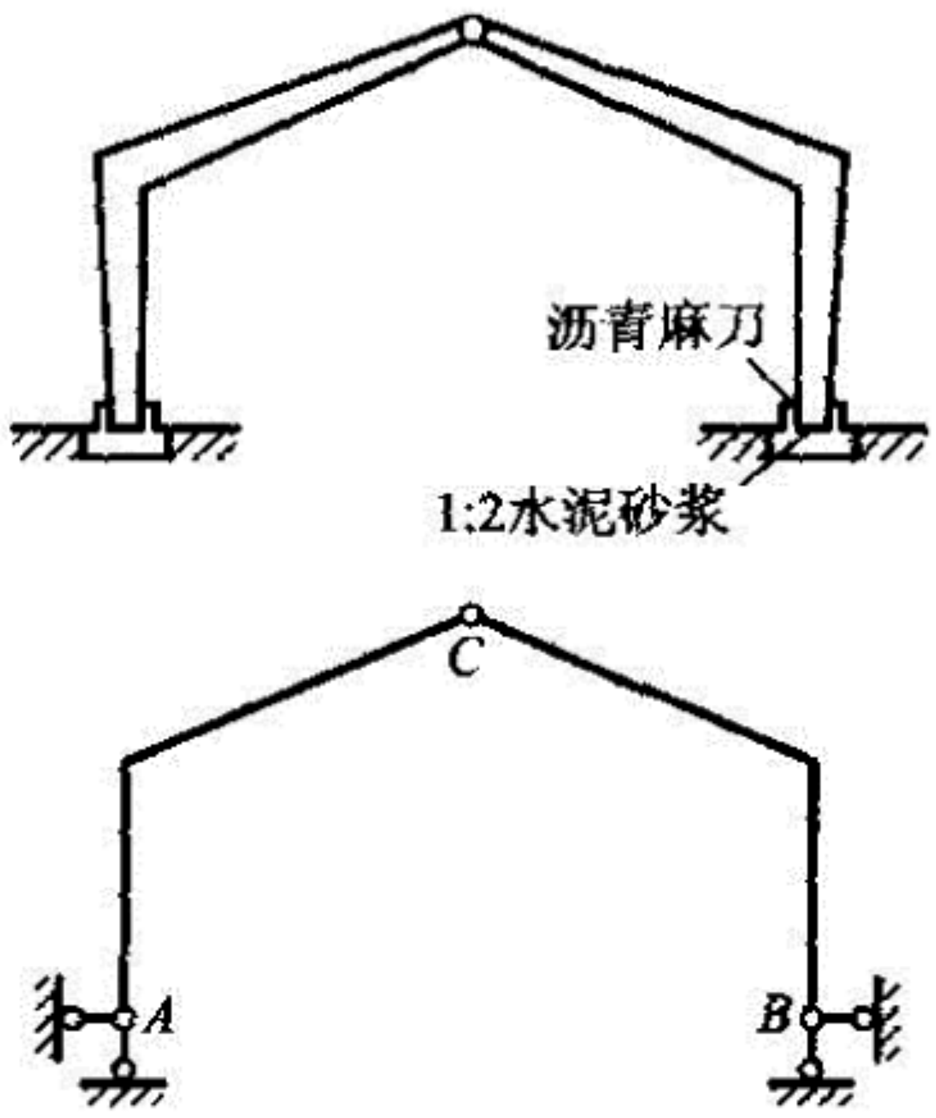


图 3-1-10

3．支座反力计算

（1）当刚架与地基系按两刚片规则组成时

支座反力只有三个，容易求得。

（2）当刚架与地基系按三刚片规则组成时

支座反力有四个，除考虑结构整体的三个平衡方程外，还需再取刚架的左半部（或右半部，一般取外荷载较少部分）为隔离体建立一个平衡方程（通常是$\sum M_C=0$）。方可求出全部反力。

（3）当刚架系由基本部分与附属部分组成时

遵循先附属部分后基本部分的计算顺序。

4．内力计算

（1）刚架的内力种类

①弯矩；

②剪力；

③轴力。

（2）计算步骤

逐杆按照分段、定点、连线的步骤绘制内力图。

（3）内力图

①弯矩通常规定使刚架内侧受拉者为正，弯矩图绘在杆件受拉边而不注正负号。

②剪力和轴力正负号规定与梁相同，剪力图和轴力图可绘在杆件的任一侧但必须注明正负号。

（4）内力符号脚标
①第一个表示内力所属截面；
②第二个表示该截面所属杆件的另一端。
如 M_{AB} 表示 AB 杆 A 端截面的弯矩，F_{SAC} 则表示 AC 杆 A 端截面的剪力，等等。

5．刚架弯矩图绘制技巧

（1）结构上若有悬臂部分及简支梁部分（含两端铰接直杆承受横向荷载）
该部分弯矩图可先绘出。
（2）充分利用弯矩图的形状特征
①直杆的无荷区段弯矩图为直线和铰处弯矩为零；
②刚结点的力矩平衡条件；
③外力与杆轴重合时不产生弯矩；
④外力与杆轴平行及外力偶产生的弯矩为常数。
（3）对称性的利用
（4）区段叠加法作弯矩图

四、静定结构的特性

1．静力解答的唯一性

对于静定结构，在任何给定荷载下，满足平衡条件的反力和内力的解答只有一种，而且是有限的数值。

2．除荷载外其他任何因素均不引起静定结构的内力

在静定结构中，除荷载外，其他任何原因如温度改变、支座位移、材料收缩、制造误差等均不引起内力。

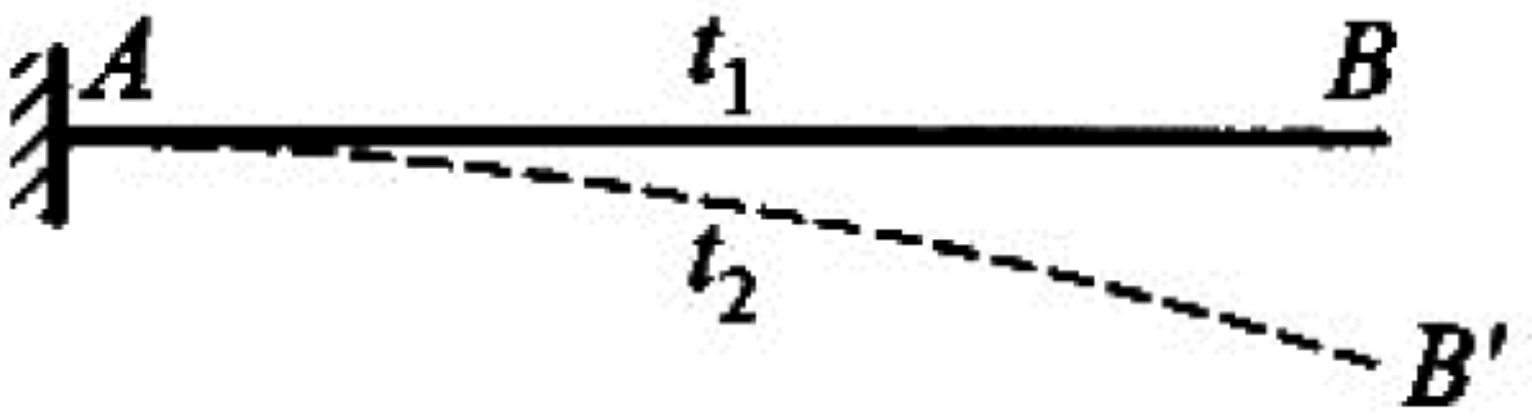


图 3-1-11

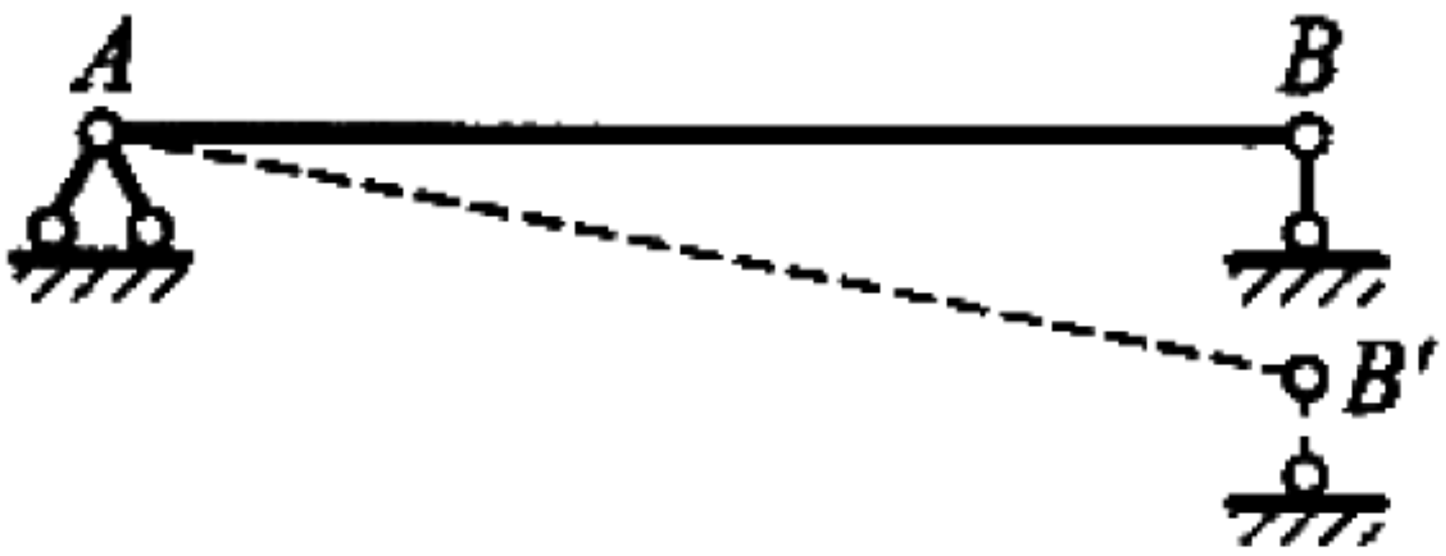


图 3-1-12

3．平衡力系的影响

当由平衡力系组成的荷载作用于静定结构的某一本身为几何不变的部分上时，则只有此部分受力，其余部分的反力和内力均为零。

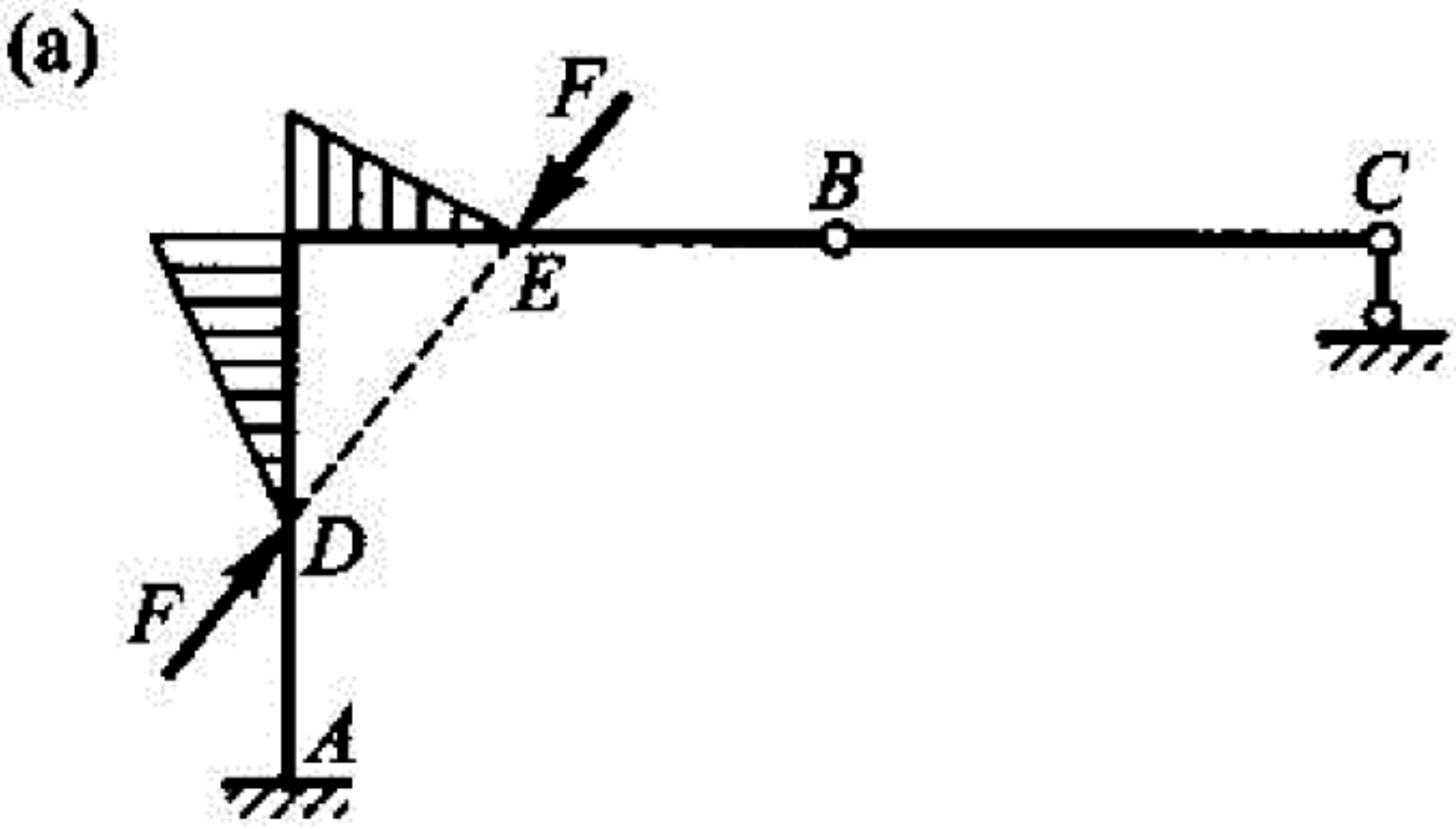


图 3-1-13

4．荷载等效变换的影响

（1）静力等效载荷

静力等效荷载是指合力相同（即主矢及对同一点的主矩均相等）的各种荷载。

（2）等效变换

等效变换是指将一种荷载变换为另一种静力等效的荷载。

（3）等效变换的影响

等效变换是指将一种荷载变换为另一种静力等效的荷载。当作用在静定结构的某一本身几何不变部分上的荷载在该部分范围内作等效变换时，则只有该部分的内力发生变化，而其余部分的内力保持不变。

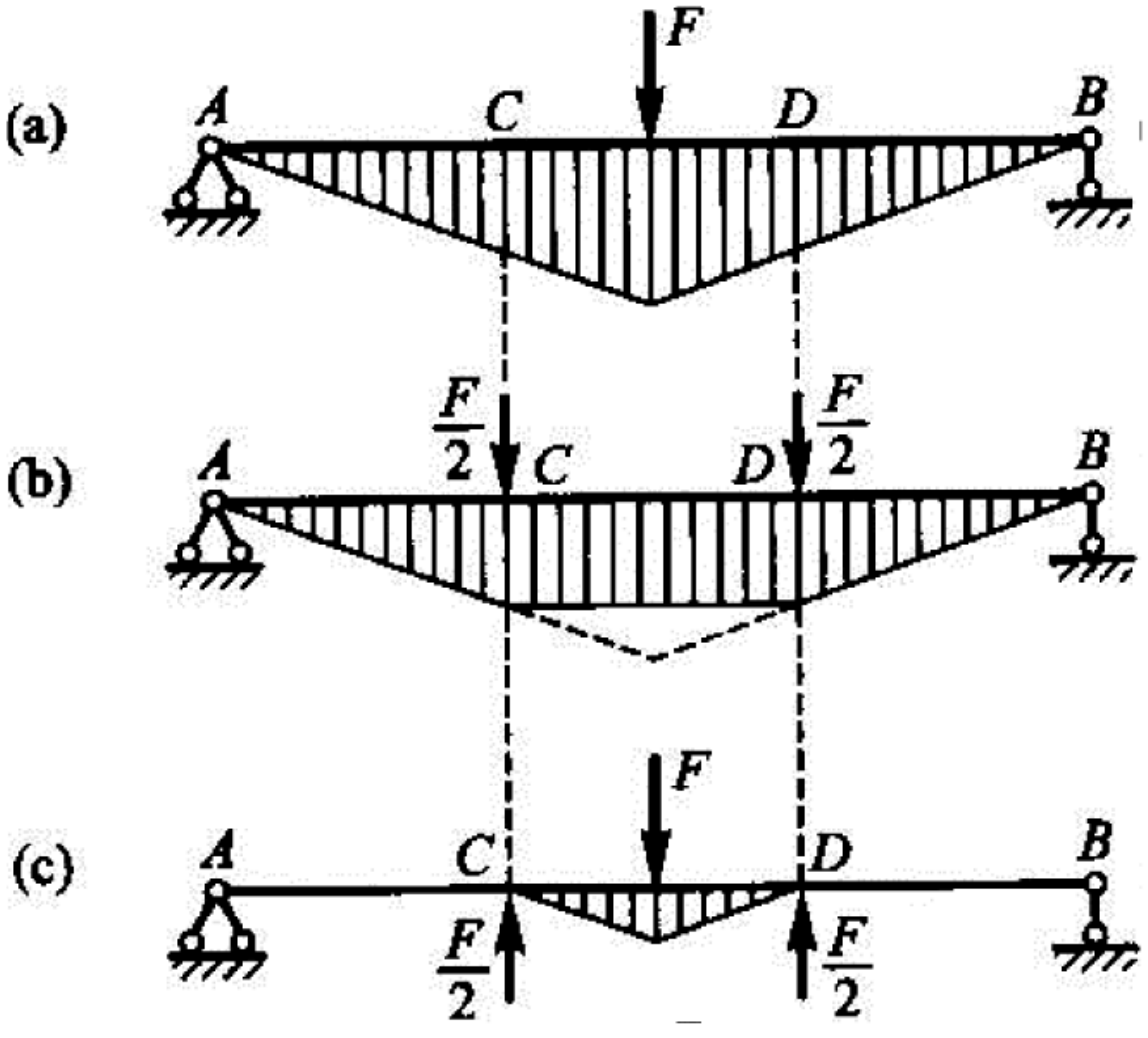


图 3-1-14

五、静定空间刚架

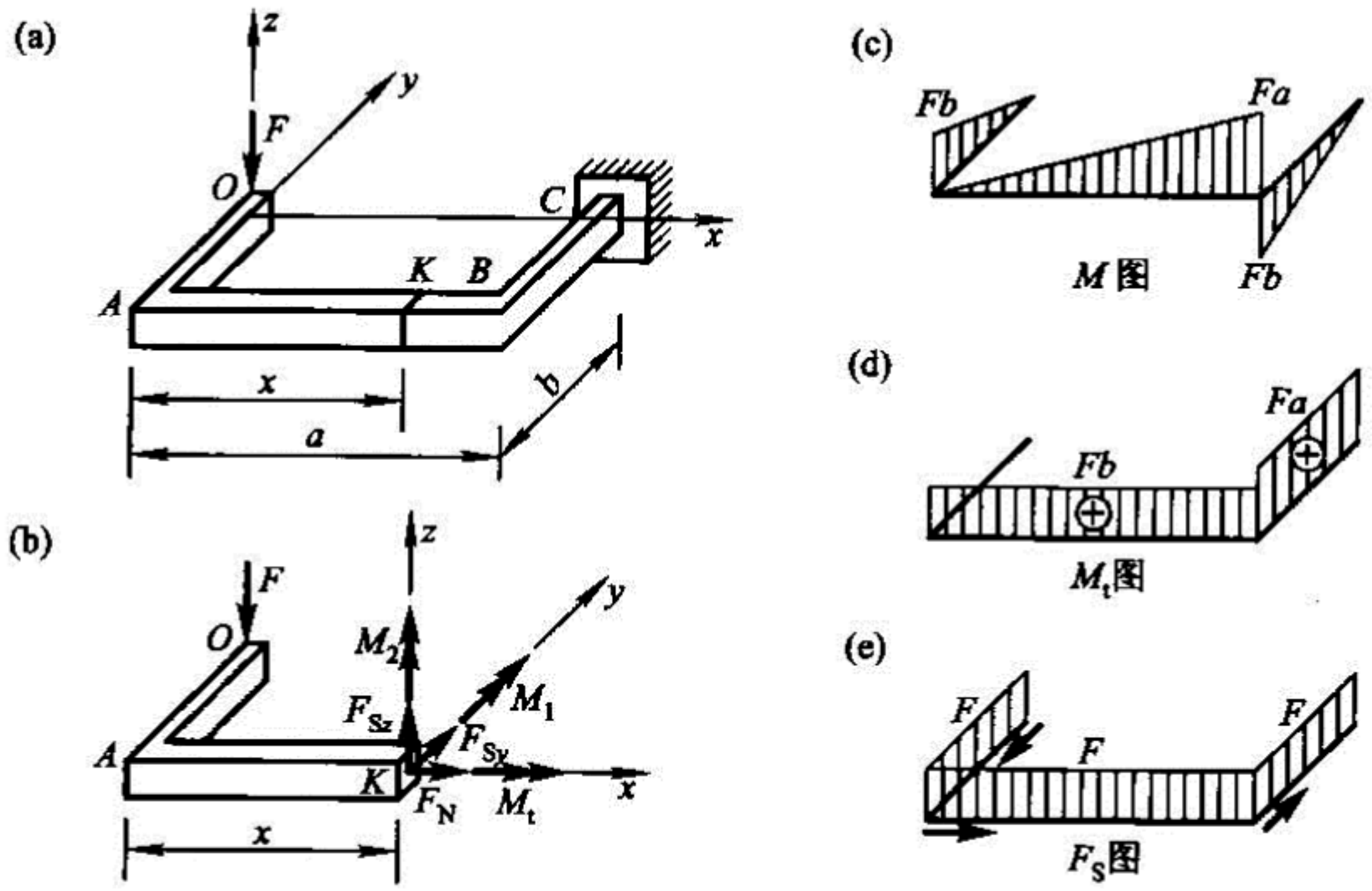


图 3-1-15

1．空间刚架横截面内力

（1）轴力 F_N（沿杆轴线方向）；

（2）剪力 F_{Sy} 和 F_{Sx}（分别沿横截面的两个形心主轴方向）；

（3）弯矩 M_1 和 M_2（分别绕两形心主轴旋转的力偶）；

（4）以及扭矩 M_t（绕杆轴线旋转的力偶）。

力偶都按右手螺旋法则用双箭头矢量表示。

2．内力的正负

（1）轴力以拉力为正，轴力图可绘在杆件的任一侧，但需注明正负号。

（2）扭矩以双箭头矢量与截面的外法线指向一致为正，扭矩图可绘在杆件的任一侧，但需注明正负号。

（3）弯矩在计算时可规定使杆件的任一侧纤维受拉为正，弯矩图上则不注正负号而规定绘在杆件受拉一侧。

（4）剪力正负

①先规定杆轴线的正方向（例如 AB 杆可规定由 A 向 B 为正方向）；

②并规定外法线与此正方向一致的截面为正面，外法线与正方向相反的截面为负面（或反面）；

③再规定正面上的剪力指向某一侧为正（例如图 3-1-15（b）中的截面为正面，可规定 F_{Sx} 向上为正，F_{Sy} 向内为正）。

至于剪力图，可不注正负号，而将其绘在正面上的剪力所指向的一侧，同时标明杆轴线的正方向。

3．内力计算

计算静定空间刚架内力的基本方法仍是截面法，即取截面一边为隔离体，由所建立的六个平衡方程来求截面上的六个内力分量。

$$\sum F_x = 0,$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$\sum M_{Kz} = 0,$$

$$\sum M_{Ky} = 0,$$

$$\sum M_{Kx} = 0,$$

$$\sum F_z = 0,$$

4．内力图绘制

（1）作内力图时，可逐杆写出内力方程，再根据方程作图。

（2）不写内力方程而采用分段、定点、连线的方法来作内力图。

3.2　课后习题详解

复习思考题

1．用叠加法作弯矩图时，为什么是竖标的叠加，而不是图形的拼合？

答：因为有时叠加弯矩图时的基线与杆轴不重合，如果用图形拼合，不能完全保证叠加后弯矩值是实际同一点的两个弯矩相加后的值。

2．为什么直杆上任一区段的弯矩图都可以用简支梁叠加法来作？其步骤如何？

答：（1）因为根据内力分析可以求出直杆任一区段两端的内力，所以直杆任一区段两端均可以看成两端有外力（集中力或集中力偶）的简支梁。

（2）设有直杆任一区段简支梁 AB，具体步骤如下

①分解作用区段 AB 上的荷载；

②分别作出分解荷载下的弯矩图；

③求解出区段 AB 两端的弯矩 M_A 和 M_B；

④将两端弯矩 M_A 和 M_B 绘出并连以直线（虚线）；

⑤以步骤④中的虚线为基线叠加各个分解荷载下的弯矩图（竖标叠加），得最终弯矩图。

3．试判断图 3-2-1 所示刚架中截面 A、B、C 的弯矩受拉边和剪力、轴力的正负号。

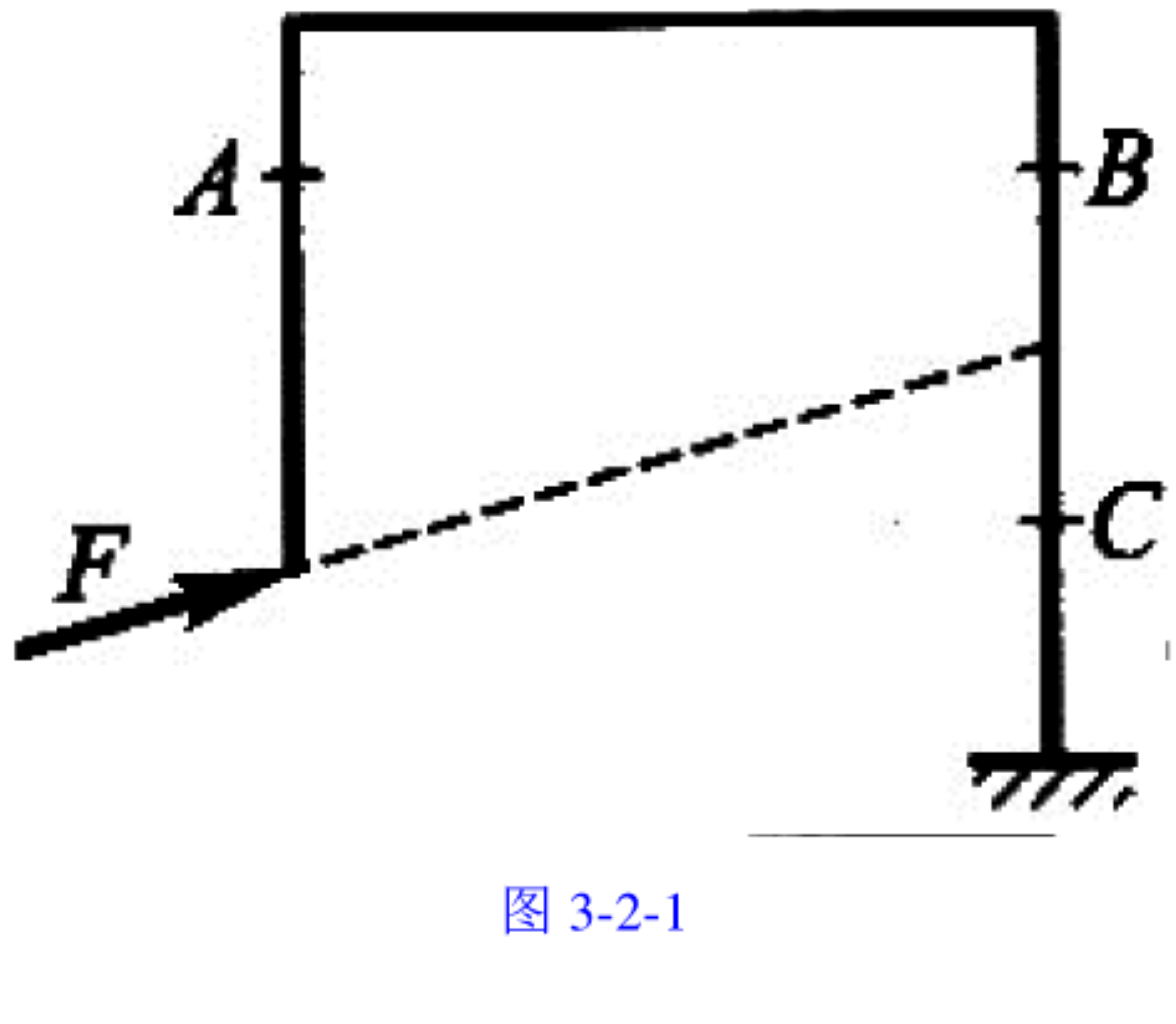


图 3-2-1

答：轴力以受压为负，受拉为正；剪力以使截面顺时针旋转为正。

（1）截面 A：左边受拉，剪力为负，轴力为负；

（2）截面 B：右边受拉，剪力为正，轴力为正；

（3）截面 C：左边受拉，剪力为正，轴力为正。

4．怎样根据静定结构的几何构造情况（与地基按两刚片、三刚片规则组成，或具有基本部分与附属部分等）来确定计算反力的顺序和方法？

答：（1）与地基按两刚片，例如简支梁，支座反力只有三个，对某一端点取矩直接解除约束反力。

（2）与地基按三刚片规则组成，例如三铰刚架，支座反力有四个，考虑结构整体的三个平衡方程外，还需再取刚架的左半部（或右半部，一般取外荷载较少部分）为隔离体建立一个平衡方程方可求出全部反力。

（3）具有基本部分与附属部分时，按先附属后基本的计算顺序，求解支座反力。

5．当不求或少求反力而迅速作出弯矩图时，有哪些规律可以利用？

答：当不求或少求反力而迅速作出弯矩图时，如下规律可以利用

（1）结构上若有悬臂部分及简支梁部分（含两端铰接直杆承受横向荷载）弯矩图可先行绘制出；

（2）直杆的无荷区段弯矩图为直线和铰处弯矩为零；

（3）刚结点的力矩平衡条件；

（4）外力与杆轴重合时不产生弯矩；

（5）外力与杆轴平行及外力偶产生的弯矩为常数；

（6）对称性的合理利用；

（7）区段叠加法作弯矩图。

6．怎样根据弯矩图来作剪力图？又怎样进而作出轴力图及求出支座反力？

答：（1）取出一段杆（包括杆端内力和杆上的所有外力），根据弯矩图，进行受力分析，根据向端点取矩平衡，可以计算出任一区段端部的剪力。

（2）对结点进行受力分析，根据剪力图和平衡条件，可以计算出轴力；同理，对于支座点进行受力分析，得出支座反力。

7．为什么对于静定结构可以说：没有荷载就没有内力？

答：因为在静定结构中，除荷载外，其他任何非荷载原因，如温度改变、支座位移、材料收缩、制造误差等均不引起内力。因此，对于静定结构可以说没有荷载就没有内力。

8．静定结构的内力和反力与杆件的刚度是否有关？

答：静定结构的内力和反力与杆件自身刚度无关，只与外部施加的荷载有关。

习题

3-1～3-2　试作图示单跨梁的 M 图和 F_S 图。

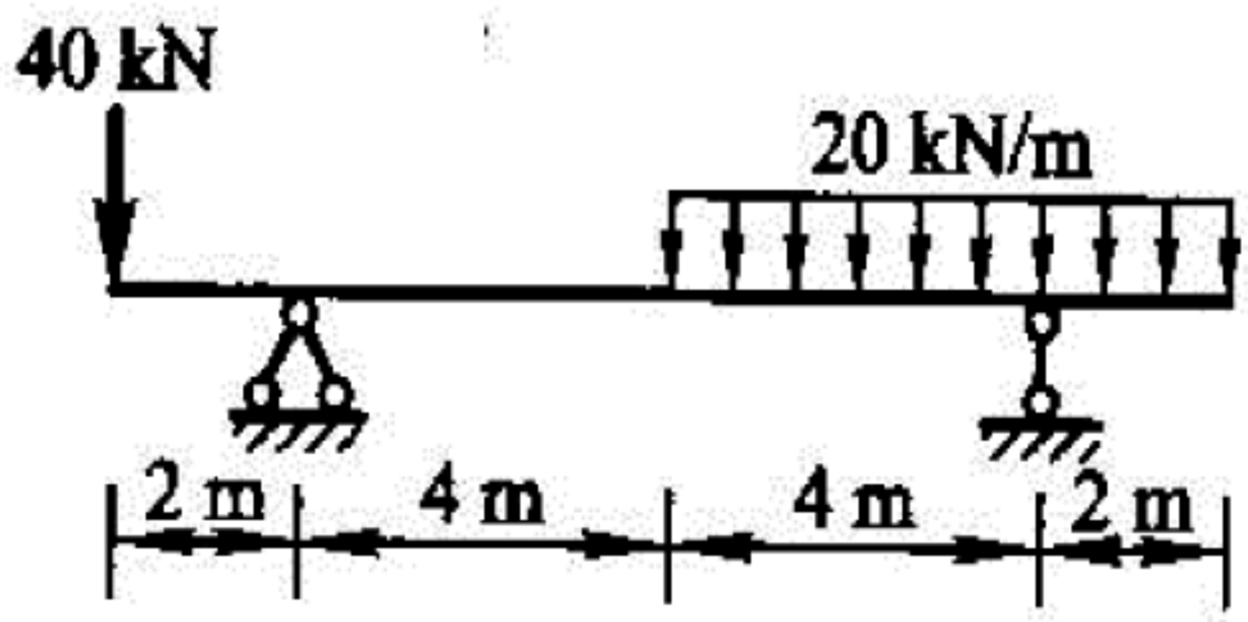


图 3-2-2（题 3-1）

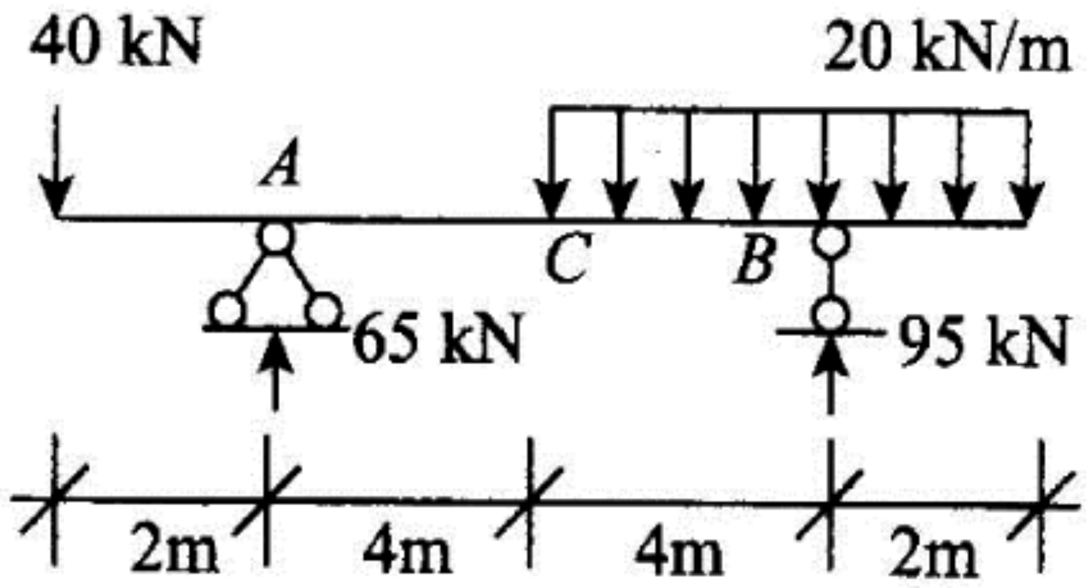


图 3-2-3（题 3-1 解图）

3-1　解：先计算支座反力，取全梁为隔离体，由$\sum M_A=0$，有

$$F_B\times 8+40\times 2-20\times 6\times 7=0$$

得

$$F_B=95kN（\uparrow）$$

再由$\sum F_y=0$，可得

$$F_A=40+20\times 6-95=65kN（\uparrow）$$

绘制剪力图时，用截面法算出各控制截面的剪力值，即

$$F_{SA左}=-40kN,F_{SA右}=65-40=25\ kN$$

$$F_{B右}=20\times 2=40\ kN,F_{B左}=40-95=-55\ kN$$

绘制弯矩图时，用截面法算出下列各控制点的弯矩值，即

$$M_A=40\times 2=80\ kN\cdot m,M_B=20\times 2\times 1=40\ kN\cdot m$$

$$M_C=40\times 6-65\times 4=-20\ kN\cdot m$$

画出此单跨梁的 M 图和 F_s 图，如图 3-2-3 所示。

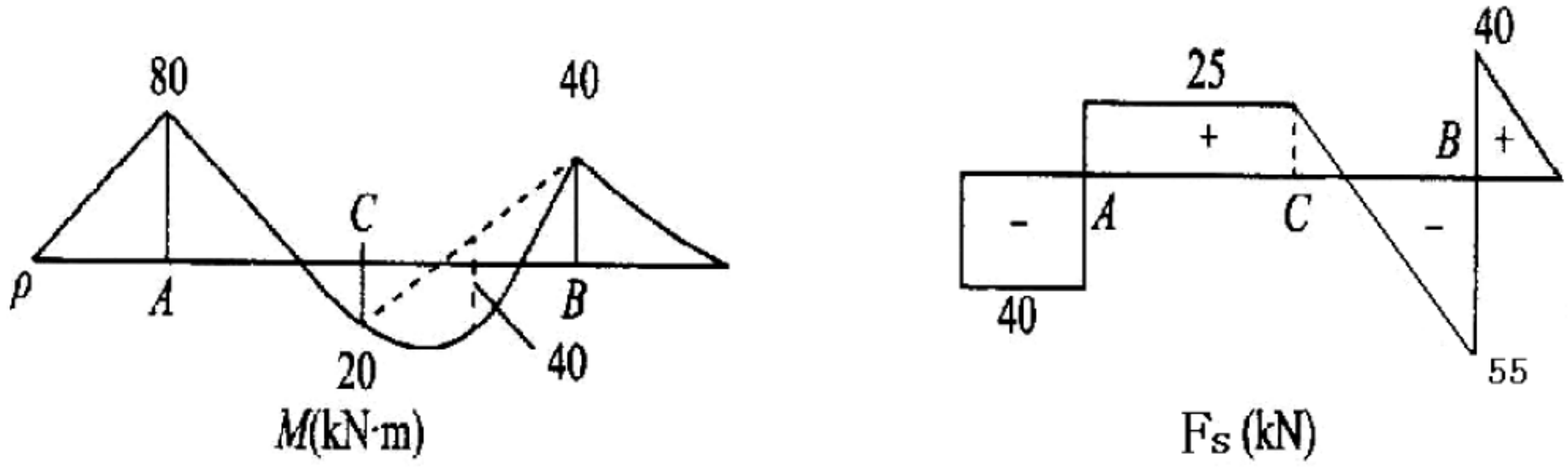


图 3-2-4

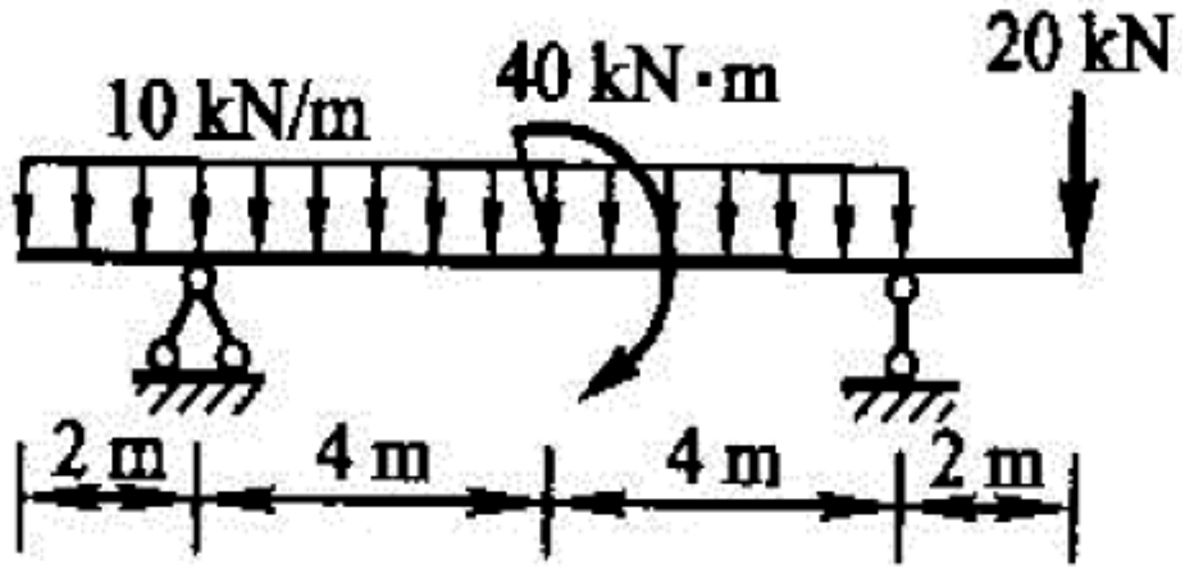


图 3-2-5（题 3-2）

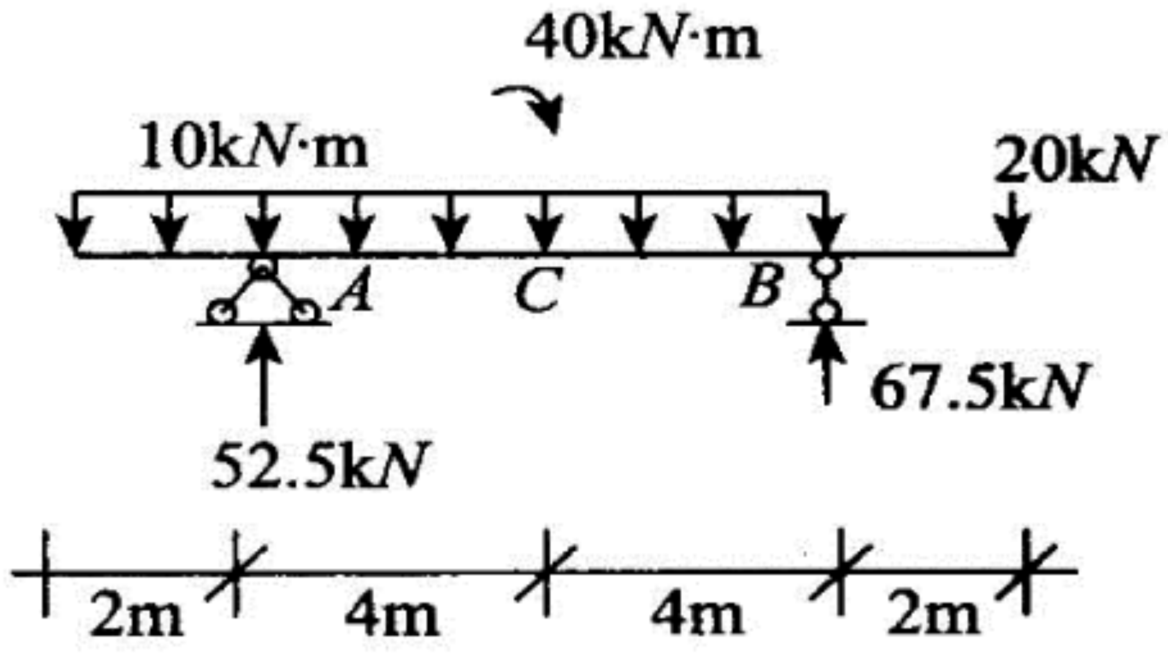


图 3-2-6（题 3-2 解图）

3-2　解：首先，计算支座反力，取全梁为隔离体，由$\Sigma M_A=0$，有

$$F_B\times8-20\times10-40-10\times10\times3=0$$

解得

$$F_B=67.5kN$$

由$\Sigma F_A=0$，得

$$F_A=10\times10+20-67.5=52.5kN$$

绘制剪力图时，用截面法算出各截面的剪力值，即

$$F_{A左}=-10\times2=-20\ kN$$

$$F_{A右}=52.5-20=32.5\ kN$$

$$F_{B右}=20\ kN$$

$$F_{B左}=20-67.5=-47.5\ kN$$

算出各控制点的弯矩值

$$M_A=10\times2\times1=20kN\cdot m$$

$$M_B=20\times2=40kN\cdot m$$

$$M_{c左}=30kN\cdot m$$

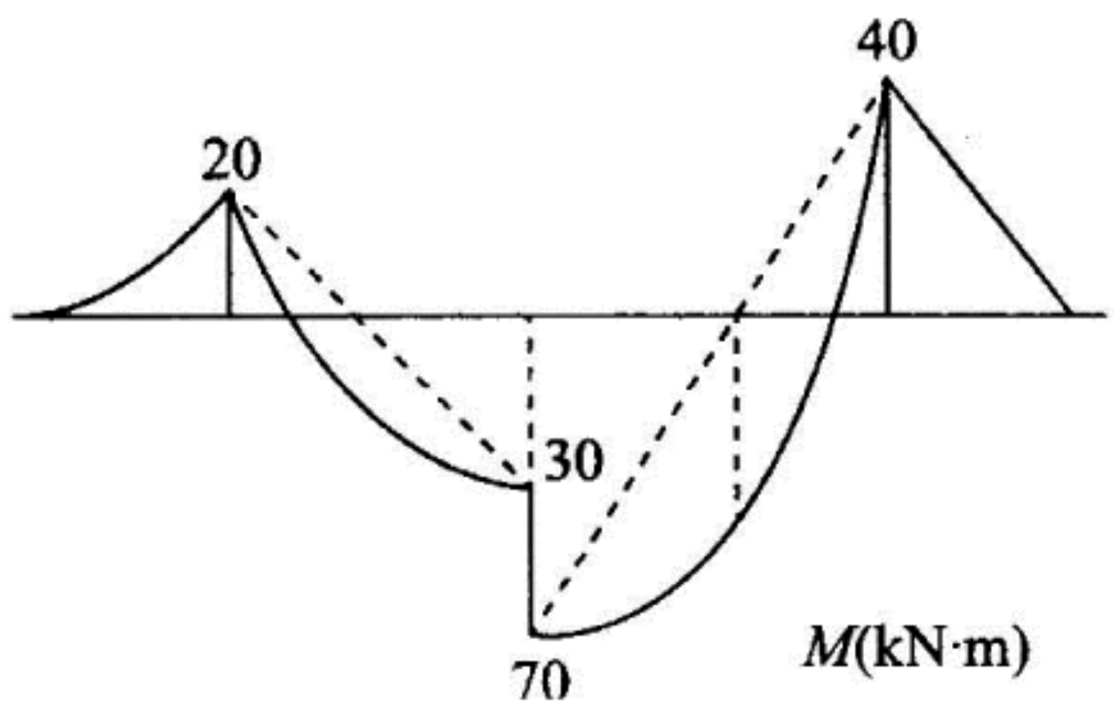


图 3-2-7

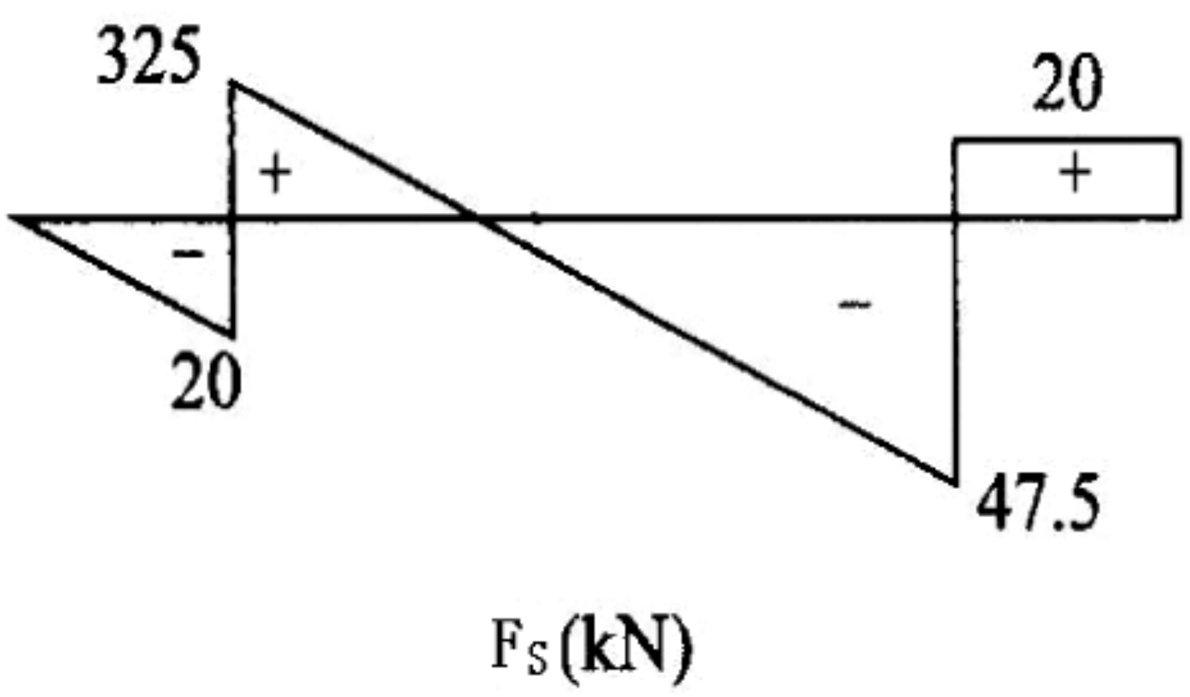


图 3-2-8

3-3～3-4　试作图示单跨梁的 M 图。

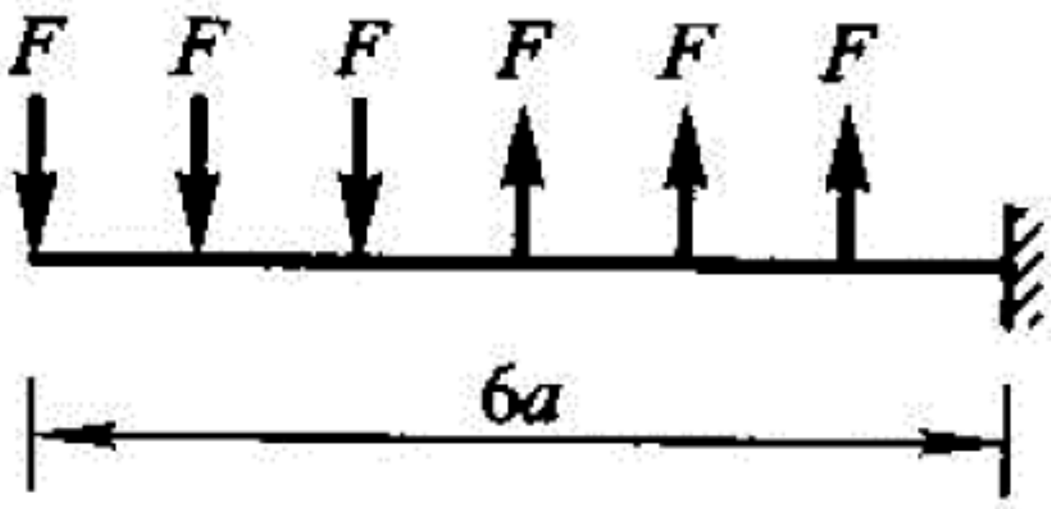


图 3-2-9（题 3-3）

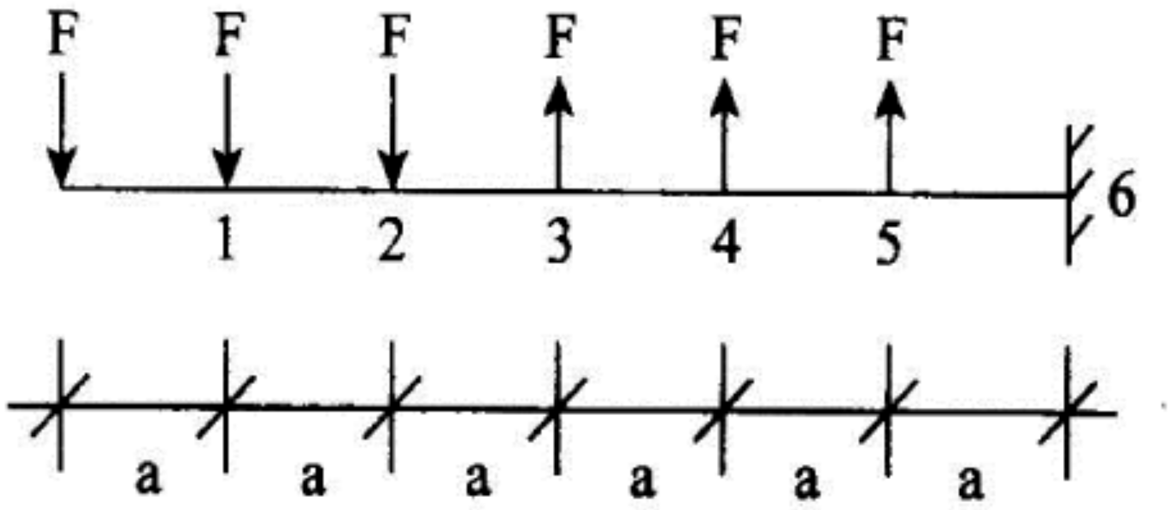


图 3-2-10（题 3-3 解图）

3-3　解：截面法计算出各截面的弯矩值

$M_1 = -F \cdot a = -Fa$

$M_2 = -F \cdot 2a - Fa = -3Fa$

$M_3 = -F \cdot 3a - F \cdot 2a - F \cdot a = -6Fa$

$M_4 = -F \cdot 4a - F \cdot 3a - F \cdot 2a + F \cdot a = -8Fa$

$M_5 = -F \cdot 5a - F \cdot 4a - F \cdot 3a + F \cdot 2a + F \cdot a = -9Fa$

$M_6 = -F \cdot 6a - F \cdot 5a - F \cdot 4a + F \cdot 3a + F \cdot 2a + F \cdot a = -9Fa$

故弯矩图如下图 3-2-11 所示。

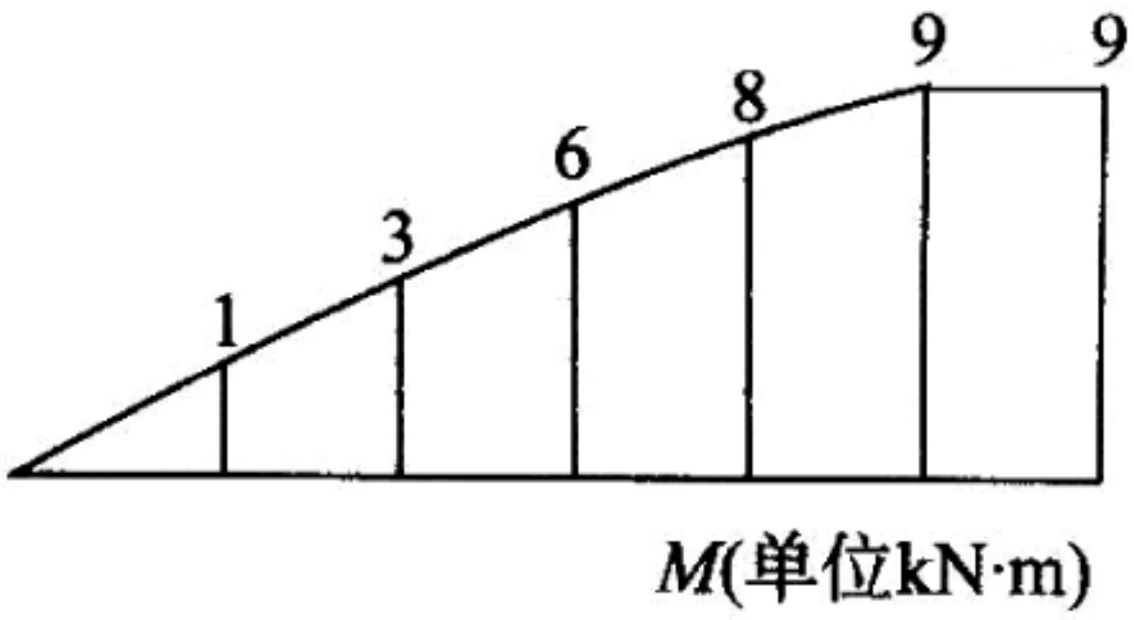


图 3-2-11

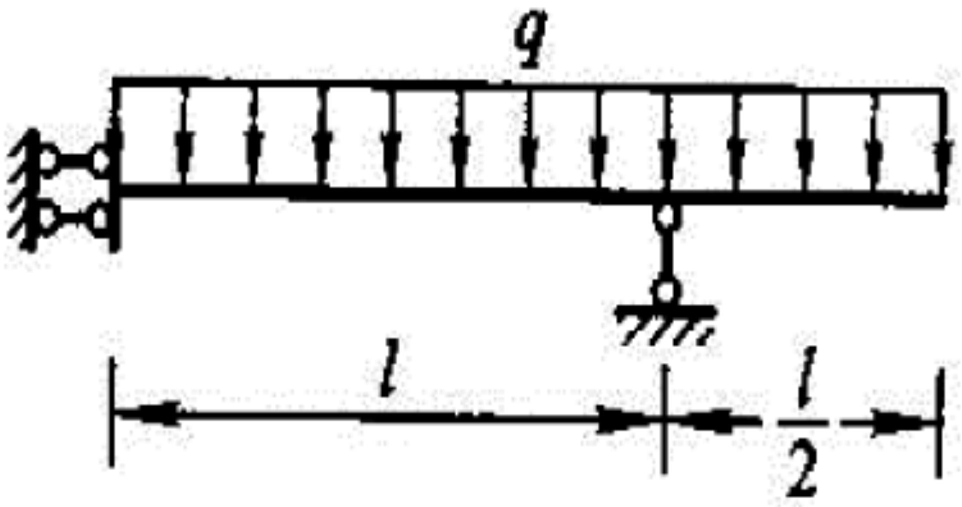


图 3-2-12（题 3-4）

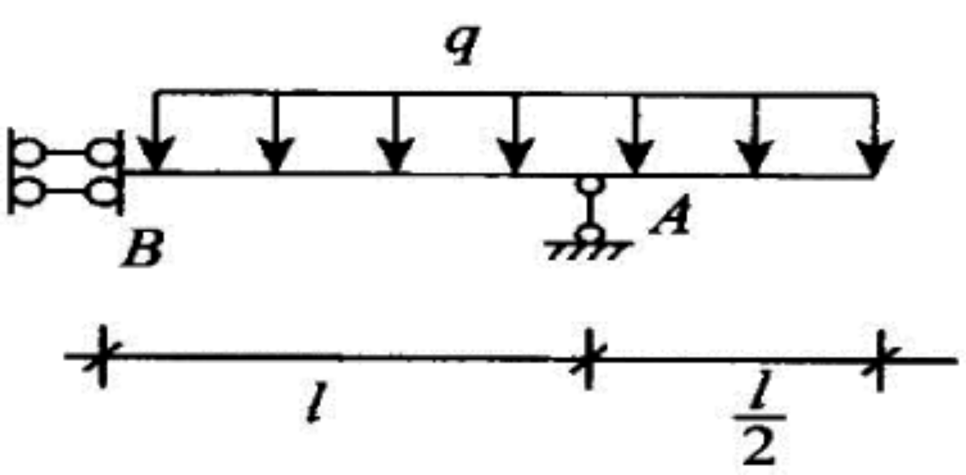


图 3-2-13（题 3-4 解图）

3-4　解：首先，计算支座反力

$$F_A=\frac{3ql}{2}\ (\uparrow)$$

再计算

$$M_A=-q\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}=-\frac{ql^2}{8}$$

$$M_B=\frac{3ql}{2}\cdot l-q\cdot\frac{3l}{2}\cdot\frac{3l}{4}=\frac{3ql^2}{8}$$

可绘出弯矩图如图 3-2-14 所示。

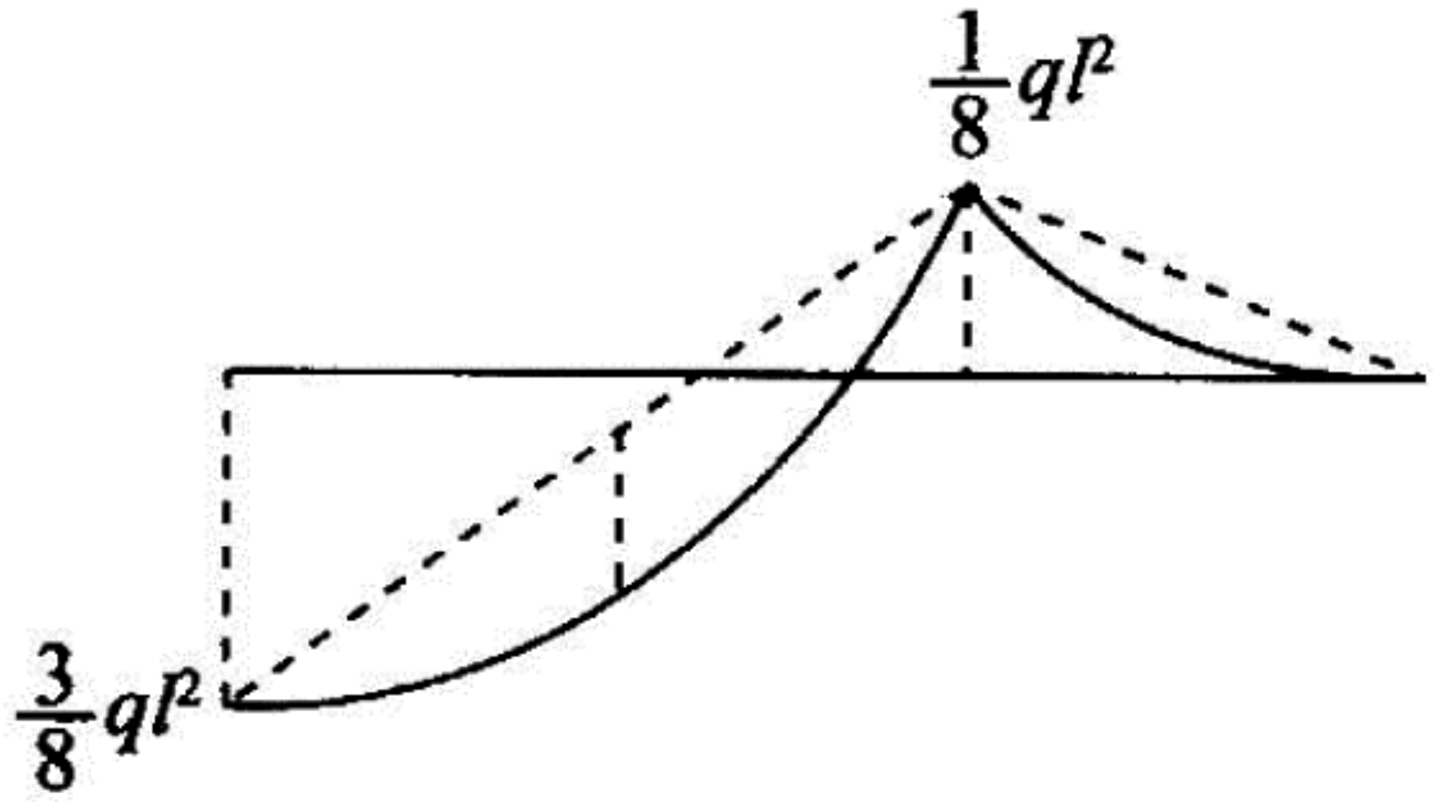


图 3-2-14（kN • m）

3-5　作斜梁的 M、F_S、F_N 图：(a) 竖向均布荷载沿水平方向的集度为 q（例如楼梯上作用的人群荷载）；(b) 竖向均布荷载沿杆轴线方向的集度为 q（例如杆件自重）。

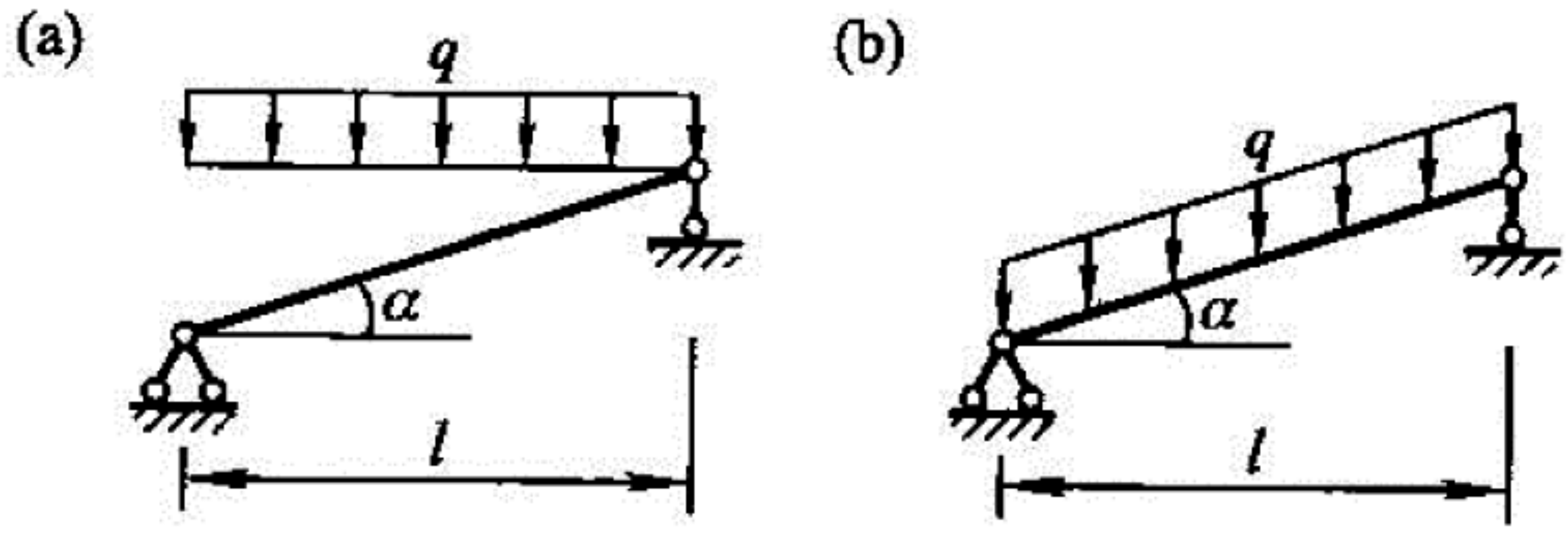


图 3-2-15（题 3-5）

解：对（a）图受力分析如图 3-2-16 所示。

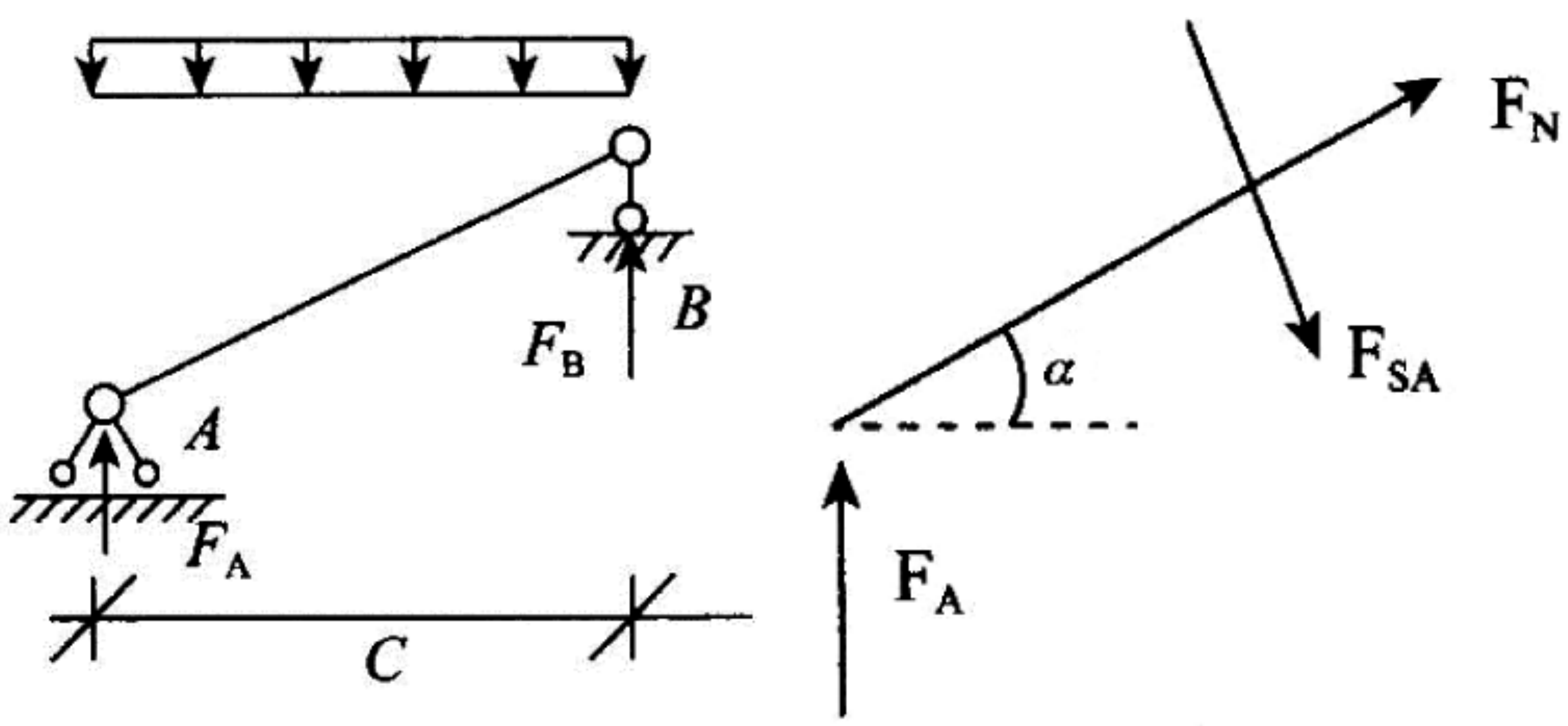


图 3-2-16（题 3-5（a）解图）

由平衡条件：$\sum M_A=0$，得

$$F_B \cdot l - q \times l \times \frac{l}{2} = 0$$

则

$$F_B = \frac{1}{2}ql$$

由$\sum F_y = 0$有

$$F_A = \frac{1}{2}ql$$

故

$$F_{SA} = F_A \cos\alpha = \frac{1}{2}ql\cos\alpha$$

$$F_{NA} = -F_A \sin\alpha = -\frac{1}{2}ql\sin\alpha$$

同理可求出

$$F_{SB} = -\frac{1}{2}ql\cos\alpha，\ F_{NB} = \frac{1}{2}ql\sin\alpha$$

可绘出图（a）的内力图如图 3-2-17 所示。

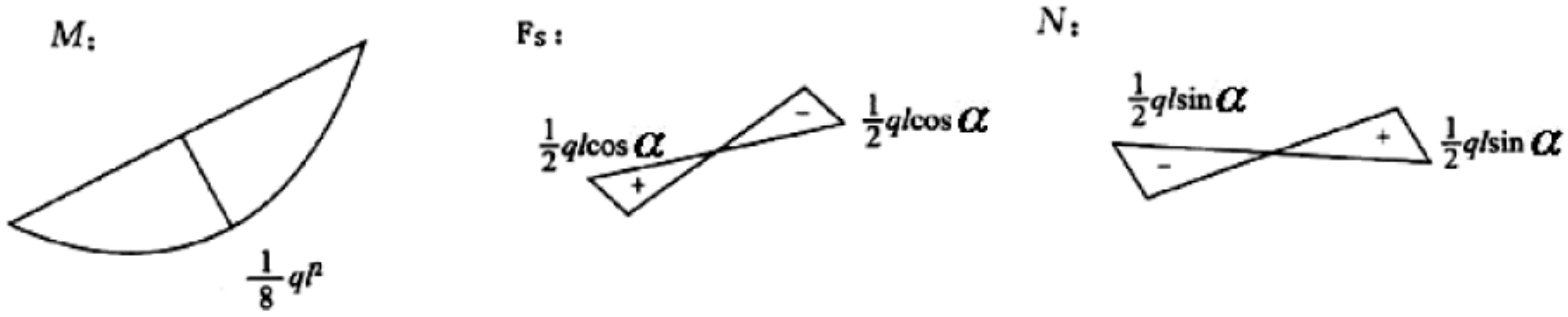


图 3-2-17

再做（b）图的 M、F_S、F_N图，将沿斜梁轴线的荷载 q 折算为沿水平方向的荷载集度 q_0。折算公式如下

$$q_0 dx = q ds, q_0 = \frac{q ds}{dx} = \frac{q}{\cos\alpha}$$

接下来，按（a）图所做过程计算即可，得出（b）图的内力图如图 3-2-18 所示。

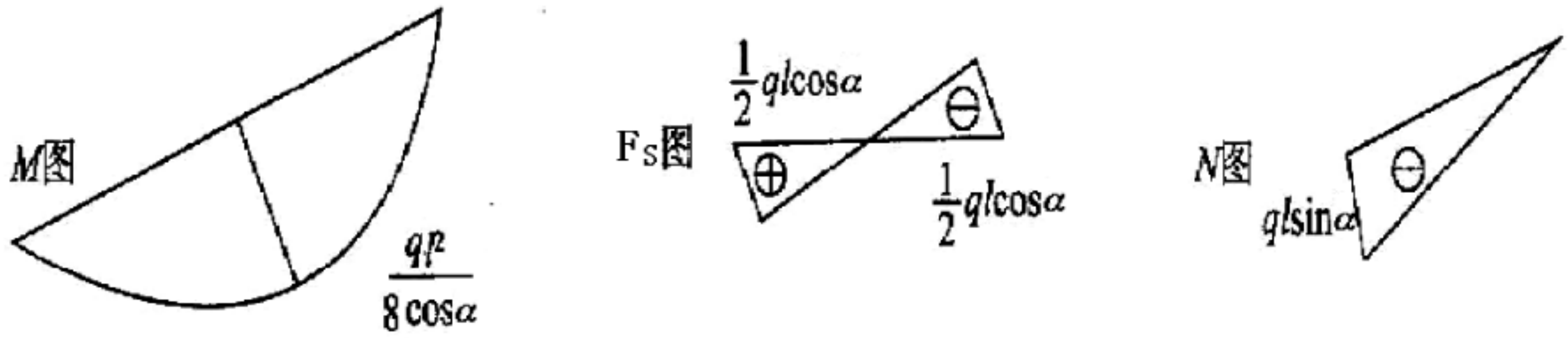


图 3-2-18

3-6　当支座链杆 B 的方向改变时，试讨论图示斜梁的内力变化情况。

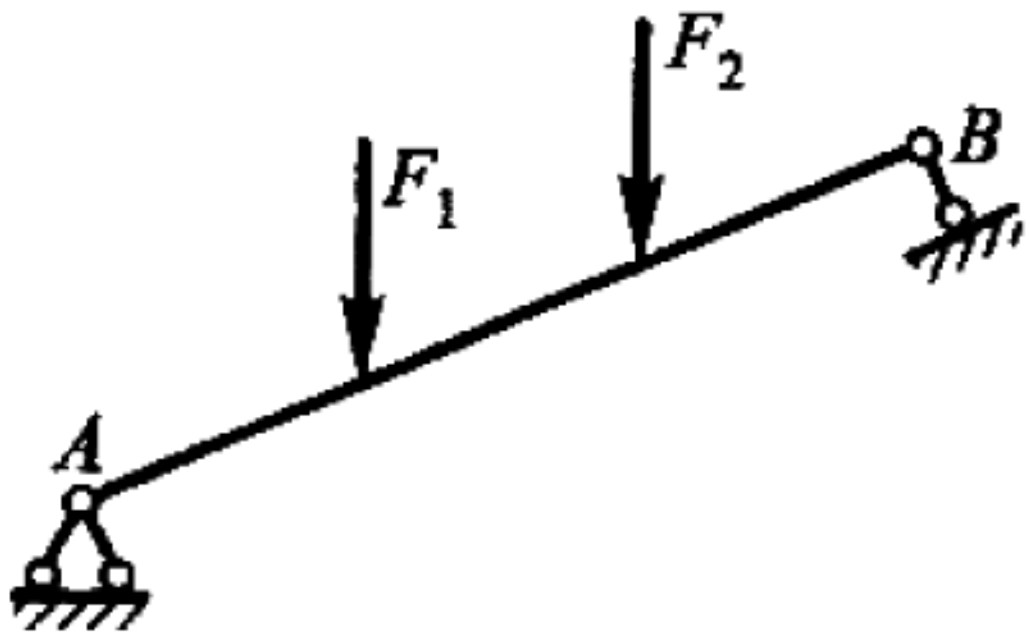


图 3-2-19（题 3-6）

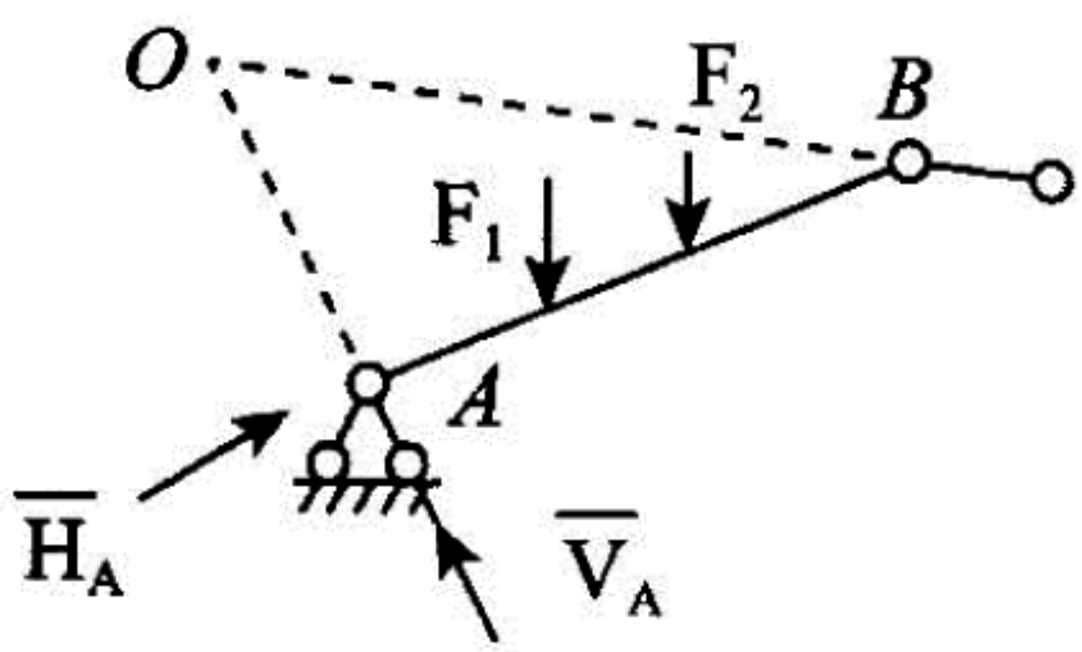


图 3-2-20（题 3-6 解图）

答：将支座 A 的反力沿杆轴方向和垂直于截面方向分解为$\overline{H}_A$ 和 $\overline{V}_A$，则不论杆 B 的方向如何改变，由$\sum M_B=0$ 知$\overline{V}_A$不变，故任一截面的弯矩、剪力不变（由该截面从左来计算）；但支座 B 方向改变时，O 的位置改变，由$\sum M_O=0$ 知 H_A 大小改变，所以各截面的轴力大小发生改变。

3-7　图示多跨静定梁承受左图和右图的荷载时（即集中力或集中力偶分别作用在铰左侧和右侧）弯矩图是否相同？

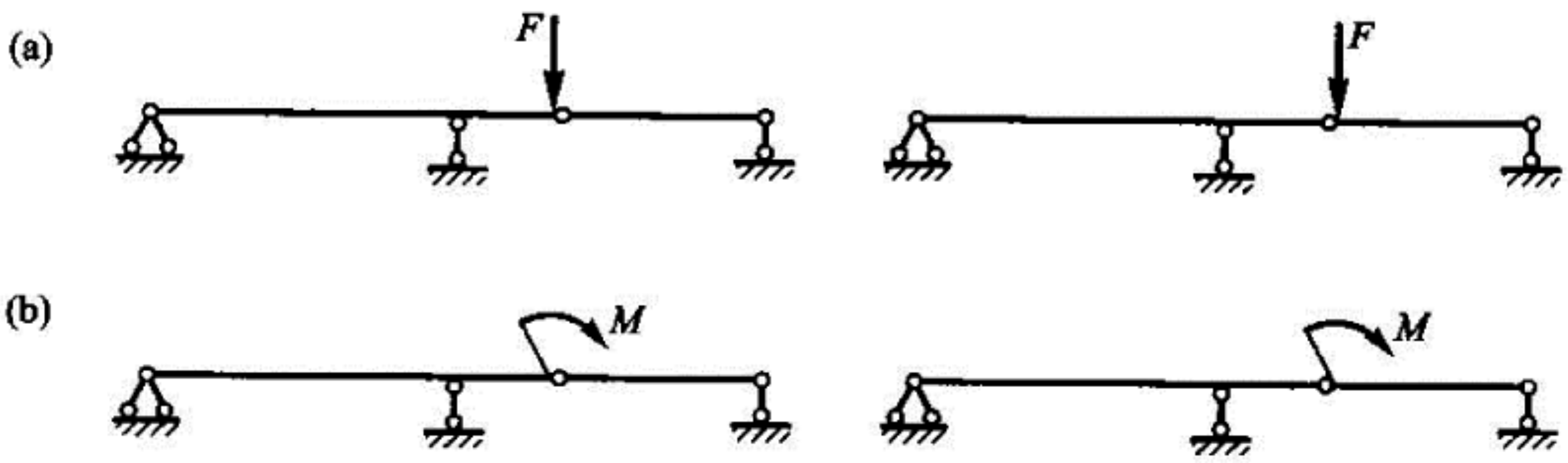


图 3-2-21（题 3-7）

答：（1）对于（a）图，右侧为附属结构对中间铰 O 取矩$\sum M_B=0$，可知两种情况右侧支座链杆反力 F=0，故两种情况弯矩相同，如图 3-2-22 所示。

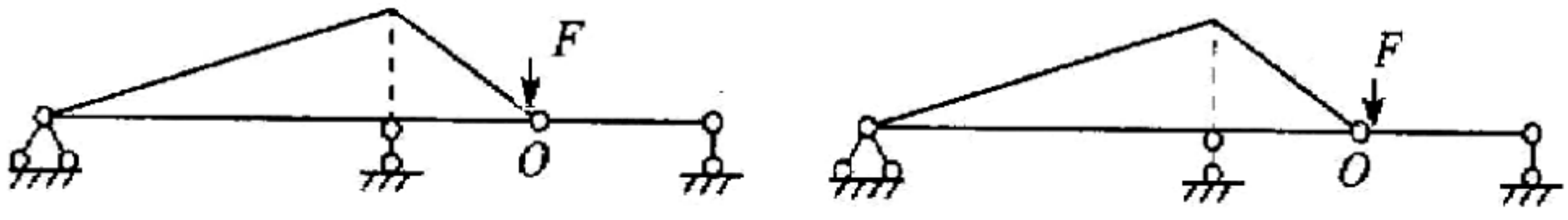


图 3-2-22

（2）对于（b）图，M 作用于左右两侧时情况不同，当作用在左侧时，右侧为附属结构，对中间铰取矩，右侧支座链杆反力为 0；对于右侧情况，对 O 点取矩，可知右侧支座链杆反力不为 0，故有弯矩。故两种情况下的弯矩图如图 3-2-23 所示。

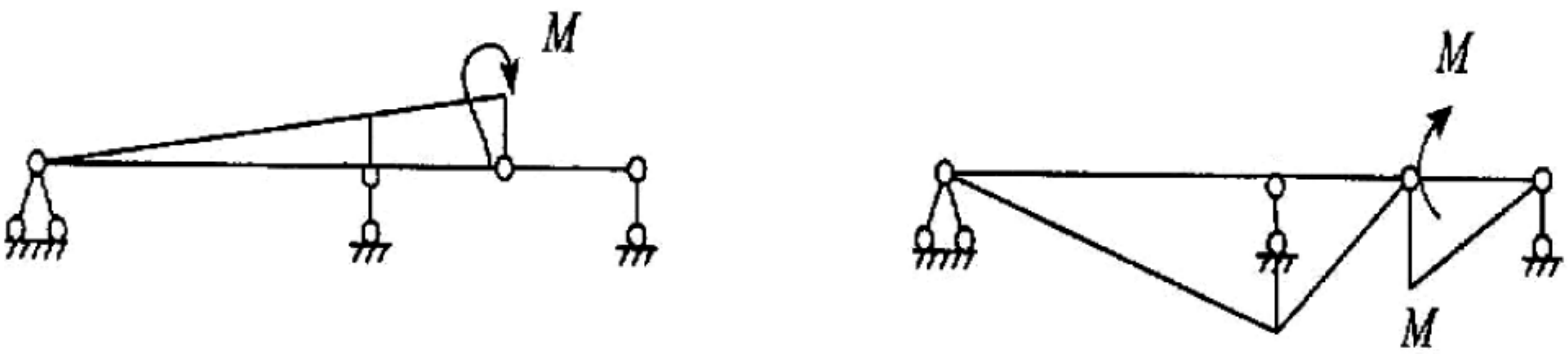


图 3-2-23

3-8　试作多跨静定梁的 M、F_S 图。

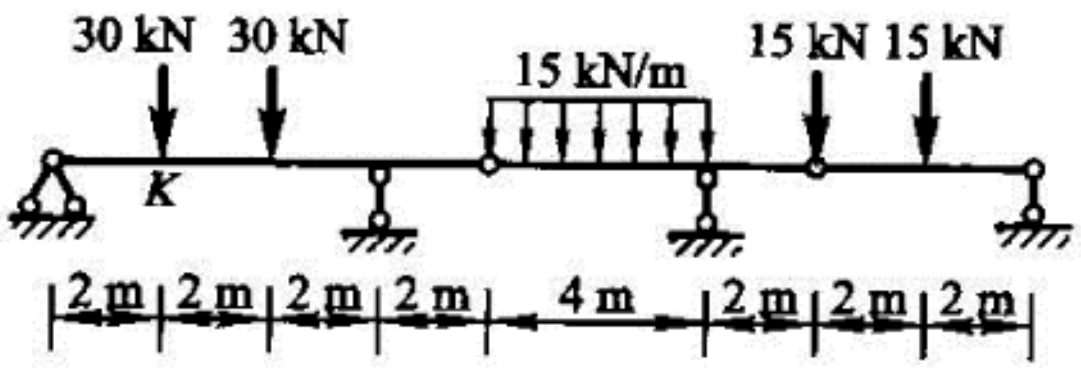


图 3-2-24（题 3-8）

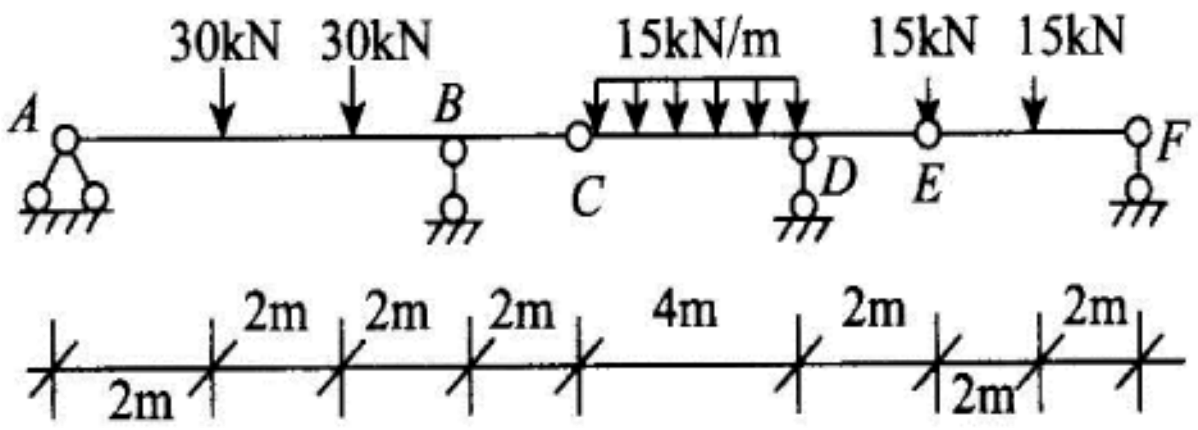


图 3-2-25（题 3-8 解图）

解：先计算附属结构剪力

$$\sum M_E=0, F_{Fy}\cdot 4-15\times 2=0, F_{Fy}=7.5\ \text{kN}$$

$$\sum M_C=0, F_{Fy}\cdot 10-15\times 8-15\times 6-15\times 4\times 2+F_{Dy}\cdot 4=0$$

$$\Rightarrow F_{Dy}=63.75\ \text{kN}$$

同理可以算得

$$F_{By}=55\ \text{kN}, F_{Ay}=23.75\ \text{kN}$$

再计算各个点弯矩

$$M_B=F_{Ay}\cdot 6-30\times 4-30\times 2=-37.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D=7.5\times 6-15\times 2-15\times 4=-45\text{kN}\cdot\text{m}$$

再由弯矩叠加法，可以得到各个点弯矩如图 3-2-26 所示，同时可以绘出剪力图如图 3-2-27 所示。

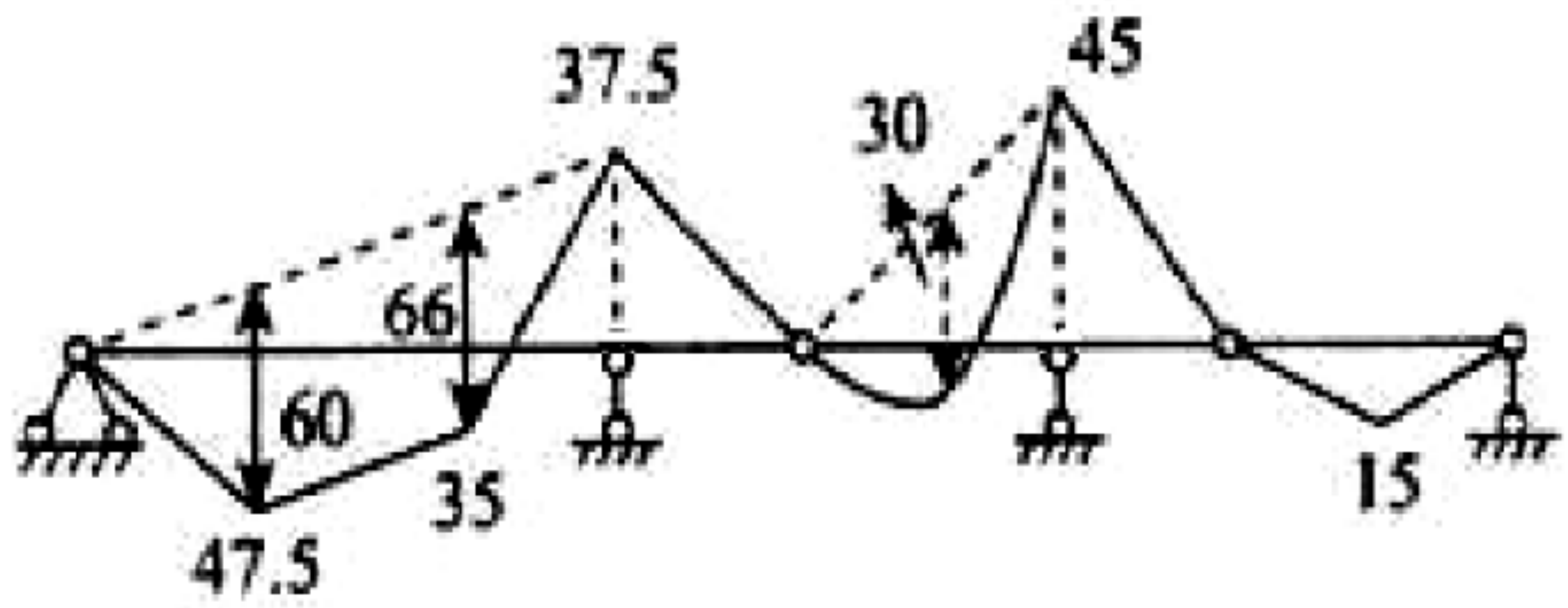


图 3-2-26（弯矩图 kN • m）

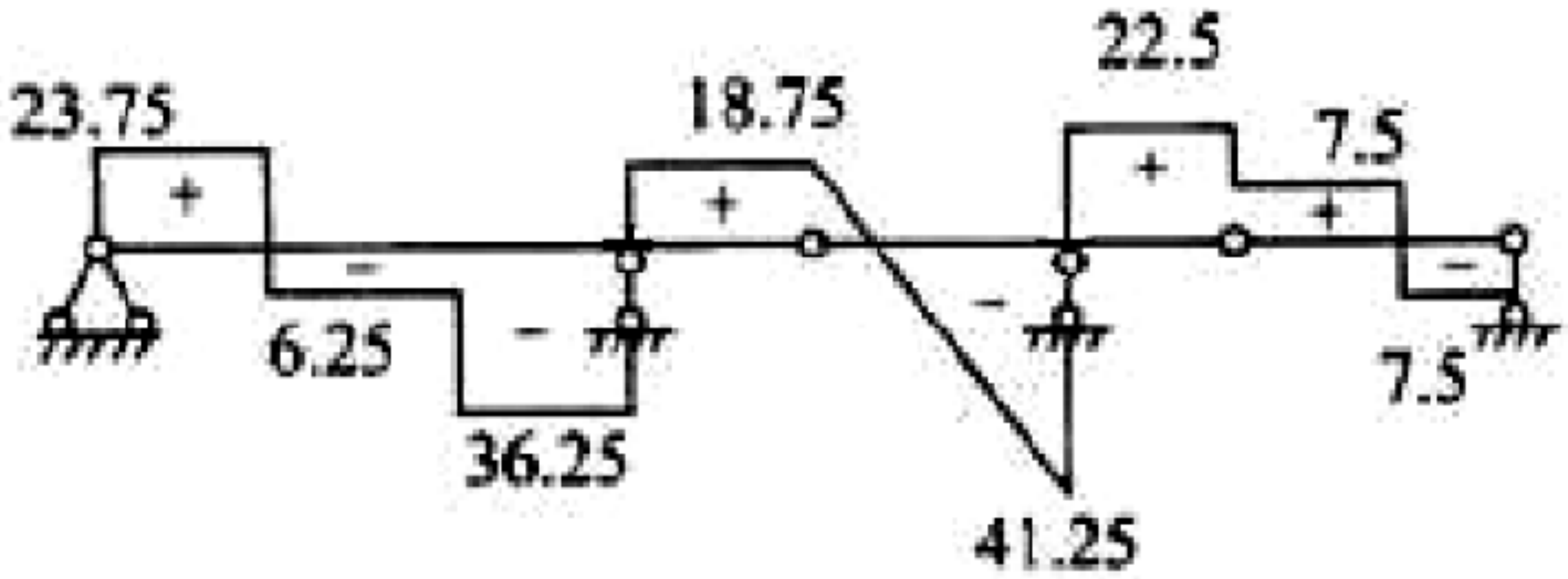


图 3-2-27（剪力图 kN）

3-9　图示结构的荷载作用在纵梁上，再通过横梁传到主梁。试作主梁的 M 图。

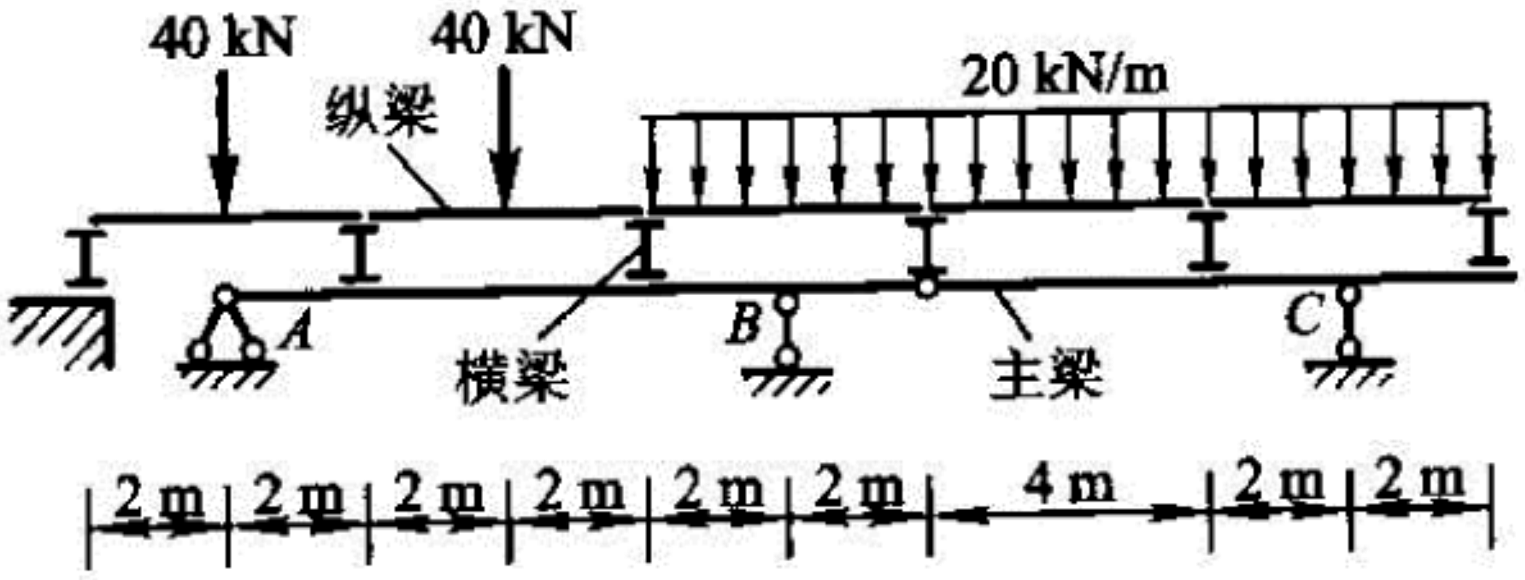


图 3-2-28（题 3-9）

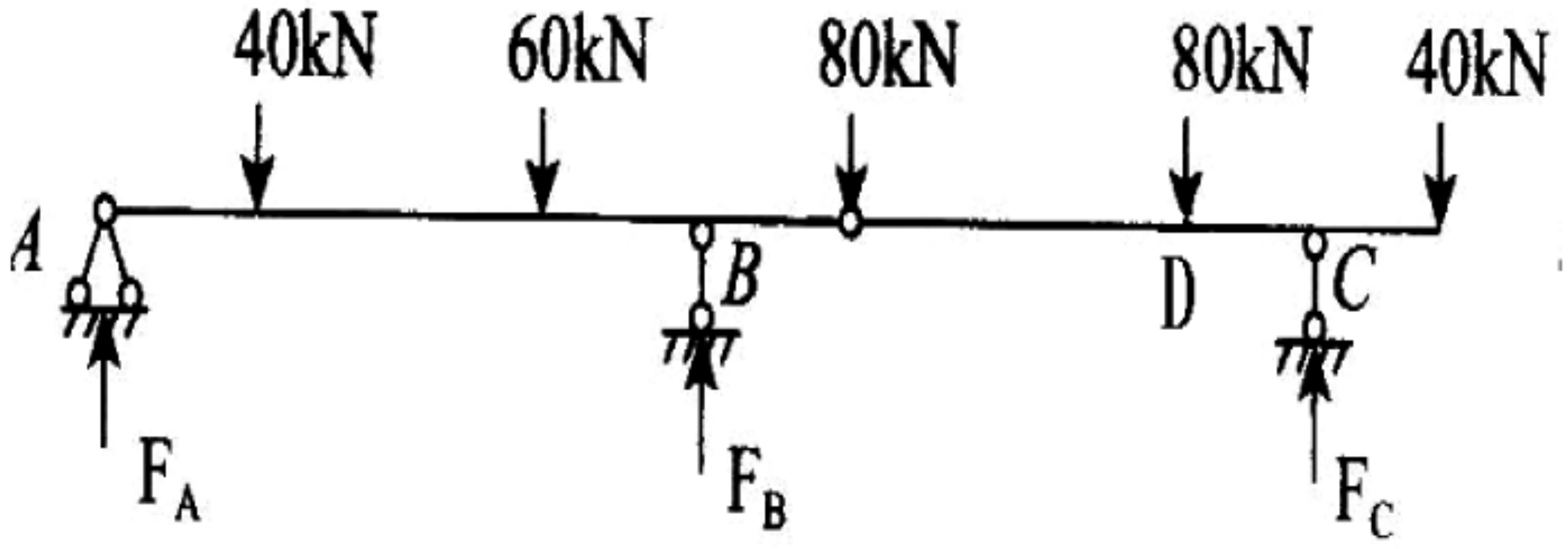


图 3-2-29（题 3-9 解图）

解：荷载作用在纵梁上，再通过横梁传到主梁上，以集中力的形式，故将纵梁上的荷载转化为集中作用于横梁上如图 3-2-29 所示。以截面法计算各截面剪力

由$\Sigma M_C=0$，有

$$F_c \cdot 6-40\times8-80\times4=0$$

解得

$$F_c=106.67\text{kN}$$

同理可得 $F_A=21.67\text{kN}$，$F_B=171.67\text{kN}$

以截面法计算各截面的弯矩值大小

$$M_C=-40\times2=-80\text{kN·m}（上部受拉）$$

$$M_B=F_A\times8-40\times6-60\times2=-186.7\text{kN·m}$$

$$M_D=106.67\times2-40\times4=53.34\text{kN·m}$$

根据弯矩叠加原理可绘出弯矩图如图 3-2-30 所示。

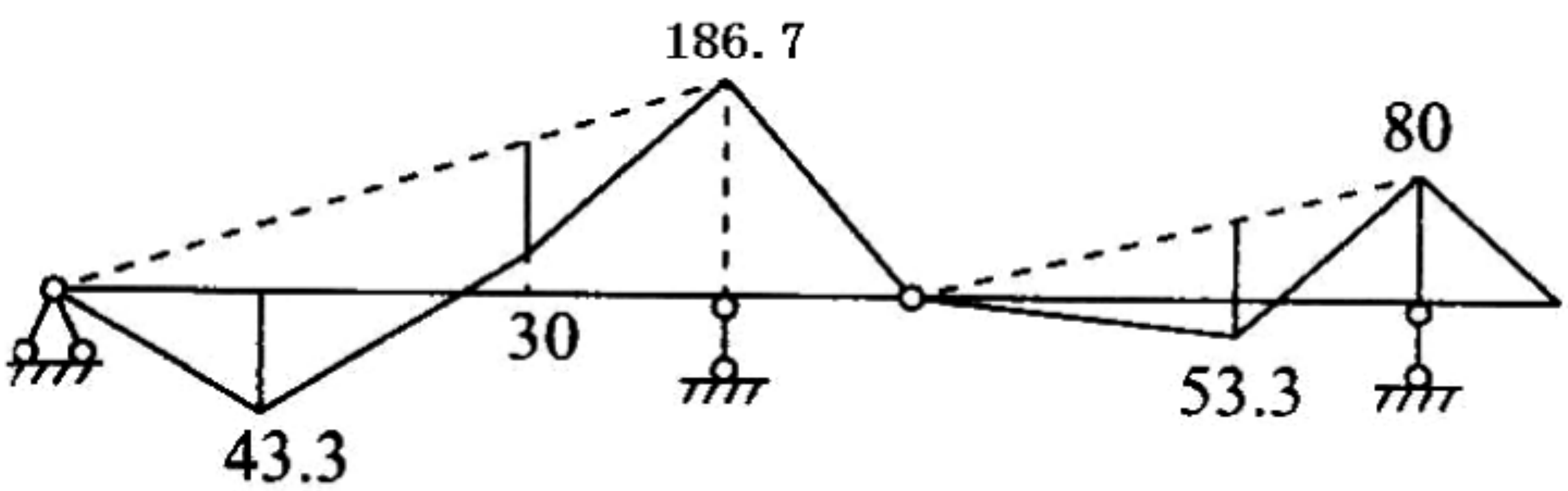


图 3-2-30（弯矩图 kN·m）

3-10～3-11　试不计算反力而绘出梁的弯矩图。

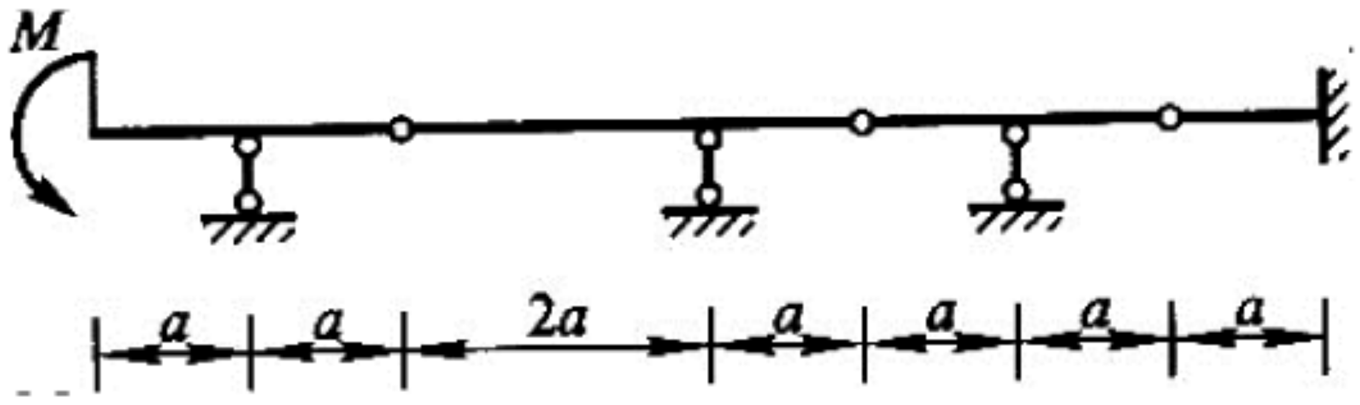


图 3-2-31（题 3-10）

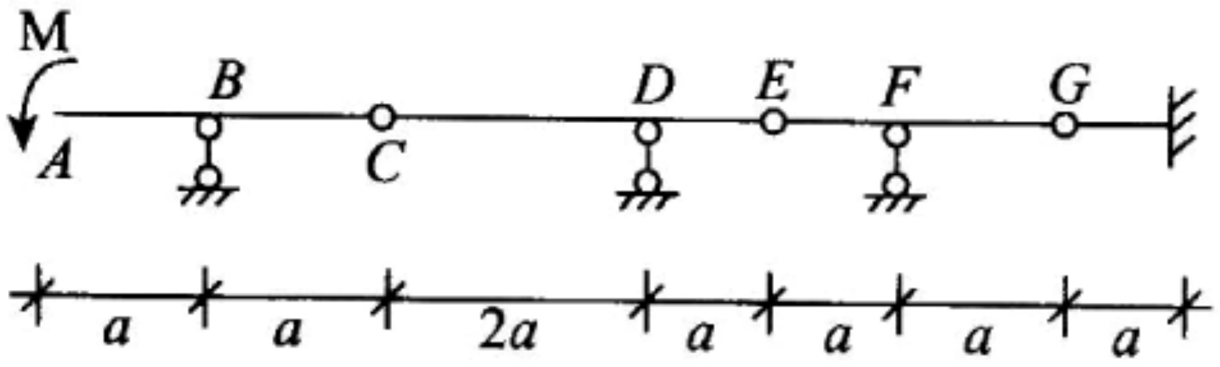


图 3-2-32（题 3-10 解图）

3-10 解：作弯矩图从附属部分开始，AB 段的弯矩图与 M 相同，C 点弯矩为零，BD 之间无外力作用，故其弯矩图为一直线。同样 E、G 两点弯矩为零，DF 和 FH 之间无外力作用，故 DF 之间和 FH 之间为一直线。弯矩图如图 3-2-33 所示。

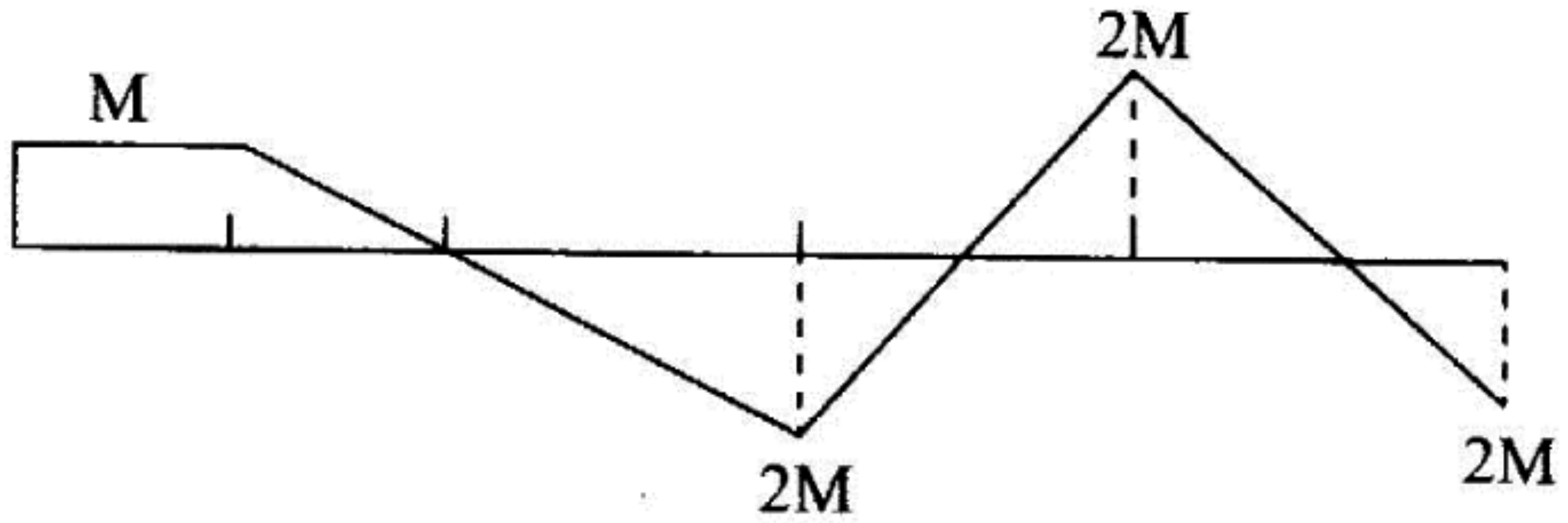


图 3-2-33（弯矩图）

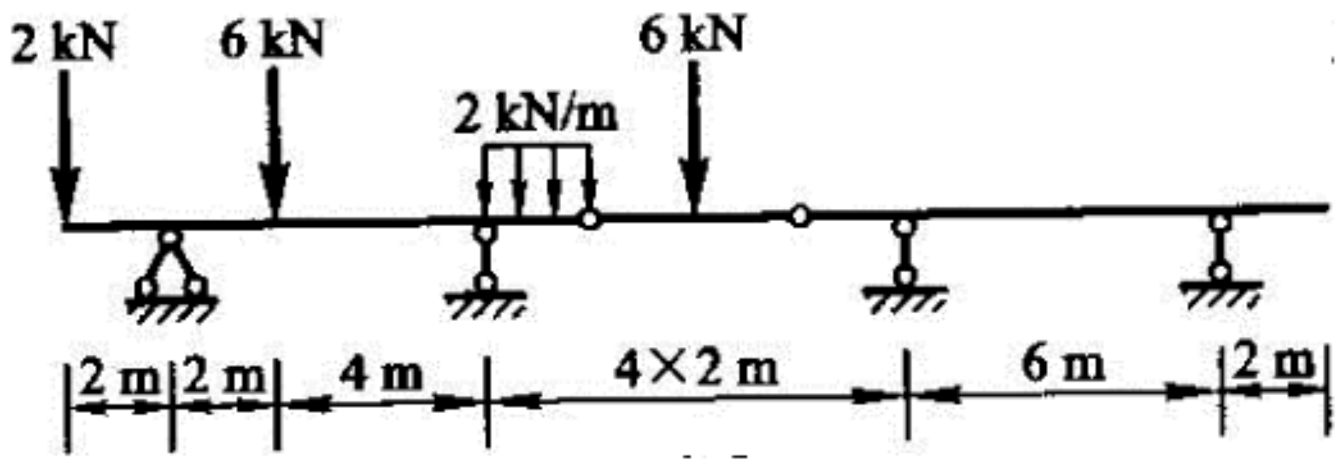


图 3-2-34（题 3-11）

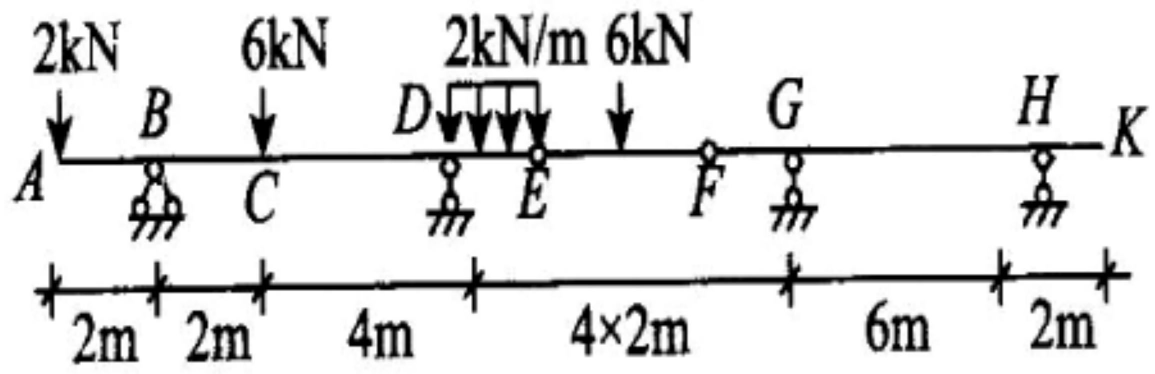


图 3-2-35（题 3-11 解图）

3-11 解：先作附属部分，易知

$$M_B = 2\times2 = 4\text{kN}\cdot\text{m}\text{（上部受拉）}$$

EF 段可以看作受集中力的简支梁，由 E 点、F 点弯矩为 0，FG 段不受外力，故 FG 段为一直线；H 点弯矩 0，GH 段为一直线。

可求 D 点弯矩

$$M_D = 3\times2 + 2\times2\times1 = 10\text{kN}\cdot\text{m}$$

BD 之间 C 点可以用弯矩叠加求出，故可画出此弯矩图如图 3-2-36 所示。

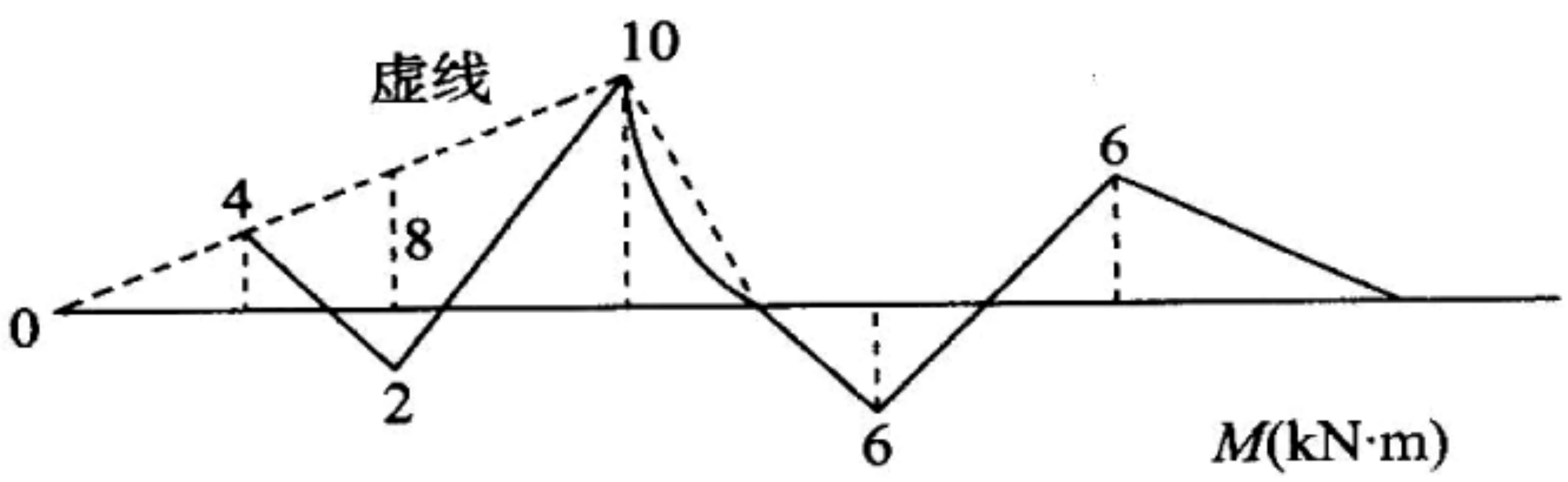


图 3-2-36（弯矩图）

3-12～3-14 试作图示刚架的 M、F_S、F_N 图。

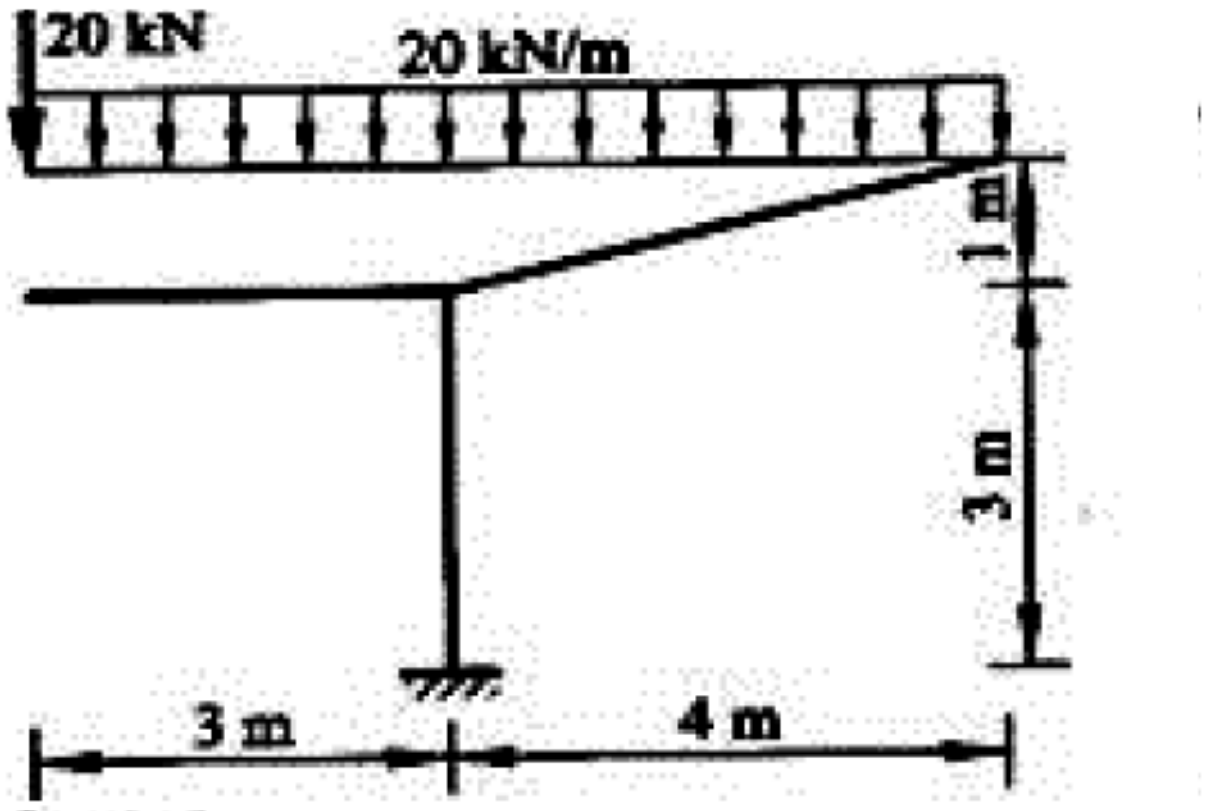


图 3-2-37（题 3-12）

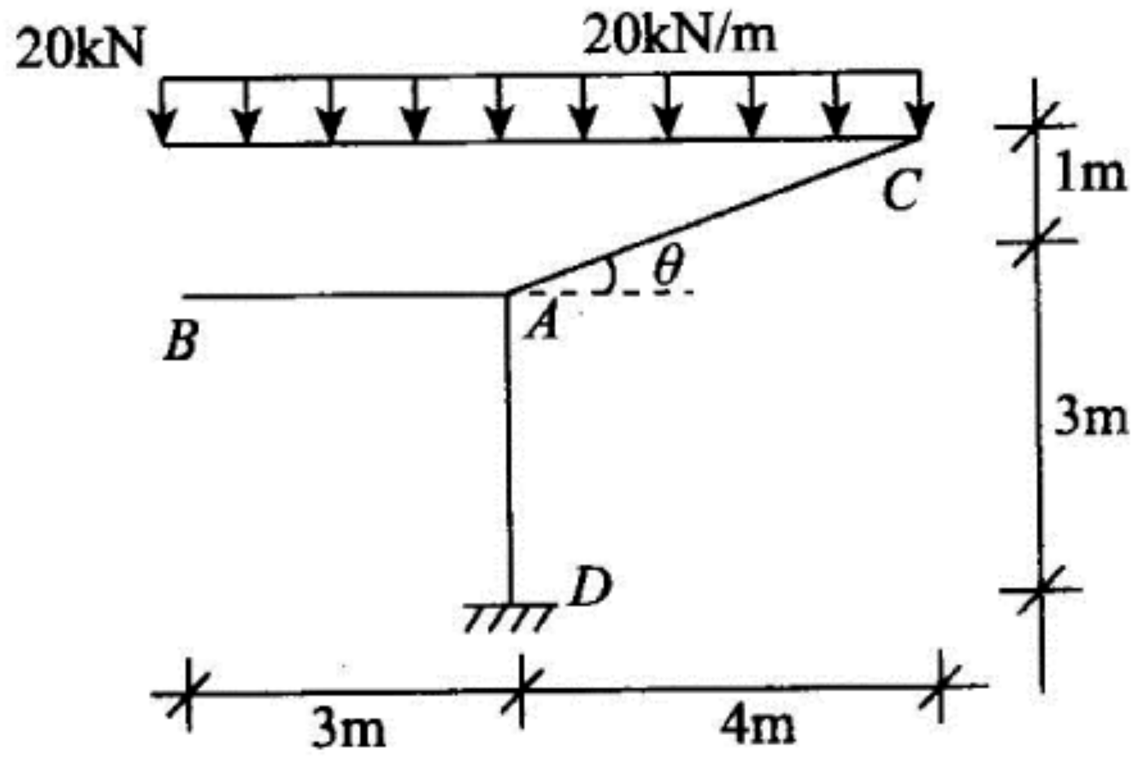


图 3-2-38（题 3-12 解图）

3-12　解：先作出弯矩图

$$M_{AB}=20\times3+20\times3\times1.5=150kN\cdot m$$

$$M_{AC}=20\times4\times2=160kN\cdot m$$

根据 A 结点的弯矩平衡，可算得

$$M_{AD}=160-150=10kN\cdot m$$

AD 段不受力，故

$$M_{DA}=10kN\cdot m$$

接下来计算剪力 F_S 和轴力 F_N

$$F_{S\,BA}=-20kN,F_{S\,AB}=-20-20\times3=-80kN,F_{S\,CA}=0$$

$$F_{S\,CA}=80\times\cos\theta=77.6kN,N_{AC}=80\times\sin\theta=19.4kN$$

$$F_{NAD}=-\left(20\times7+20\right)=-160kN$$

故根据计算结果可以画出刚架的 M、F_S（Q）、F_N 图，如图 3-2-39 所示。

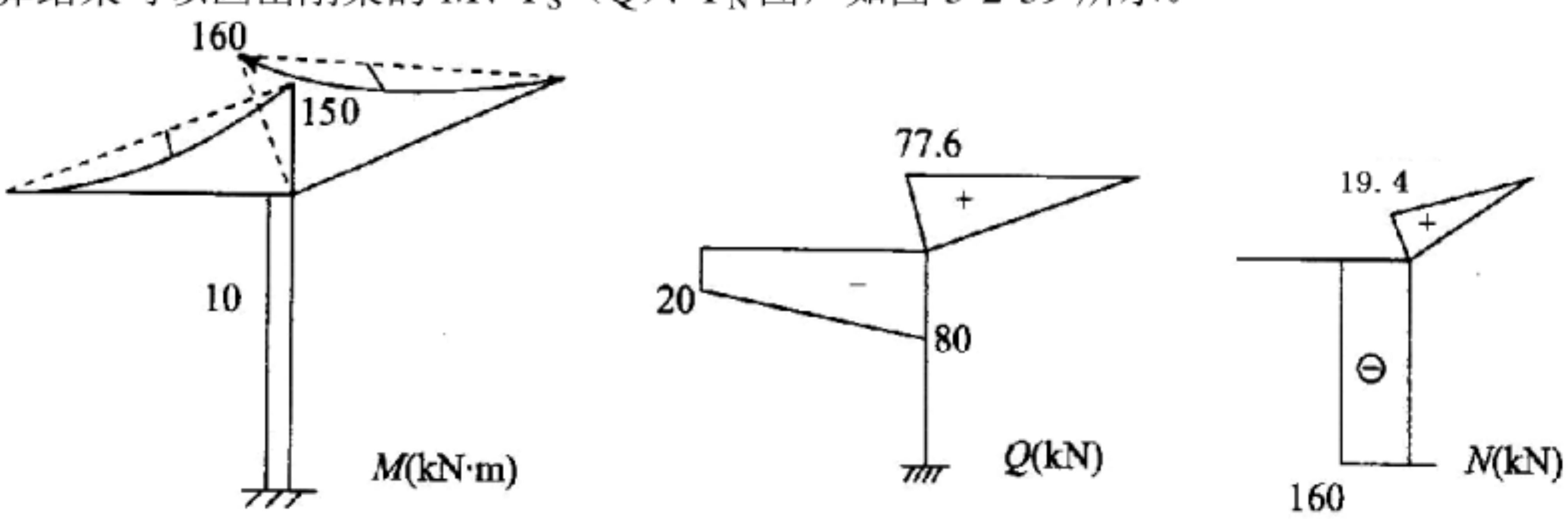


图 3-2-39

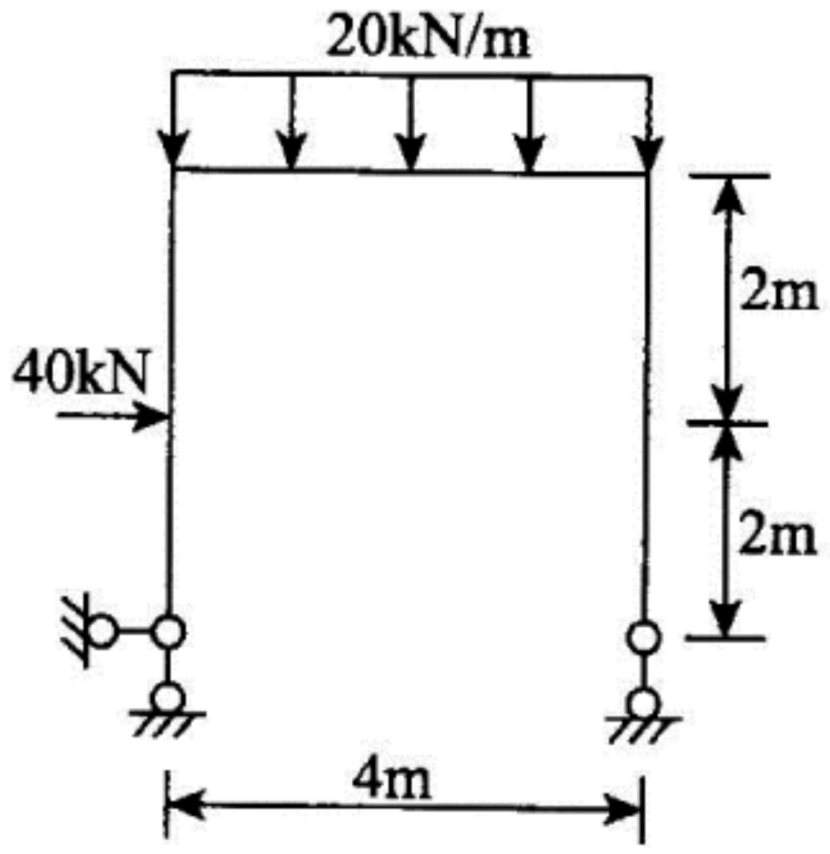


图 3-2-40（题 3-13）

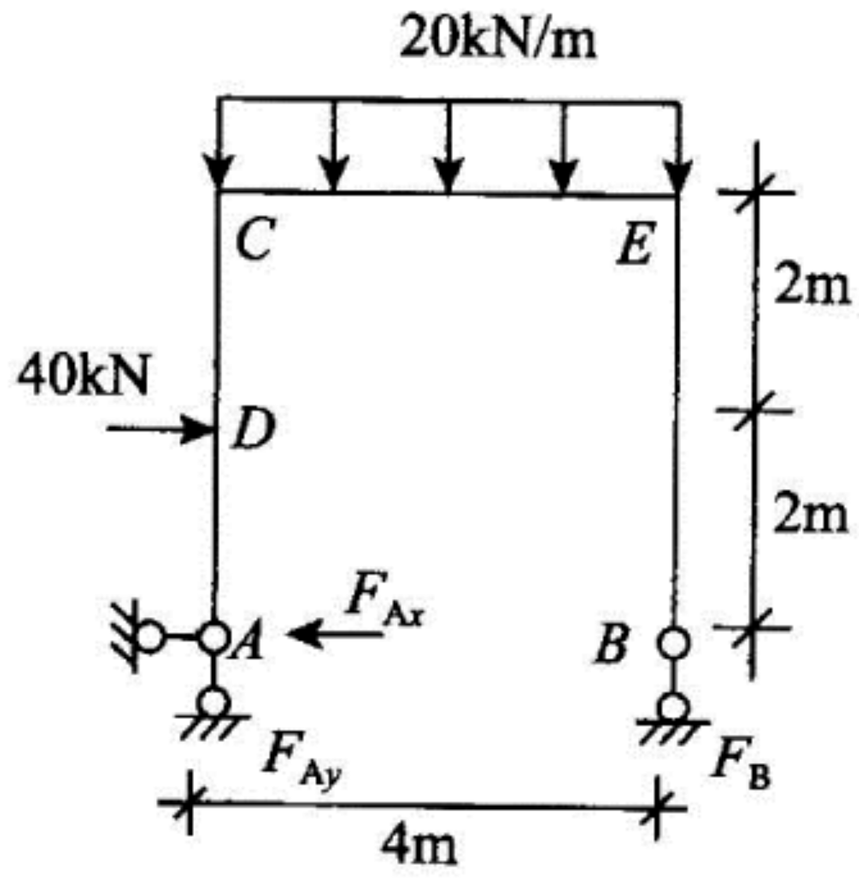


图 3-2-41（题 3-13 解图）

3-13　解：先整体分析计算支座反力

$$M_A=0, F_B\cdot 4-20\times4\times2-40\times2=0$$

$$F_B=60\ \text{kN}, F_{Ay}=-60+20\times4=20\ \text{kN}$$

$$F_{Ax}=40\ \text{kN}$$

故

$$M_D=F_{Ax}\times2=40\times2=80\text{kN}\cdot\text{m}$$

CD 段无剪力作用，故为直线，E 点剪力为 0，可由叠加法作弯矩图。

BE 段剪力，CD 段无剪力，易知

$$Q_{AD}=Q_{DA}=40\text{kN}$$

$$Q_{CE}=20\text{kN}$$

$$Q_{EC}=-20-20\times4=-60\text{kN}$$

$$N_{AC}=-F_{Ay}=-20\text{kN}$$

$$N_{BE}=-F_B=-60\text{kN}$$

可绘出该刚架的内力图如图 3-2-42 所示。

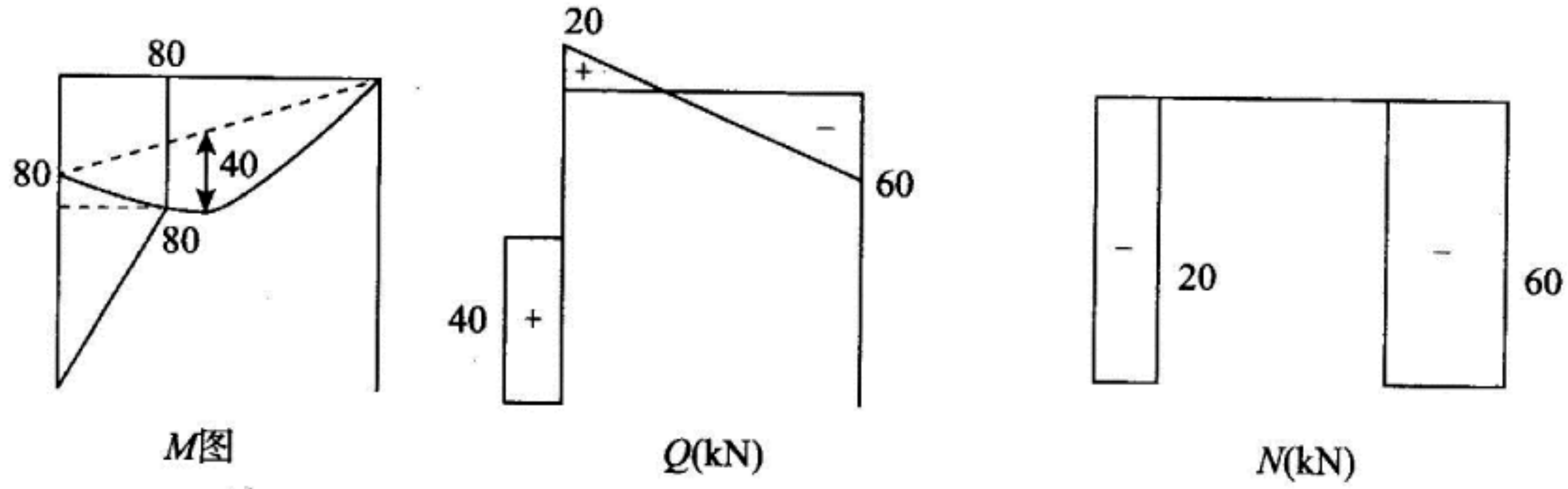


图 3-2-42

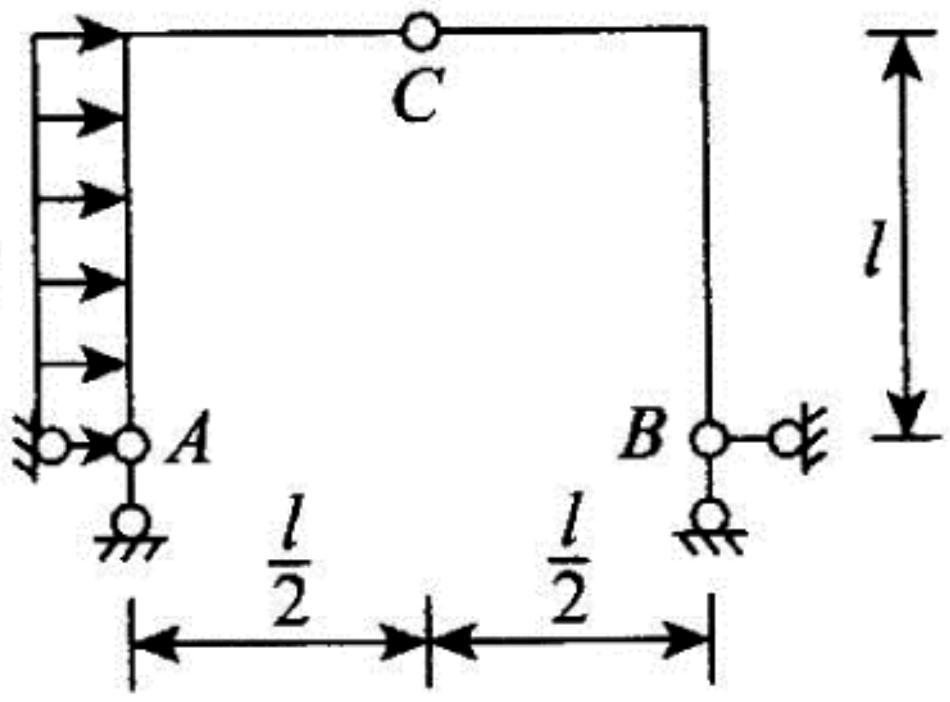


图 3-2-43（题 3-14）

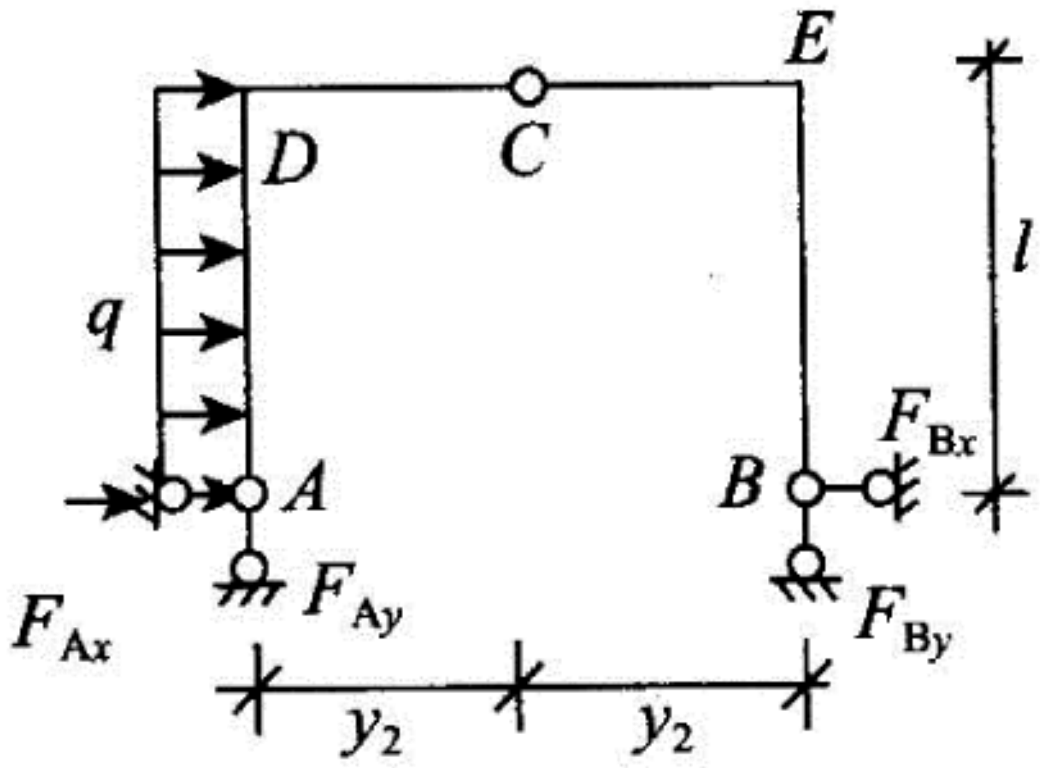


图 3-2-44（题 3-14 解图）

3-14 解：先求解支座反力，列平衡方程

$$\sum M_C = 0, F_{By} \cdot \frac{l}{2} - F_{Bx} \cdot l = 0$$

$$\sum M_A = 0, F_{By} \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

解得

$$F_{By} = \frac{ql}{2}(\uparrow), F_{Bx} = \frac{ql}{4}(\leftarrow)$$

由

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = \frac{3ql}{4}(\leftarrow), \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{ql}{2}(\downarrow)$$

故

$$M_{EB} = F_{Bx} \cdot l = \frac{ql^2}{4}$$

由于 C 点为铰结点，C 点弯矩为 0 且无外力，故 DE 弯矩图为直线。再计算其他内力有如下结果

$$M_{DA} = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{3}{4}ql \cdot l = -\frac{1}{4}ql^2$$

$$Q_{AD} = \frac{3}{4}ql, Q_{DA} = \frac{3}{4}ql - ql = -\frac{1}{4}ql, Q_{DF} = Q_{ED} = -\frac{ql}{2}$$

$$Q_{BE} = Q_{EB} = -\frac{ql}{2}$$

$$N_{AD} = -F_{Ay} = \frac{ql}{2}, N_{DE} = -\frac{ql}{4}, N_{DE} = -F_{By} = -\frac{ql}{2}$$

根据以上结果可绘制出该刚架的内力图，如图 3-2-45 所示。

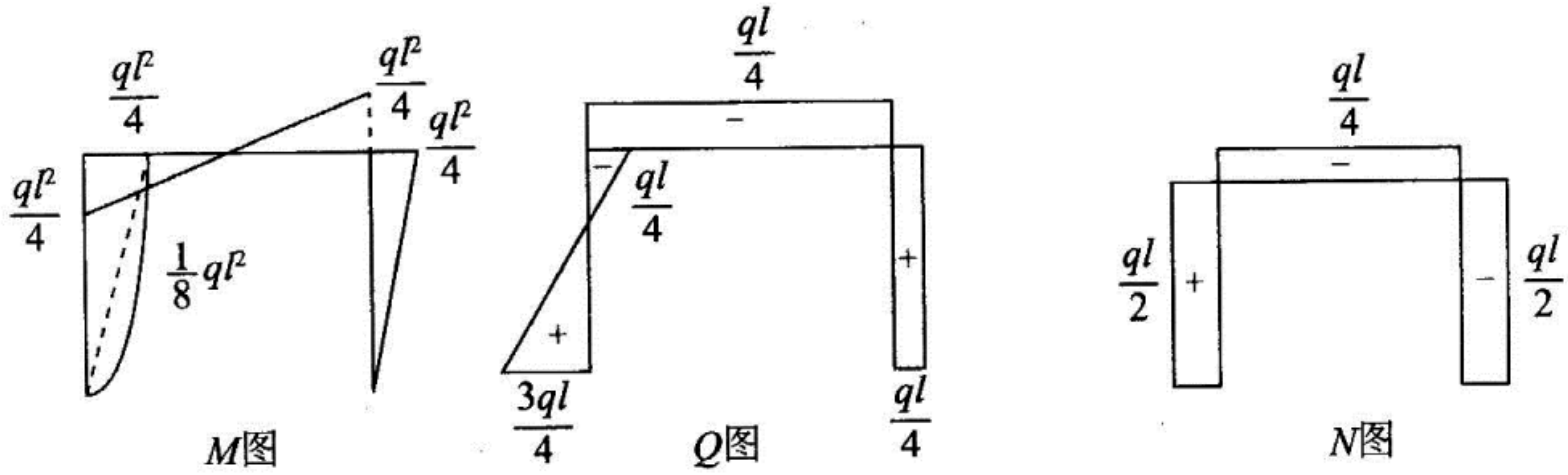


图 3-2-45

3-15～3-24　试作图示刚架的 M 图。

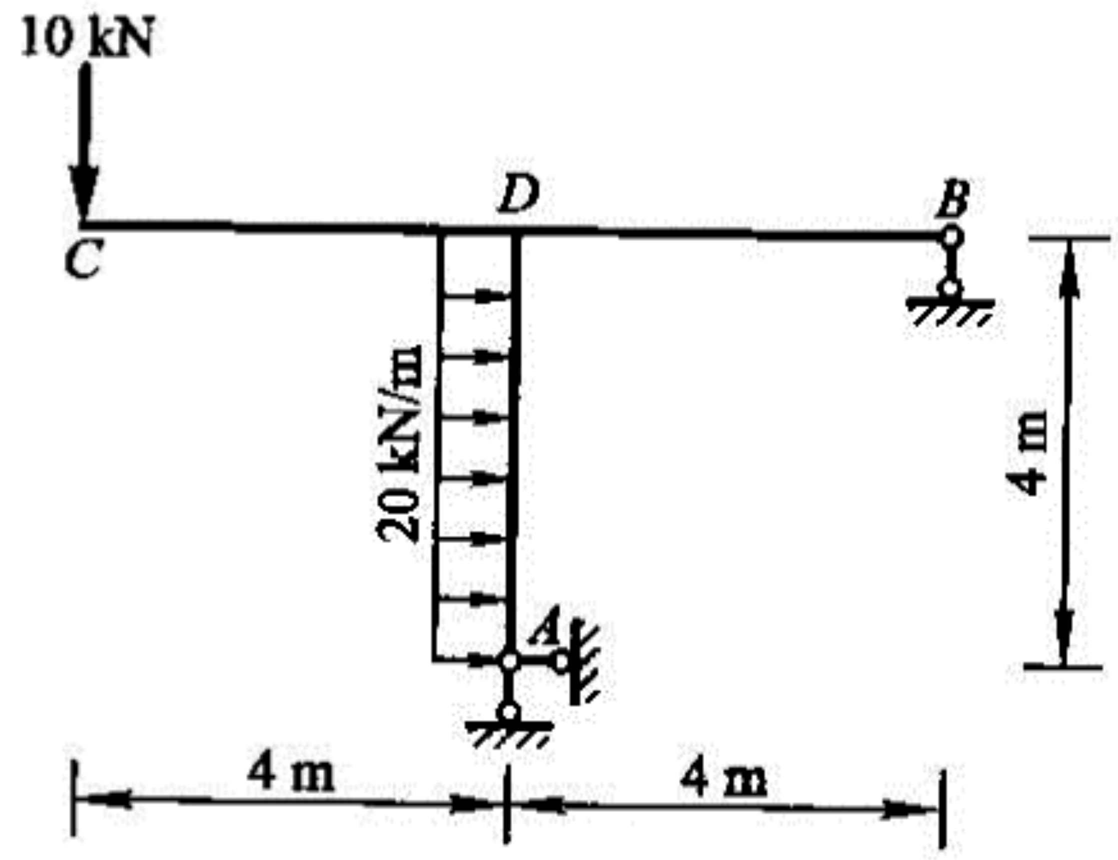


图 3-2-46（题 3-15）

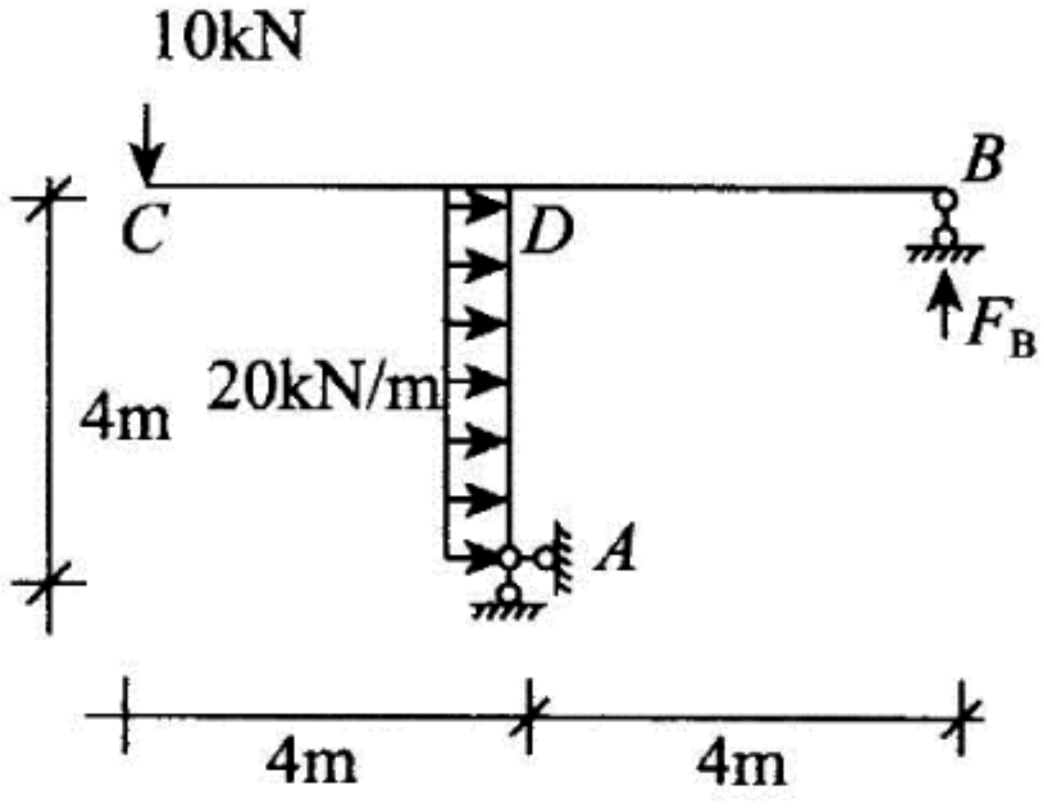


图 3-2-47（题 3-15 解图）

3-15　解：求解内力如下，即

$$M_{DC}=10\times4=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

由 $\Sigma M_A=0, F_B\cdot4+10\times4-4\times20\times2=0$

$$F_B=30\ \text{kN}$$

$$M_{DB}=30\times4=120\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

故 $M_{DA}=M_{DC}+M_{DB}=160\ \text{kN}\cdot\text{m}$

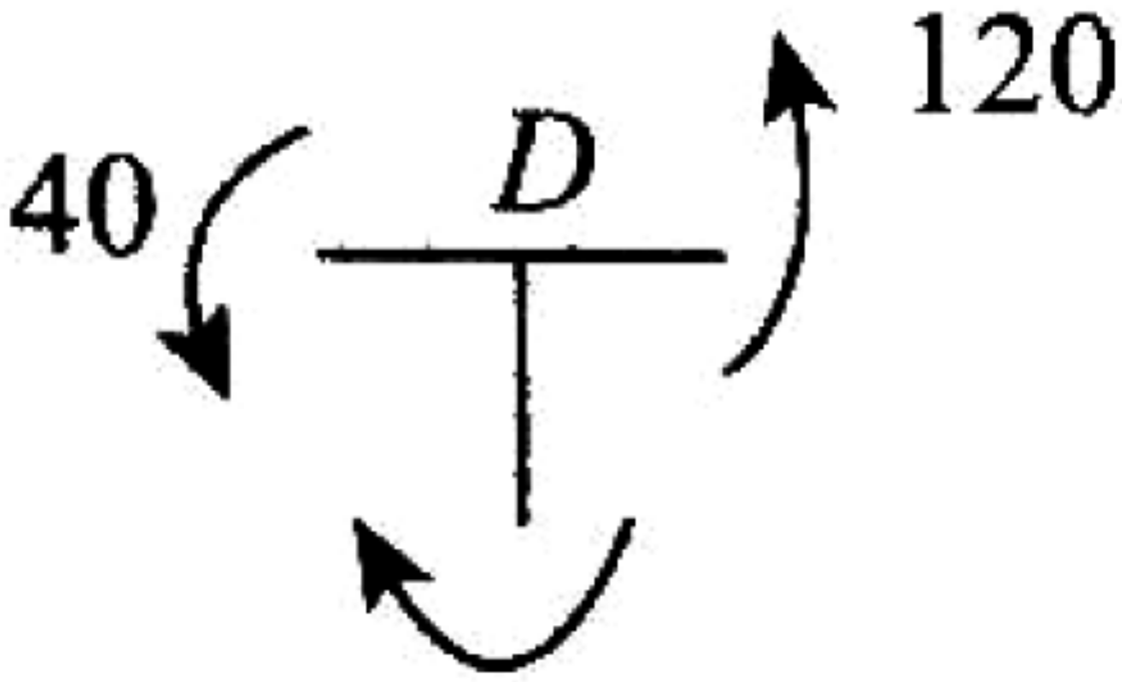


图 3-2-48（D 结点的弯矩平衡图）

易知 A 点弯矩为 0，AD 之间弯矩由叠加法可算出，故可以绘制出弯矩图如图 3-2-49 所示。

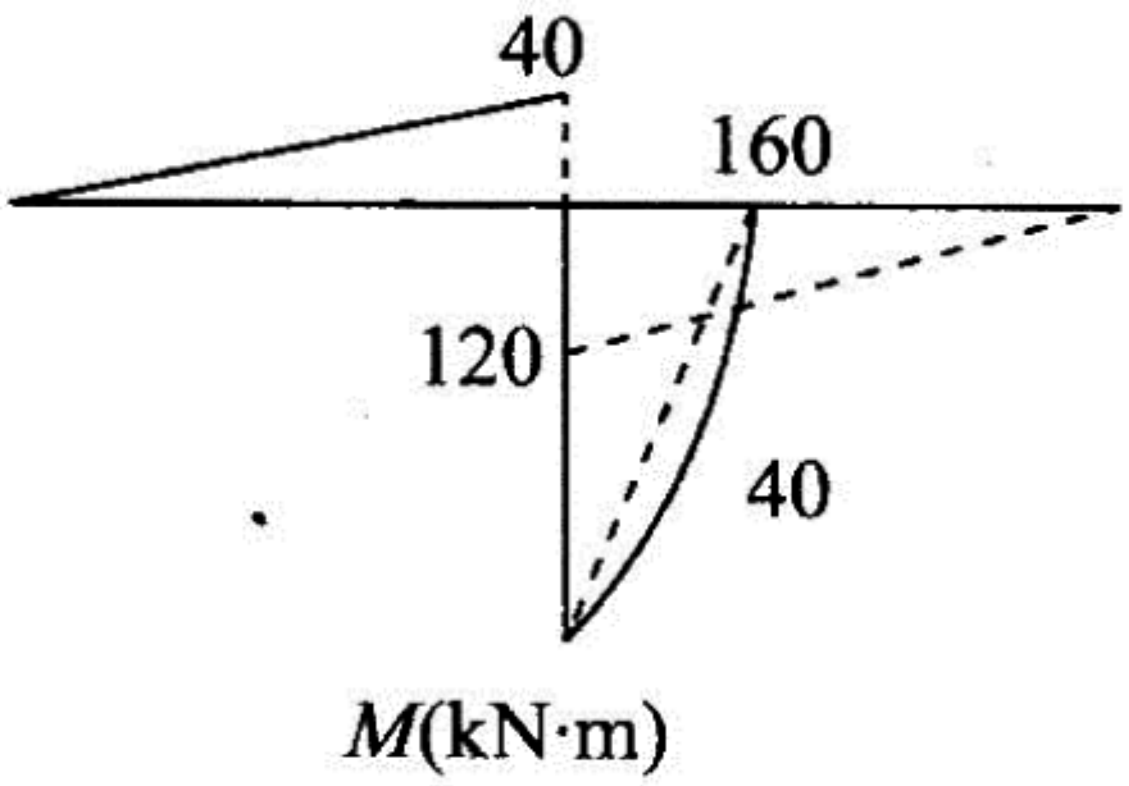


图 3-2-49

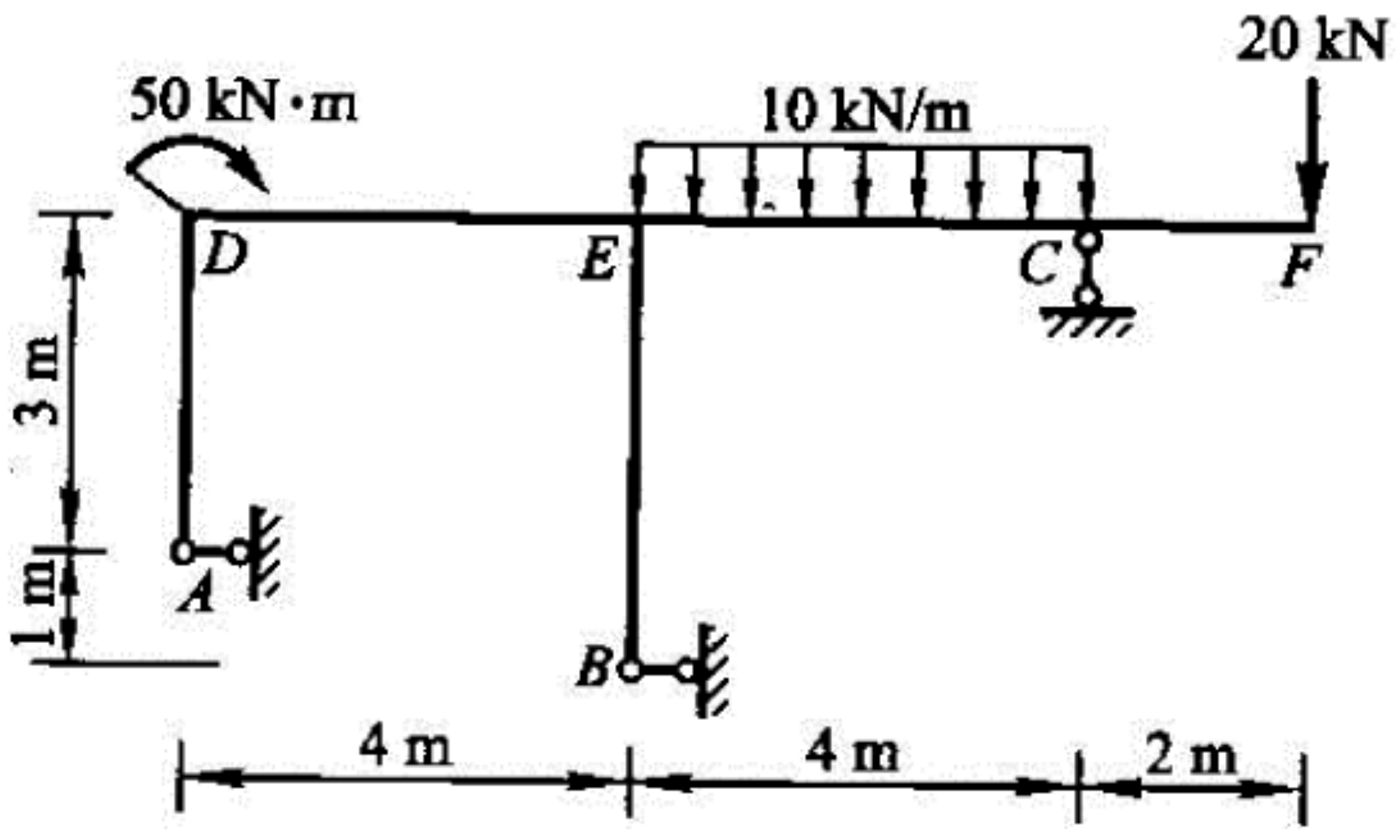


图 3-2-50（题 3-16）

3-16　解：求解内力如下

由 $\sum F_y=0$ 知，$F_C=20+10\times4=60$ kN

$M_{CF}=20\times2=40$ kN·m

$M_{EC}=20\times6-60\times4+10\times4\times2=40$ kN·m

由 $\sum M_A=0$，$F_B\times1+F_C\cdot8-20\times10-10\times4\times6-50=0$

$\Rightarrow F_B=10$ kN

$M_{EB}=10\times4=40$ kN·m

$M_{ED}=M_{EB}+M_{EC}=80$ kN·m

另外由 D 结点的弯矩平衡可求得

$M_{DA}=80-50=30$kN·m

根据弯矩叠加法，弯矩图如图 3-2-51 所示。

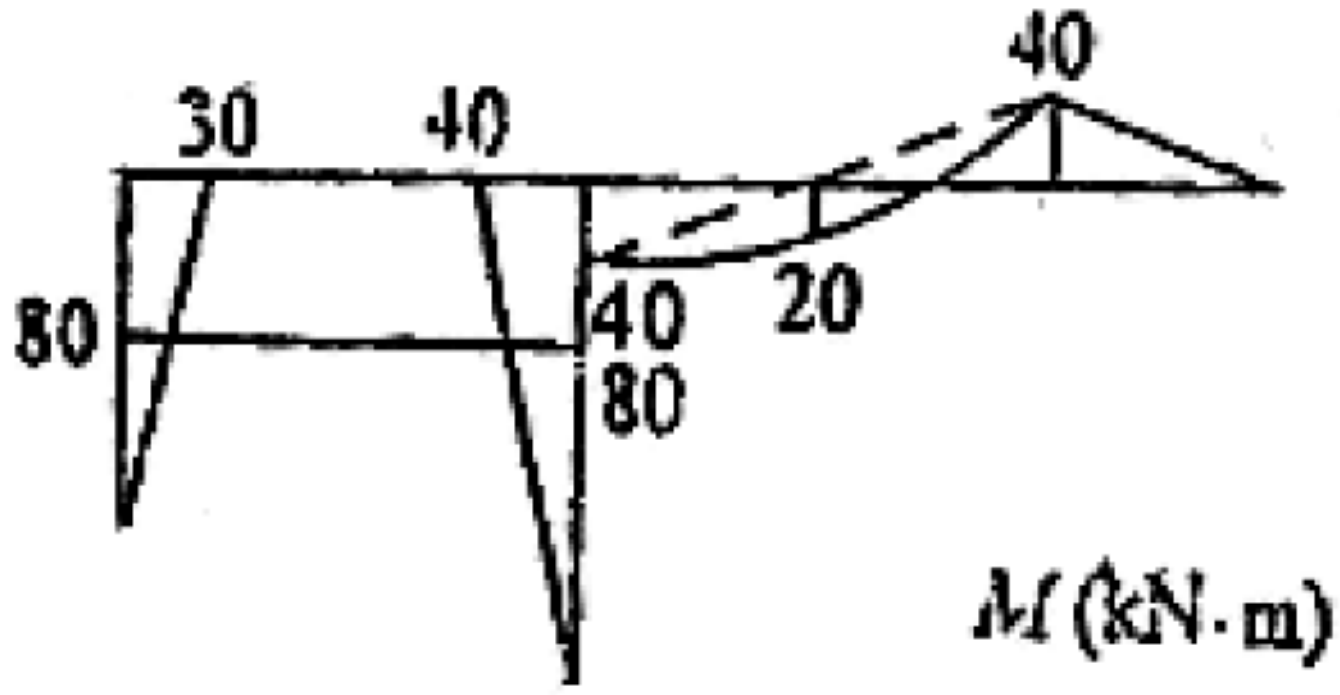


图 3-2-51

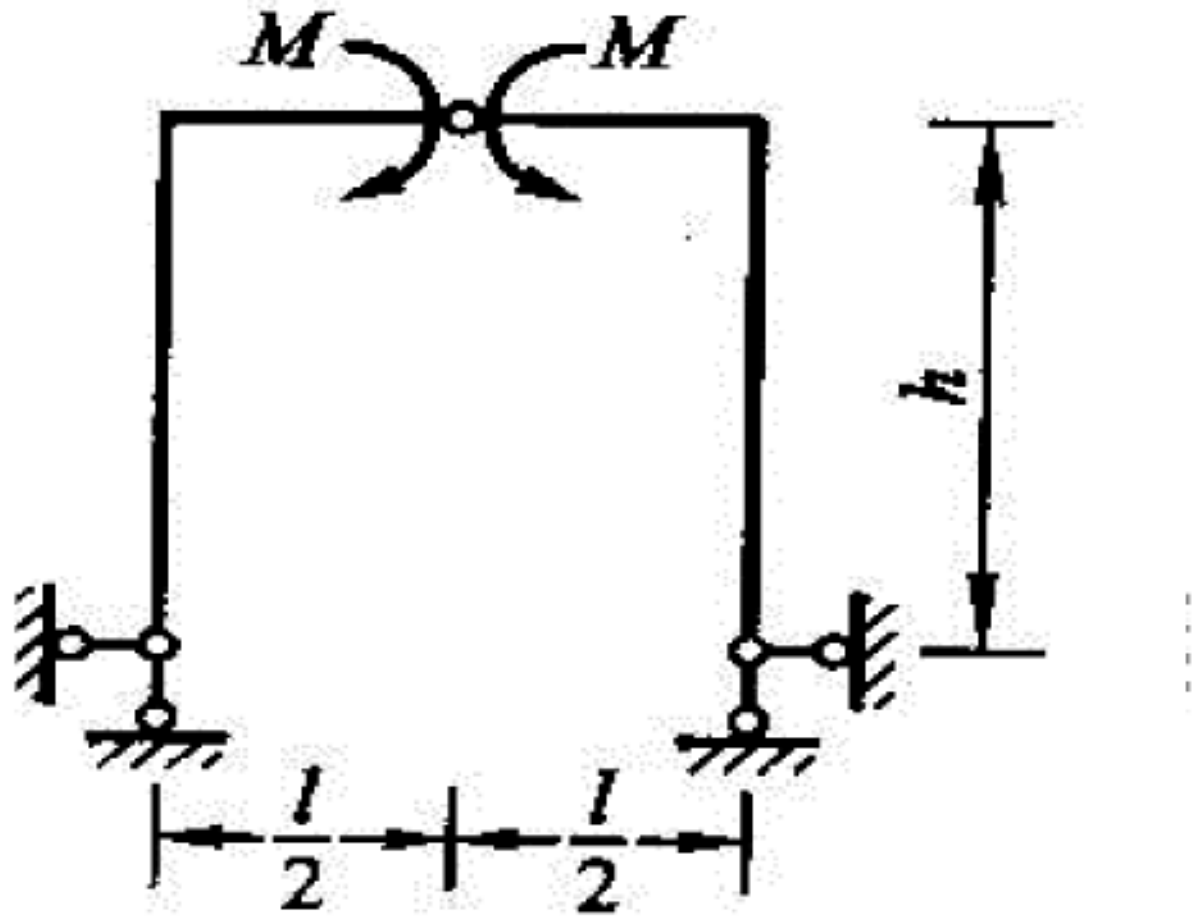


图 3-2-52（题 3-17）

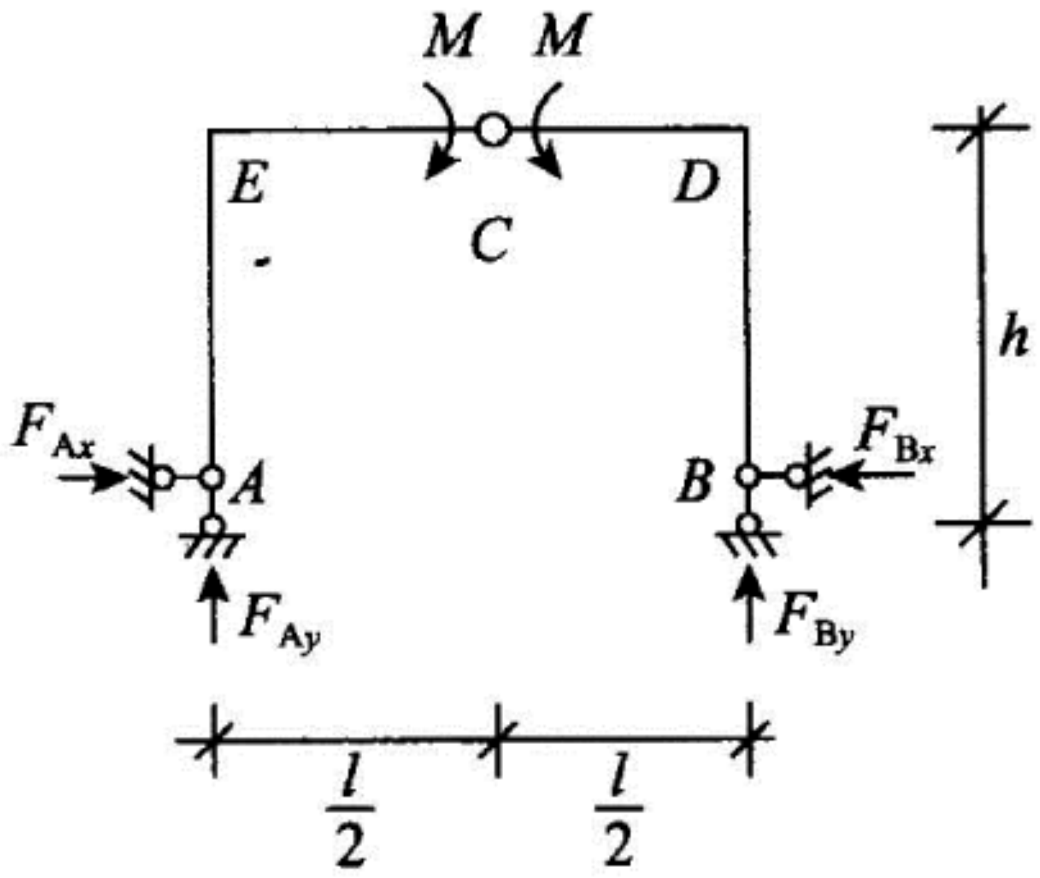


图 3-2-53（题 3-17 解图）

3-17　解：由 $\Sigma M_A=0$，可知 $F_{By}=0$

再由 $\Sigma F_y=0$，可知 $F_{Ay}=0$

由 $\sum M_C=0, F_{Bx}\cdot h=M \Rightarrow F_{Bx}=\dfrac{M}{h}$

故 $M_{DB}=F_{Bx}\cdot h=M$，同理可得出 $M_{EA}=M$。

弯矩图如图 3-2-54 所示。

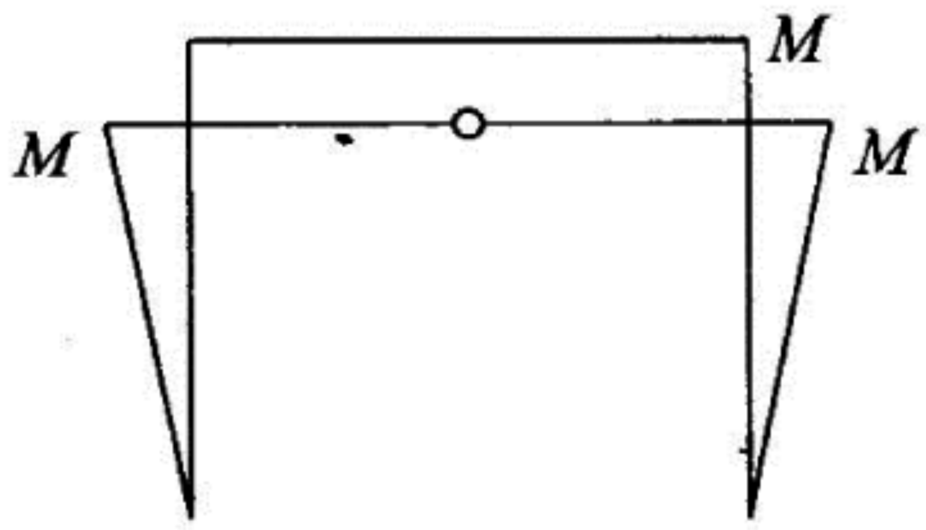


图 3-2-54

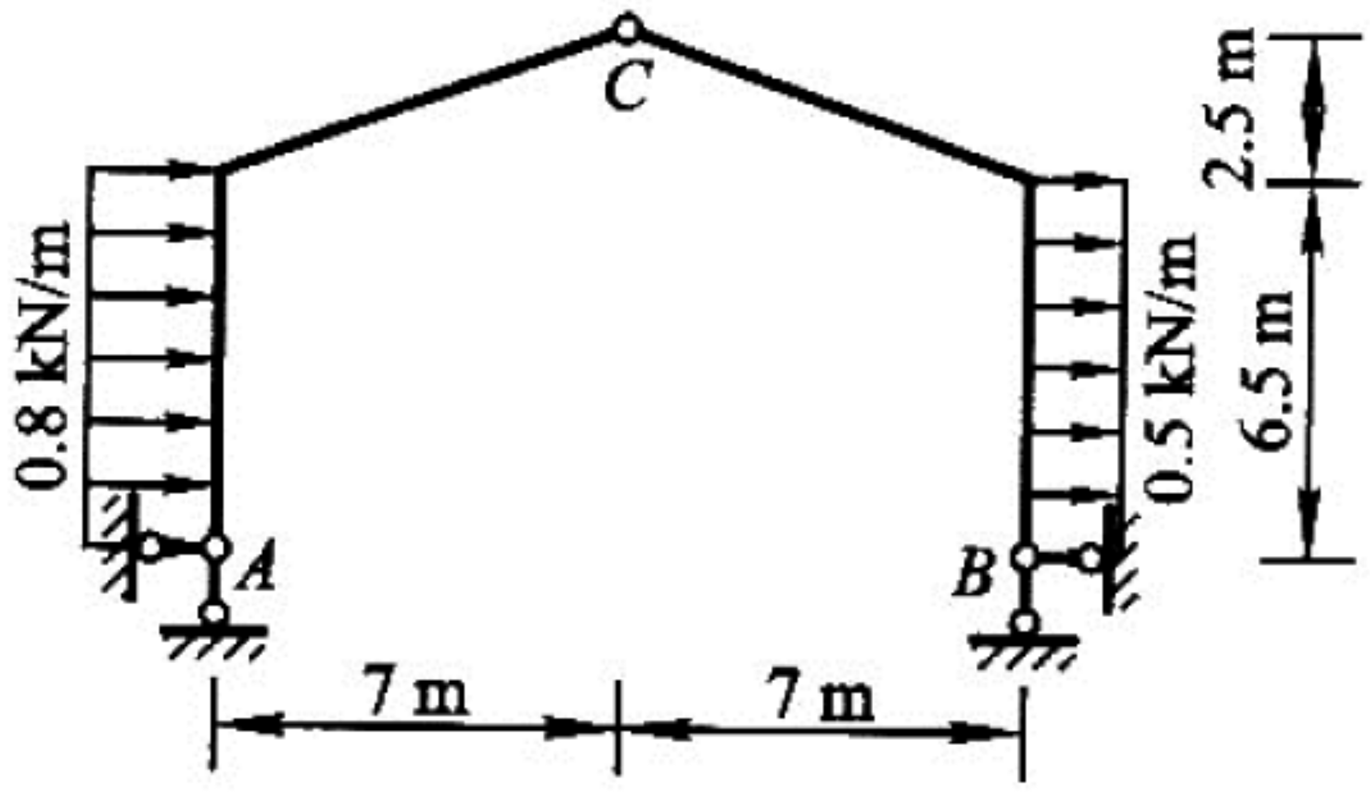


图 3-2-55（题 3-18）

3-18　解：先求竖向支座反力

$$\sum M_B = 0, F_{Ay} \cdot 14 + 0.8 \times 6.5 \times \frac{6.5}{2} + 0.5 \times 6.5 \times \frac{6.5}{2} = 0$$

$$F_{Ay} = -1.96\ \text{kN}\ ，由 \sum F_y = 0, F_{By} = 1.96\ \text{kN}$$

再求水平支座反力

$$\sum M_C = 0, F_{Bx} \times 9 - F_{By} \times 7 - 0.5 \times 6.5 \times (\frac{6.5}{2} + 2.5) = 0$$

$$\Rightarrow F_{Bx} = 3.6kN\,(\leftarrow); \sum F_x = 0, \Rightarrow F_{Ax} = 4.85kN\,(\leftarrow)$$

所以可进一步计算得到截面的弯矩值

$$M_{DB} = F_{Bx} \cdot 6.5 - 0.5 \times 6.5 \times \frac{6.5}{2} = 12.84KN \cdot m$$

$$M_{EA} = F_{Ax} \cdot 6.5 + 0.8 \times 6.5 \times \frac{6.5}{2} = -14.62KN \cdot m$$

故可画出弯矩图 3-2-56 所示。

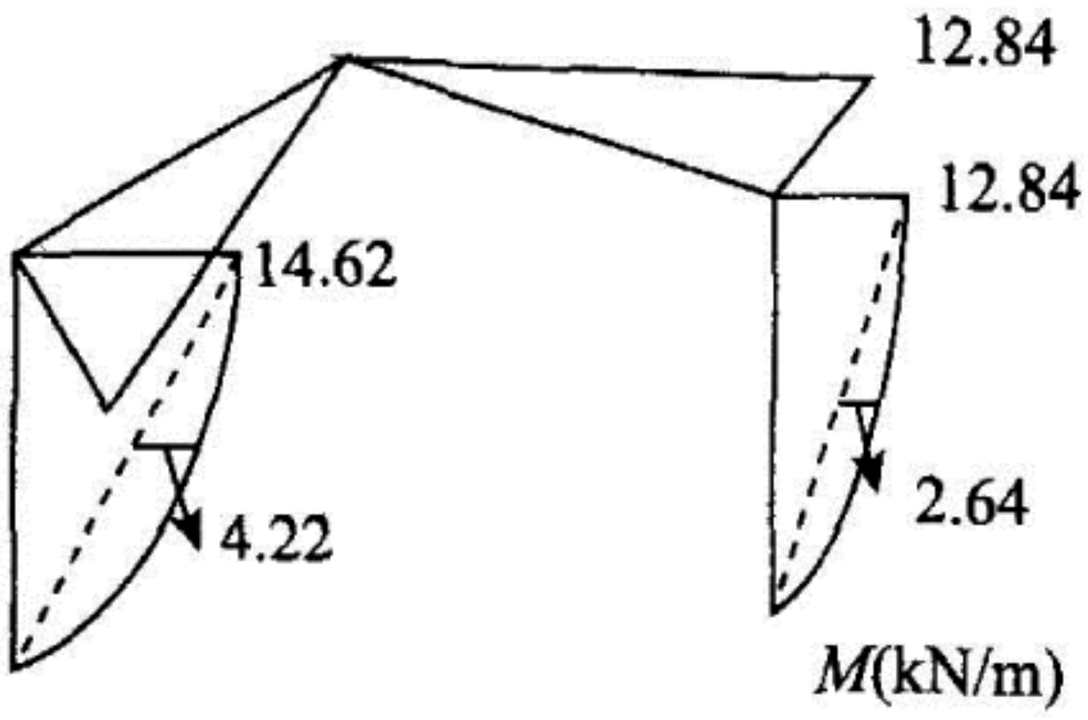


图 3-2-56

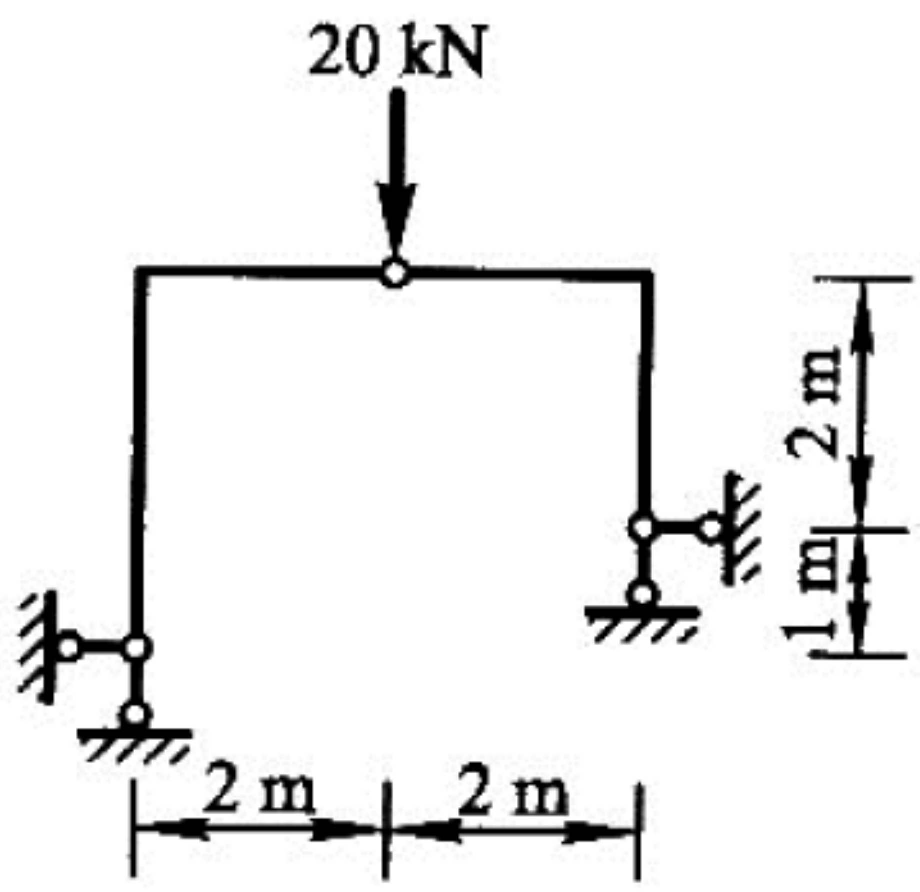


图 3-2-57（题 3-19）

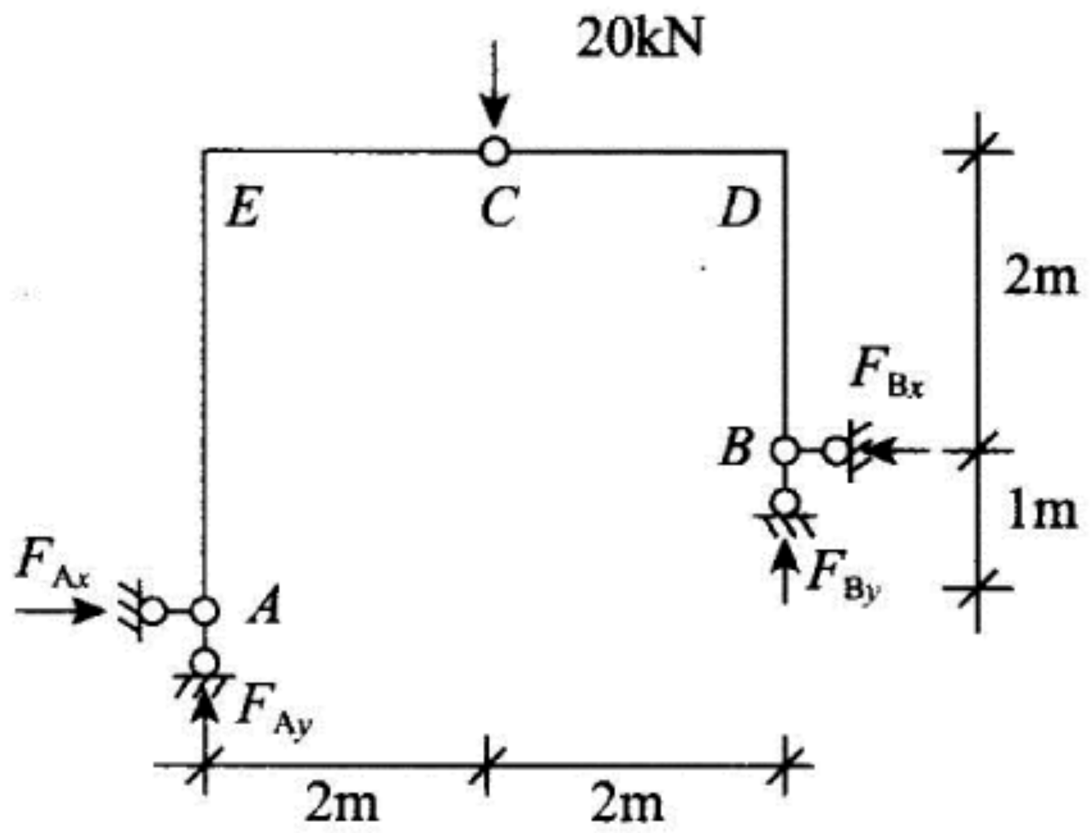


图 3-2-58（题 3-19 解图）

3-19　解：先计算支座反力

$$\sum M_A=0, F_{By}\cdot 4+F_{Bx}\cdot 1-20\times 2=0$$

$$\sum M_C=0, F_{Bx}\cdot 2-F_{By}\cdot 2=0$$

$$\Rightarrow F_{Bx}=F_{By}=8\ \text{kN}$$

且

$$M_{EA}=F_{Ax}\times 3=24kN\cdot m$$
$$M_{DB}=F_{Bx}\times 2=16kN\cdot m$$

可绘出弯矩图如图 3-2-59 所示。

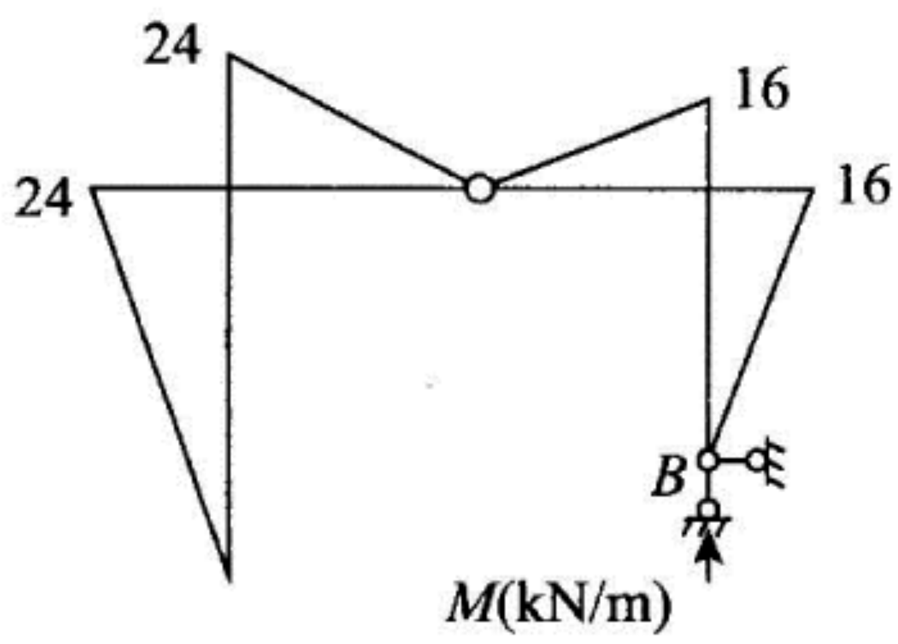


图 3-2-59

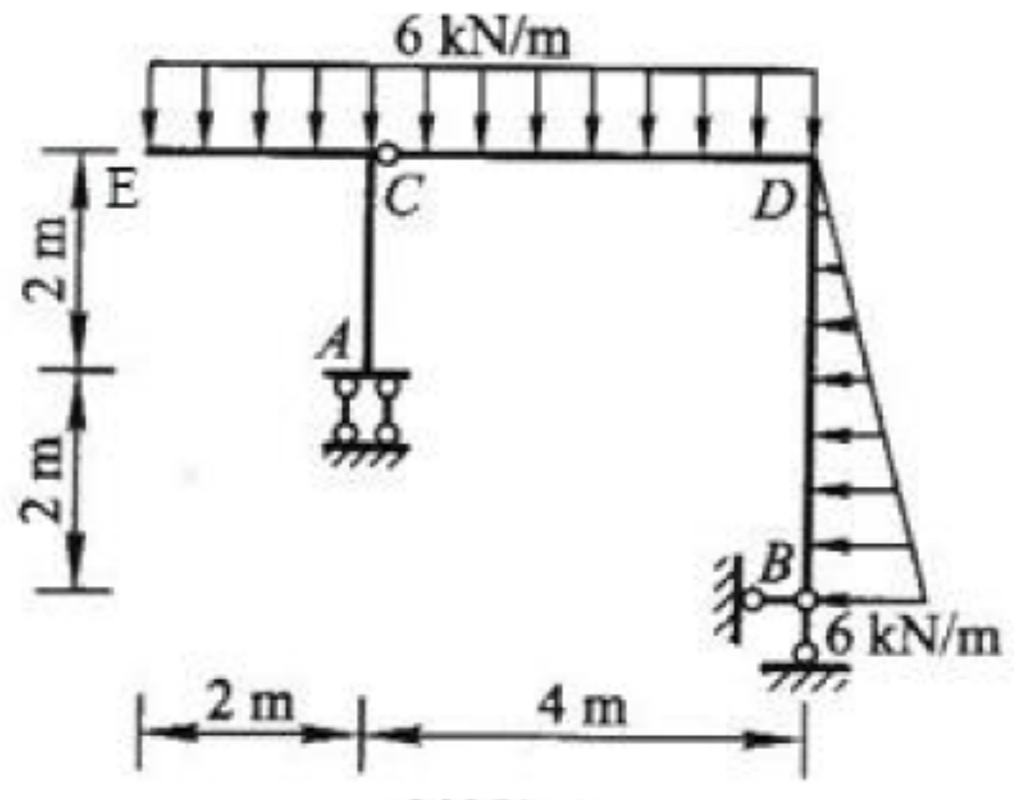


图 3-2-60（题 3-20）

3-20　解：具体求解如下

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ kN}$$

$$M_{DB} = 12 \times 4 - \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 = 16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CE} = 6 \times 2 \times 1 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据弯矩叠加原理绘出结构的弯矩图如图 3-2-61 所示。

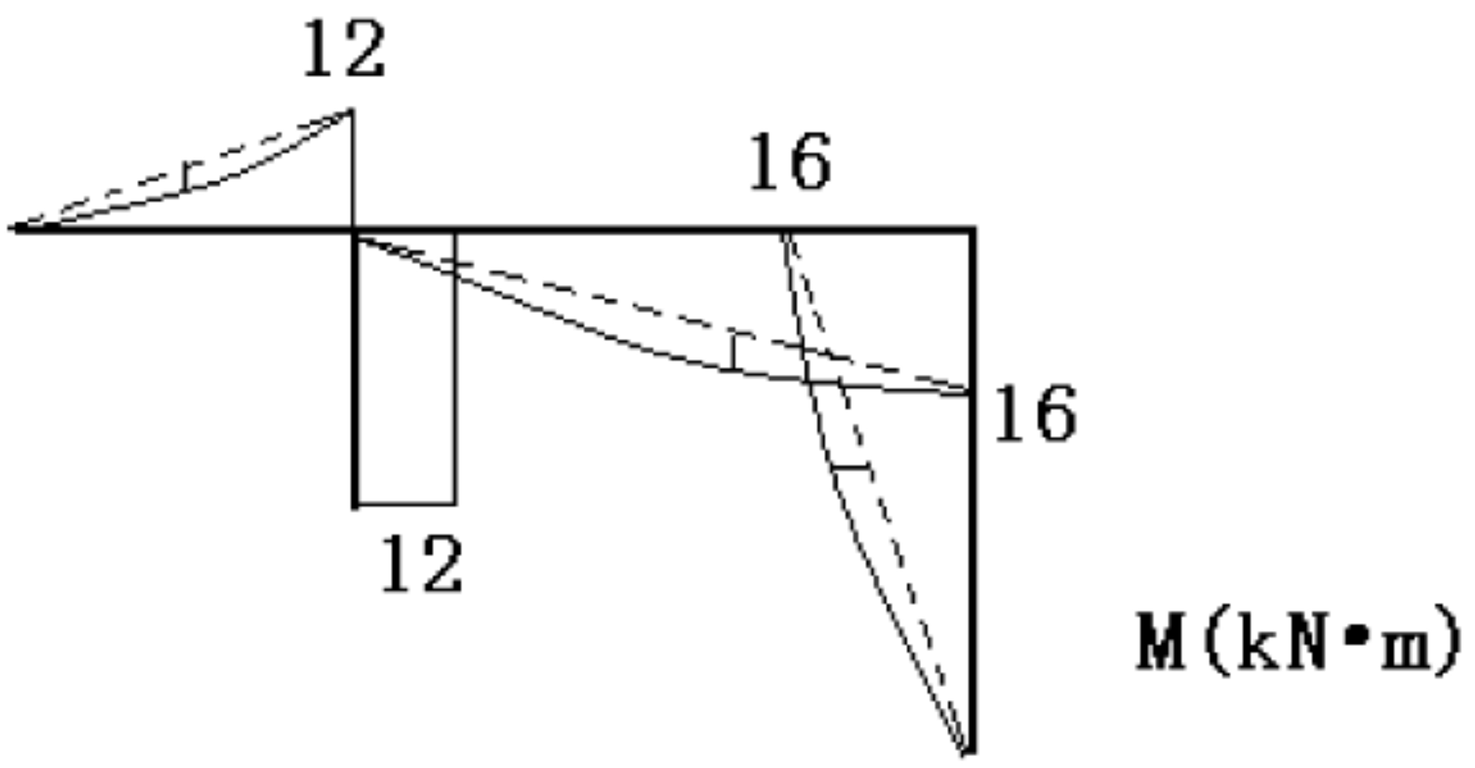


图 3-2-61

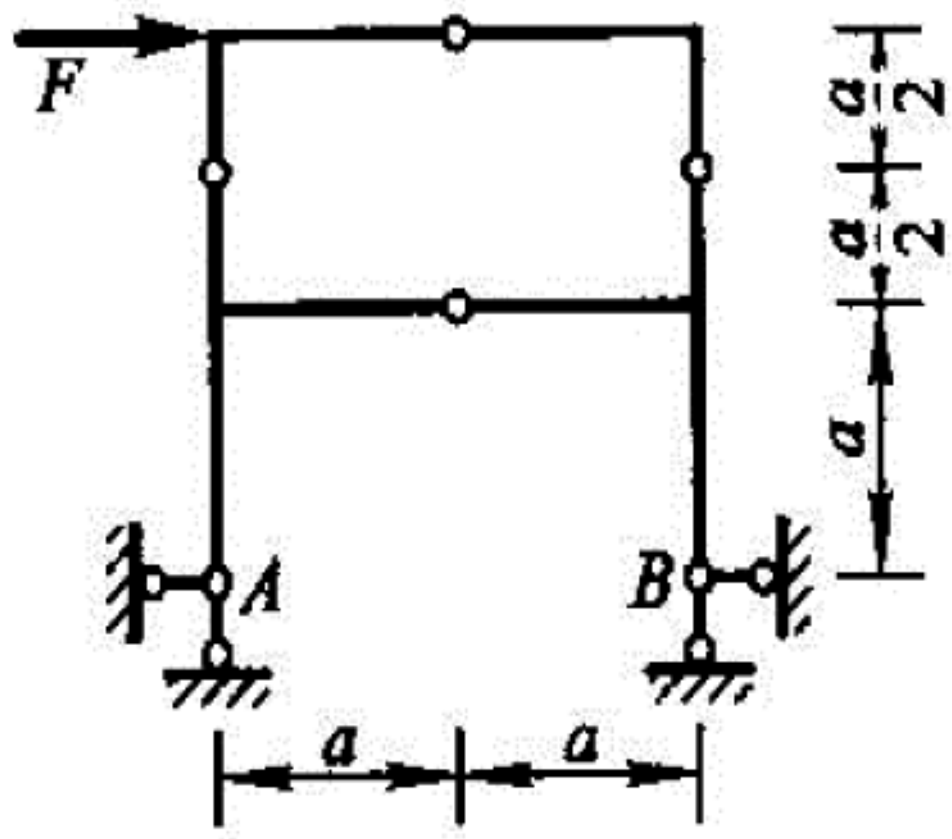


图 3-2-62（题 3-21）

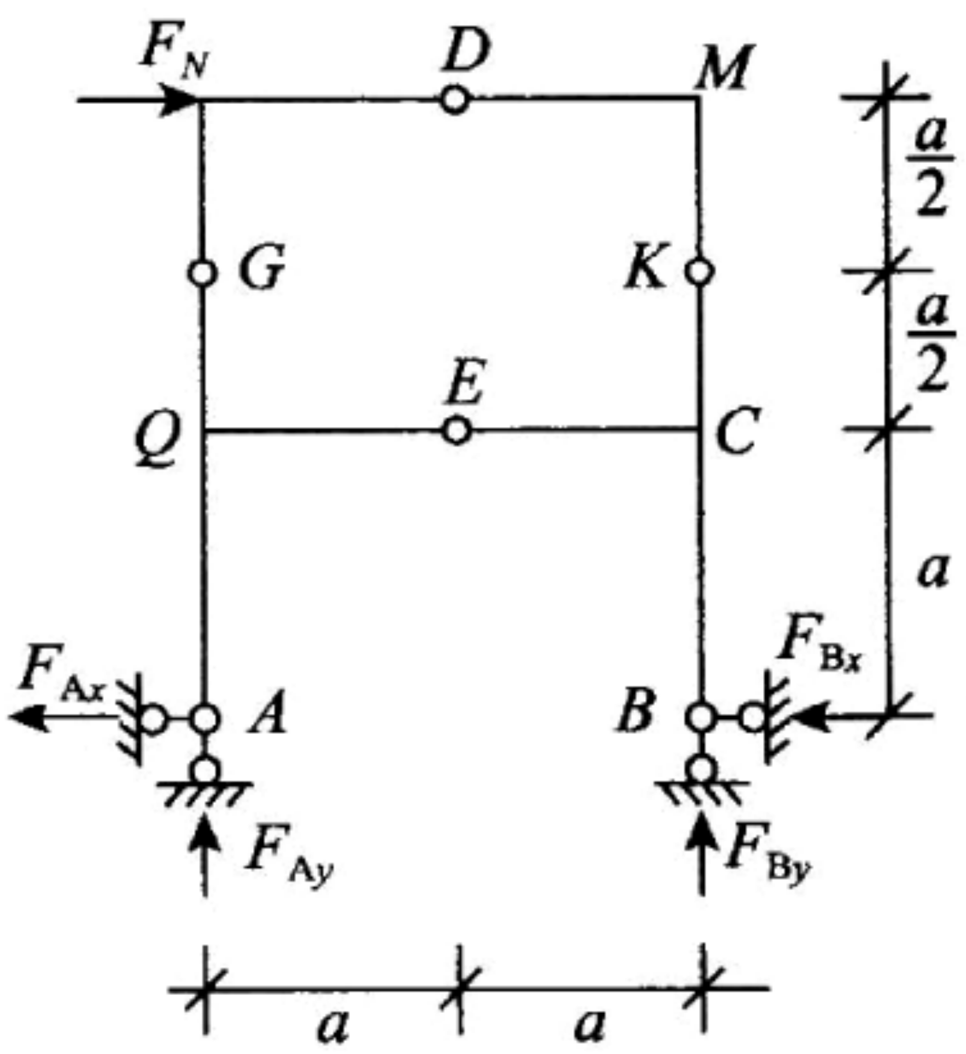


图 3-2-63（题 3-21 解图）

3-21　解：具体解答如下

$$\sum M_A=0, F_{By}\cdot 2a-F\cdot 2a=0, F_{By}=F$$
$$\sum F_y=0, F_{Ay}=-F$$

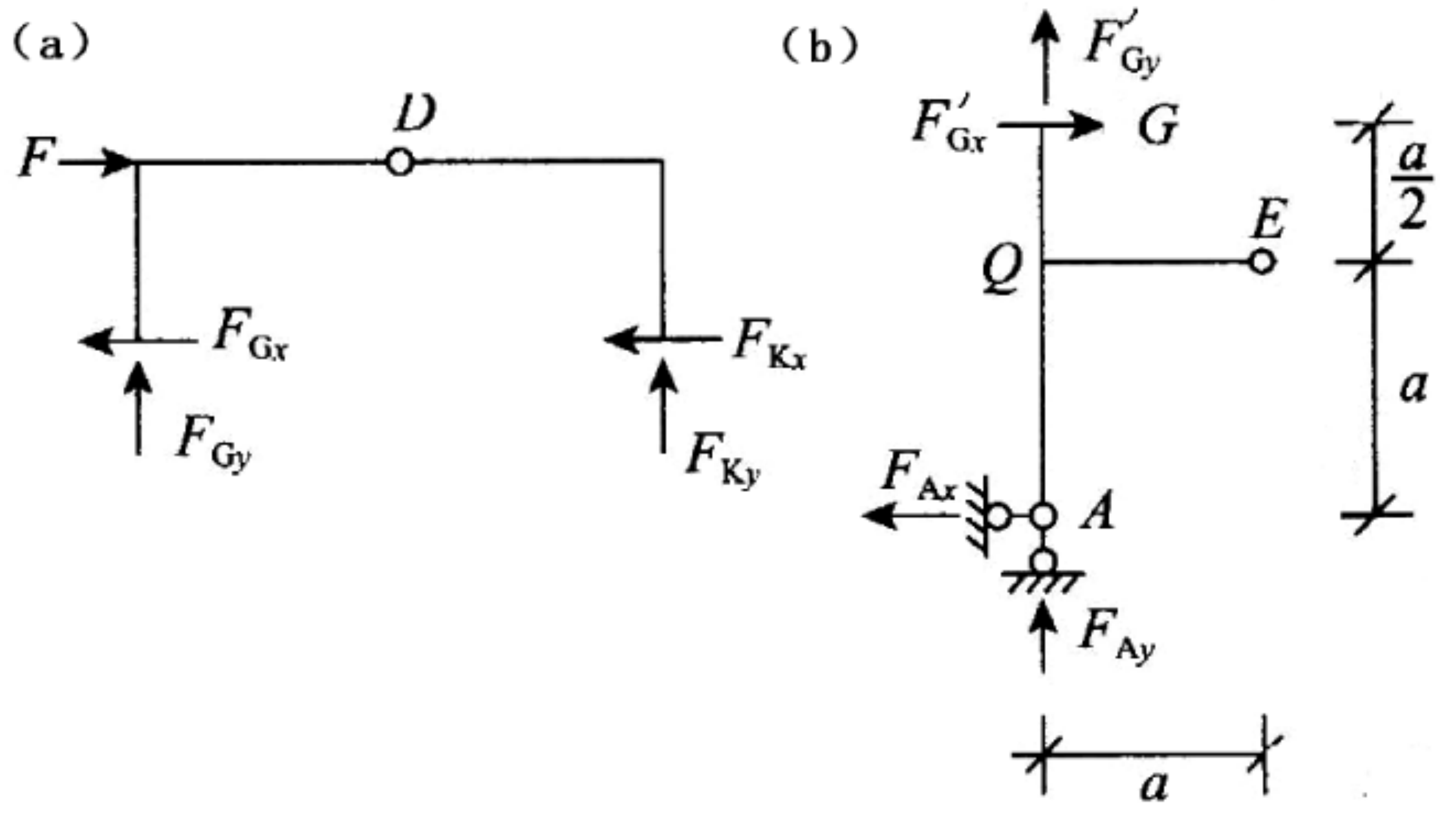


图 3-2-64

对上部结构图进行分析，如图 3-2-64（a）所示。

$$\sum M_G=0 \Rightarrow F_{ky} \cdot 2a-F \cdot \frac{a}{2}=0 \Rightarrow F_{ky}=\frac{F}{4}$$

$$\sum M_D=0 \Rightarrow F_{ky} \cdot a-F_{kx} \cdot \frac{a}{2}=0 \Rightarrow F_{kx}=\frac{F}{2}$$

故

$$M_{Mk}=\frac{F}{2} \cdot \frac{a}{2}=\frac{1}{4}Fa$$

取如图 3-2-64（b）所示部分受力进行分析，则$\sum M_E=0$，有

$$F_{Ax} \cdot a+F'_{Gx} \cdot \frac{a}{2}+F'_{Gy} \cdot a-F_{Ay} \cdot a=0$$

且

$$F'_{Gx}=F_{Kx}=\frac{F}{2}, F'_{Gy}=F_{Ky}=\frac{F}{4}$$

解得

$$F_{Ax}=\frac{F}{2}(\leftarrow)$$

由$\sum F_x=0$，则

$$F_{Bx}=\frac{F}{2}(\leftarrow)$$

故可求得

$$M_{PB}=\frac{1}{2}F \cdot a=\frac{1}{2}Fa, M_{DE}=M_{PB}+M_{PM}=\frac{3}{4}Fa$$

最后由弯矩叠加法可画出弯矩图如图 3-2-65 所示。

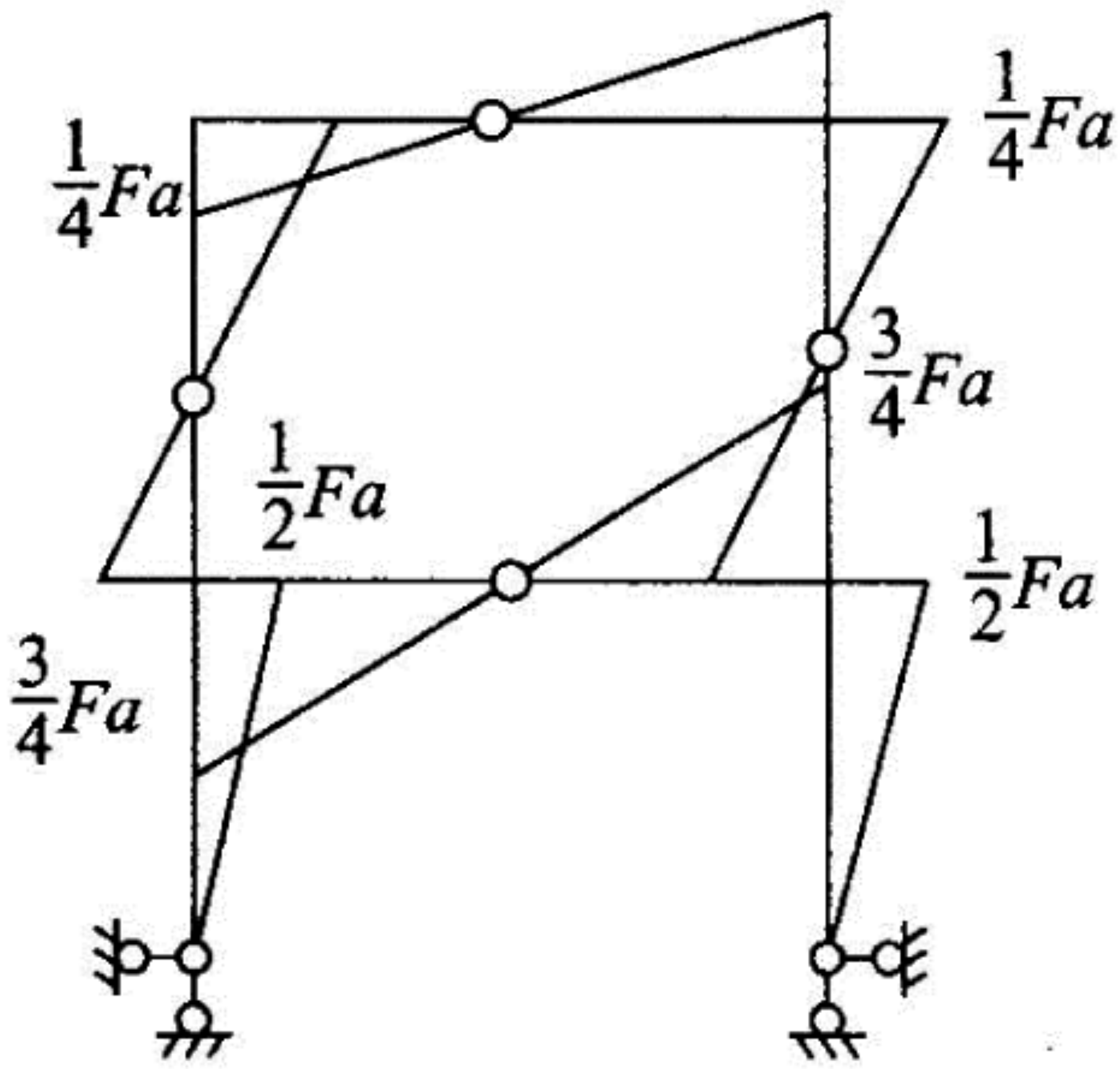


图 3-2-65

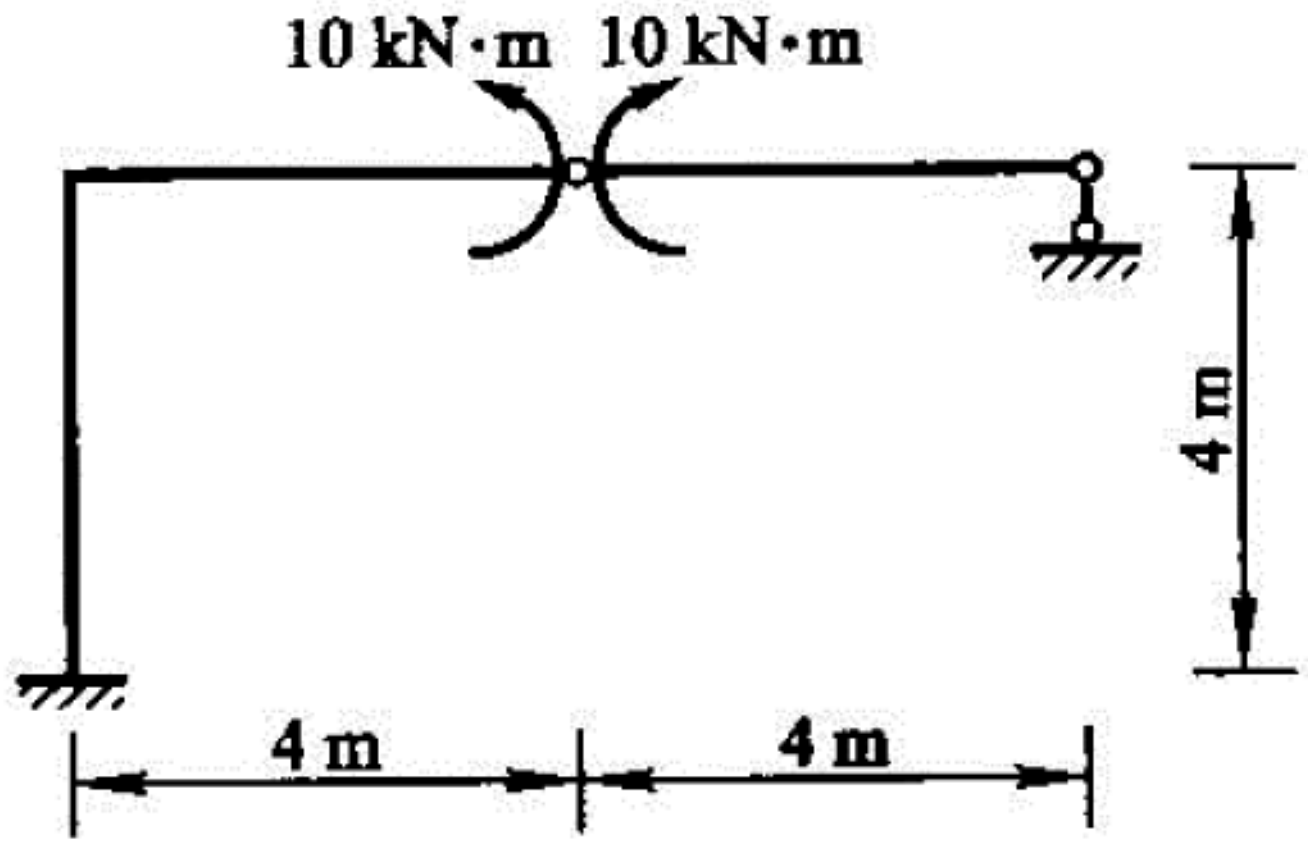


图 3-2-66（题 3-22）

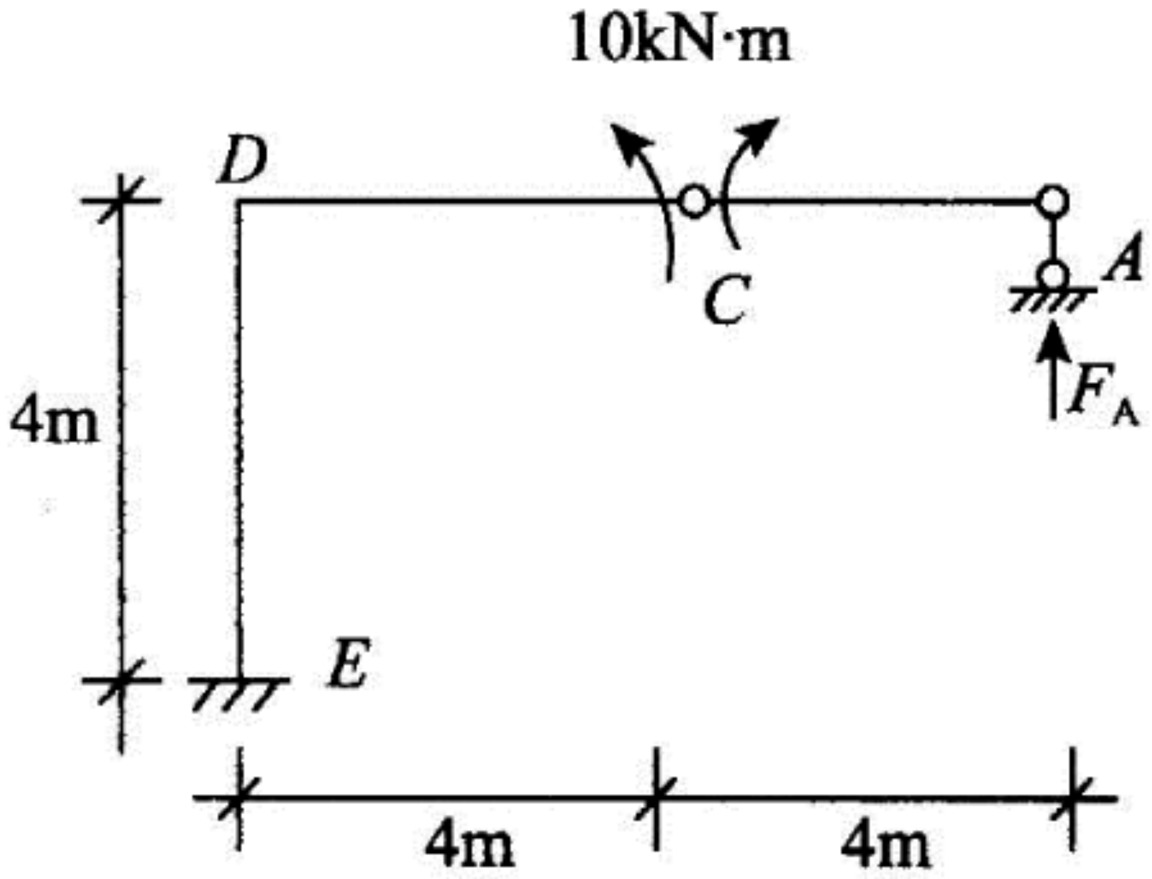


图 3-2-67（题 3-22 解图）

3-22　解：求解内力

$$\sum M_C=0, F_A \cdot 4-10=0, F_A=2.5\text{kN}$$
$$M_D=F_A \cdot 8=20\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

由于 DE 段无外力作用，故弯矩为定值 20kN・m。可做弯矩图如图 3-2-68 所示。

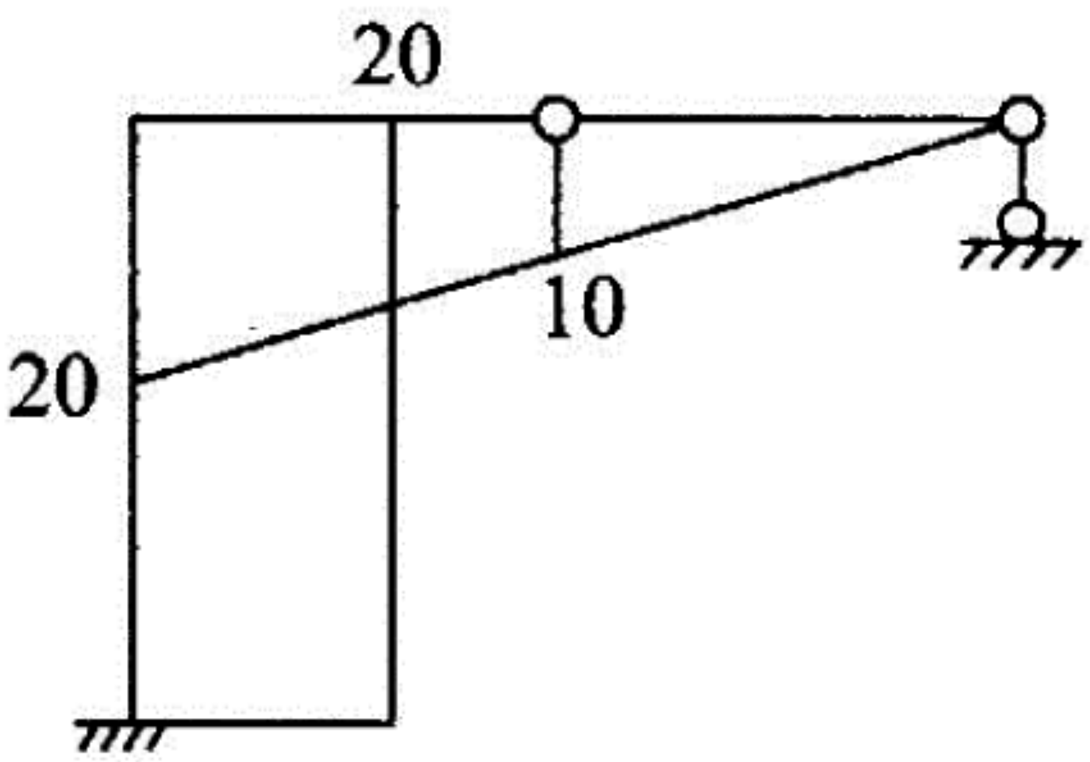


图 3-2-68

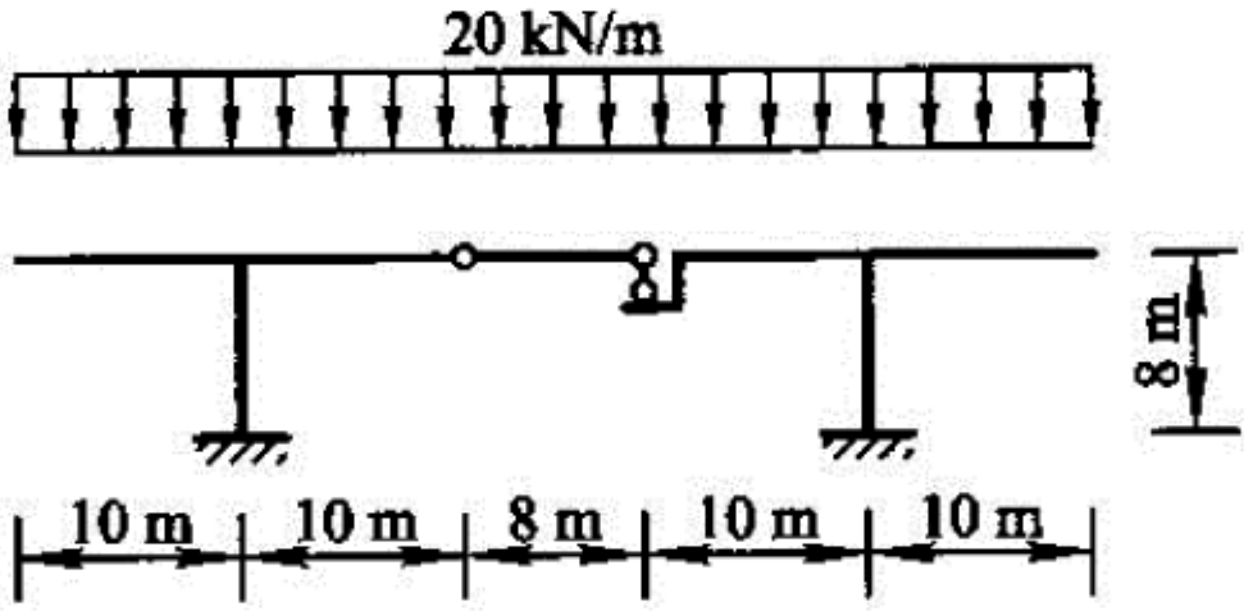


图 3-2-69（题 3-23）

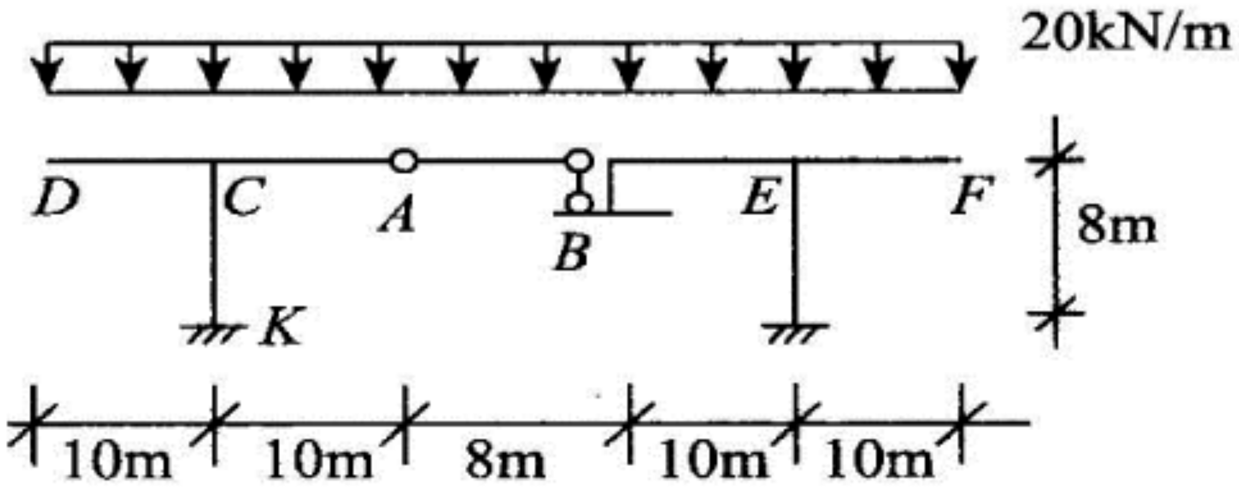


图 3-2-70（题 3-23 解图）

3-23　解：易知

$$M_{CD}=M_{EF}=20\times10\times5=1000\text{kN}\cdot\text{m}（上侧受拉）$$

对 AB 段做内力分析，根据平衡条件可求得

$$\sum M_A=0, F_{By}\cdot8-20\times8\times4=0, F_{By}=80\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0, F_{Ay}=80\ \text{kN}$$

$$M_{CA}=80\times10+20\times10\times5=1800\ \text{kN}\cdot\text{m}(上侧)$$

同理可求得

$$M_{EB}=1800\text{kN}\cdot\text{m}（上侧受拉）$$

C 点的弯矩平衡，可算得

$$M_{CK}=1800-1000=800\text{kN}\cdot\text{m}（左侧受拉）$$

故可画出弯矩图如图 3-2-71 所示。

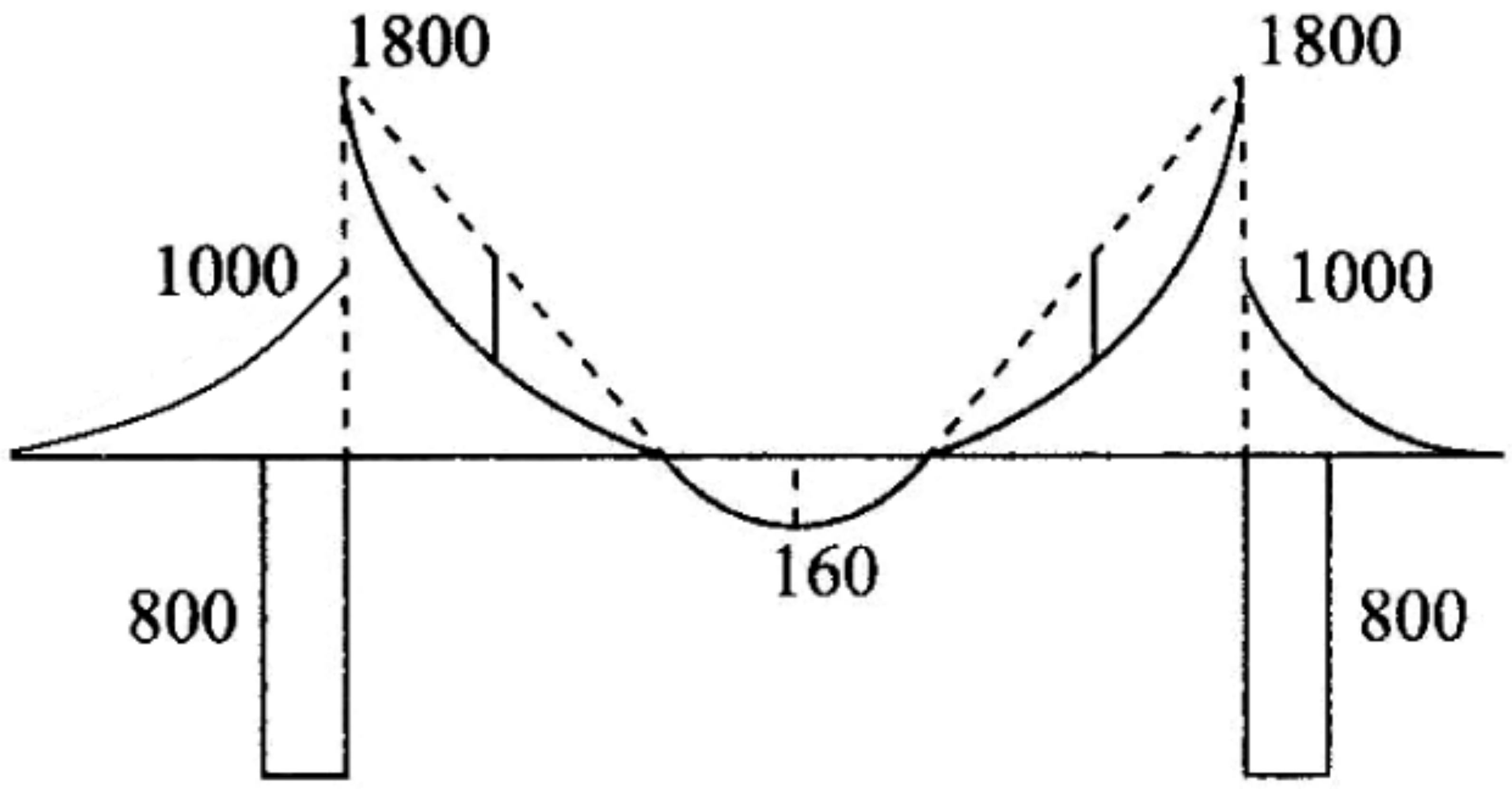


图 3-2-71

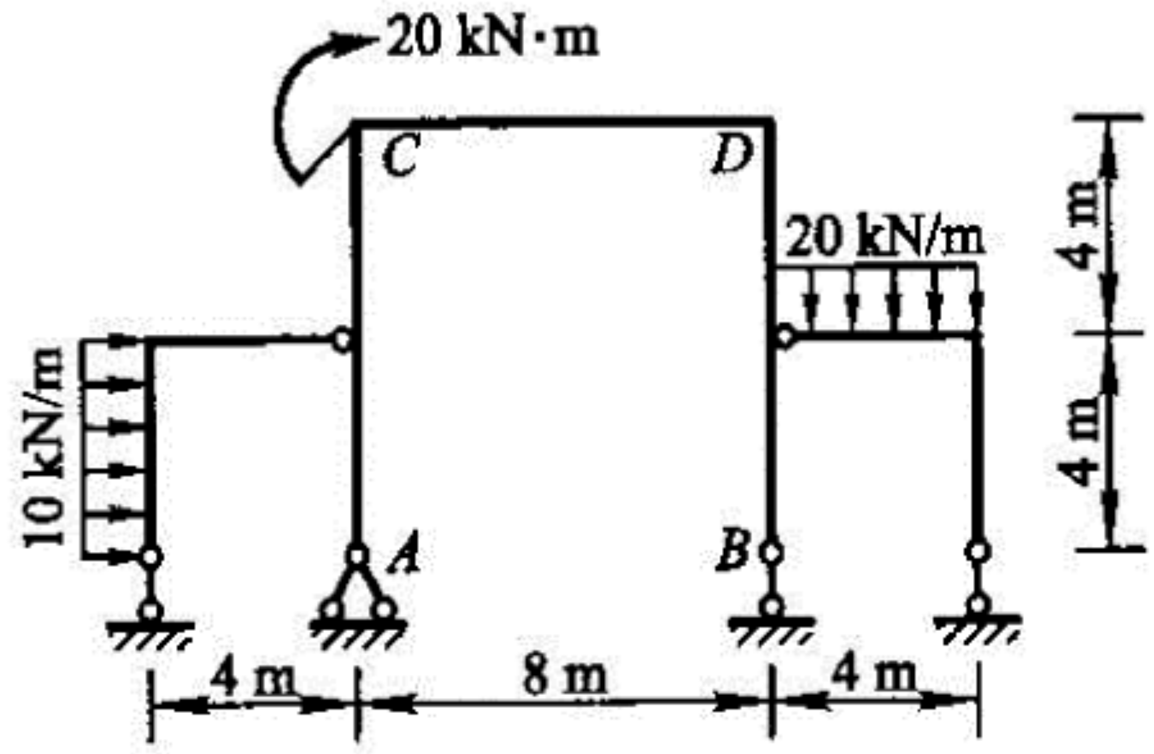


图 3-2-72（题 3-24）

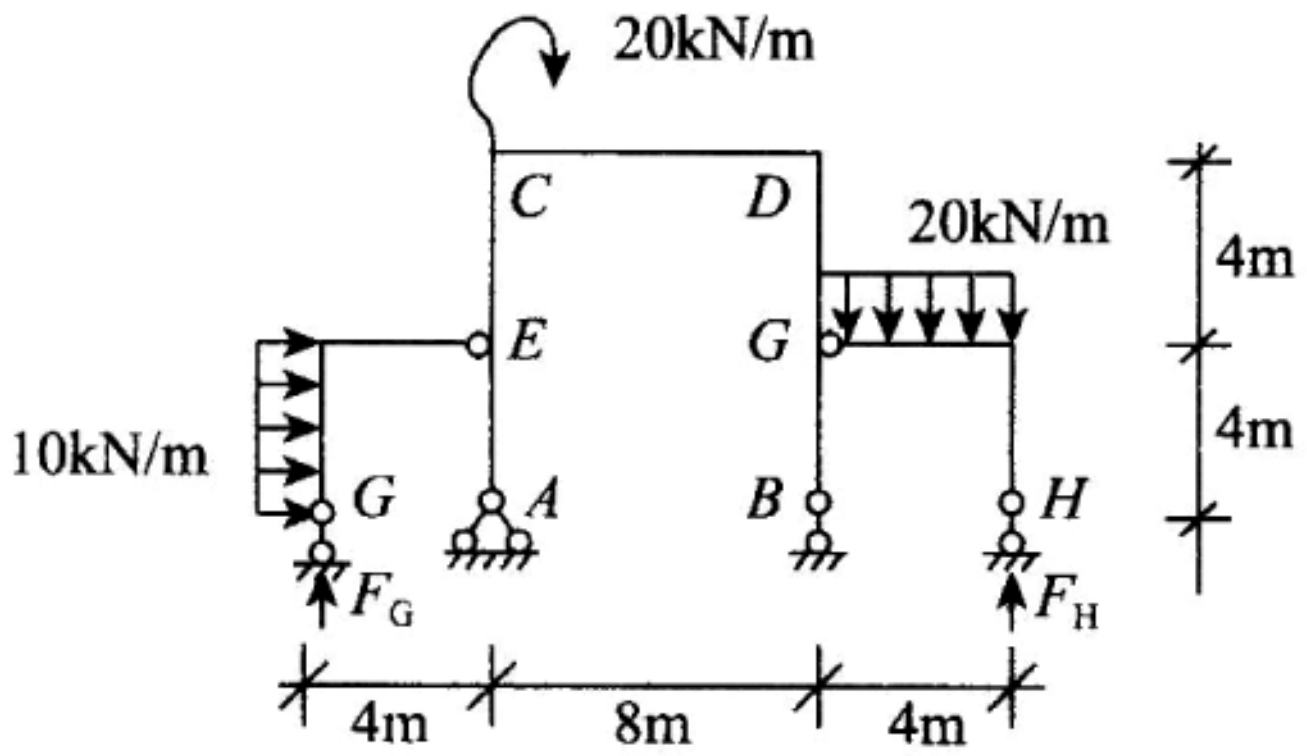


图 3-2-73（题 3-24 解图）

3-24　解：内力求解如下，内力求解图示如图 3-2-74 所示，

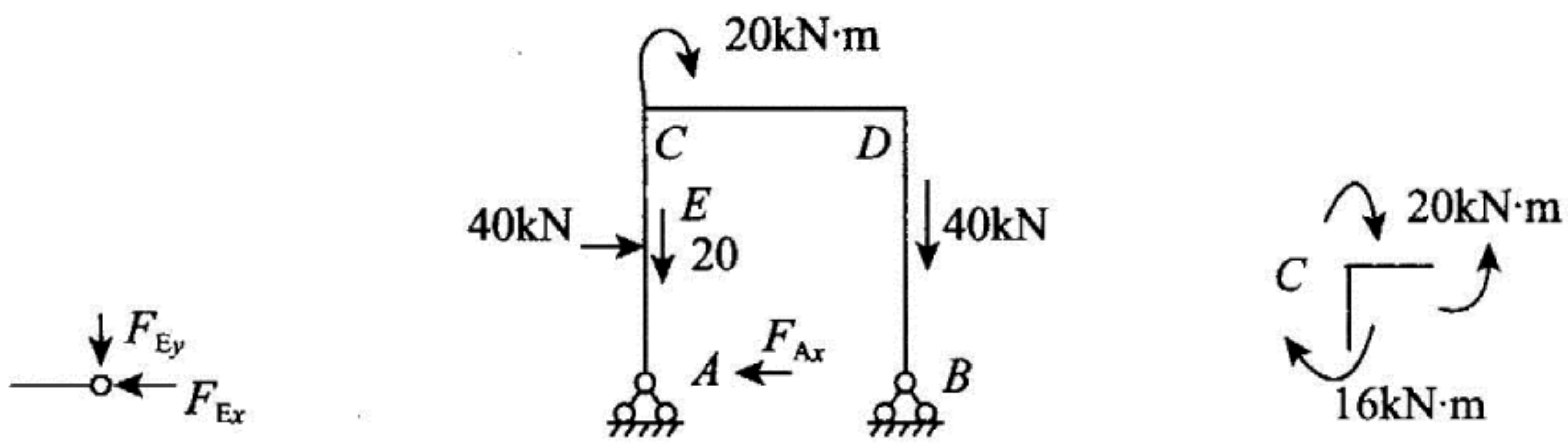


图 3-2-74

对于左侧附属结构

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{Gy} \times 4 - 10 \times 4 \times 2 = 0 \Rightarrow F_{Gy} = 20kN$$
$$\sum F = 0 \Rightarrow F_{Ey} = 20kN, F_{Ex} = 10 \times 4 = 40kN$$

对于右侧附属结构

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_H \cdot 4 - 20 \times 4 \times 2 = 0 \Rightarrow F_H = 40kN$$

对主结构受力分析

$$\sum F_x = 0, F_{Ay} = 40\ \text{kN}$$
$$M_{EA} = 40 \times 4 = 160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{CA} = 40 \times 8 - 40 \times 2 = 160\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_{CD} = M_{DA} + 20 = 180\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

故可画出弯矩图如图 3-2-75 所示。

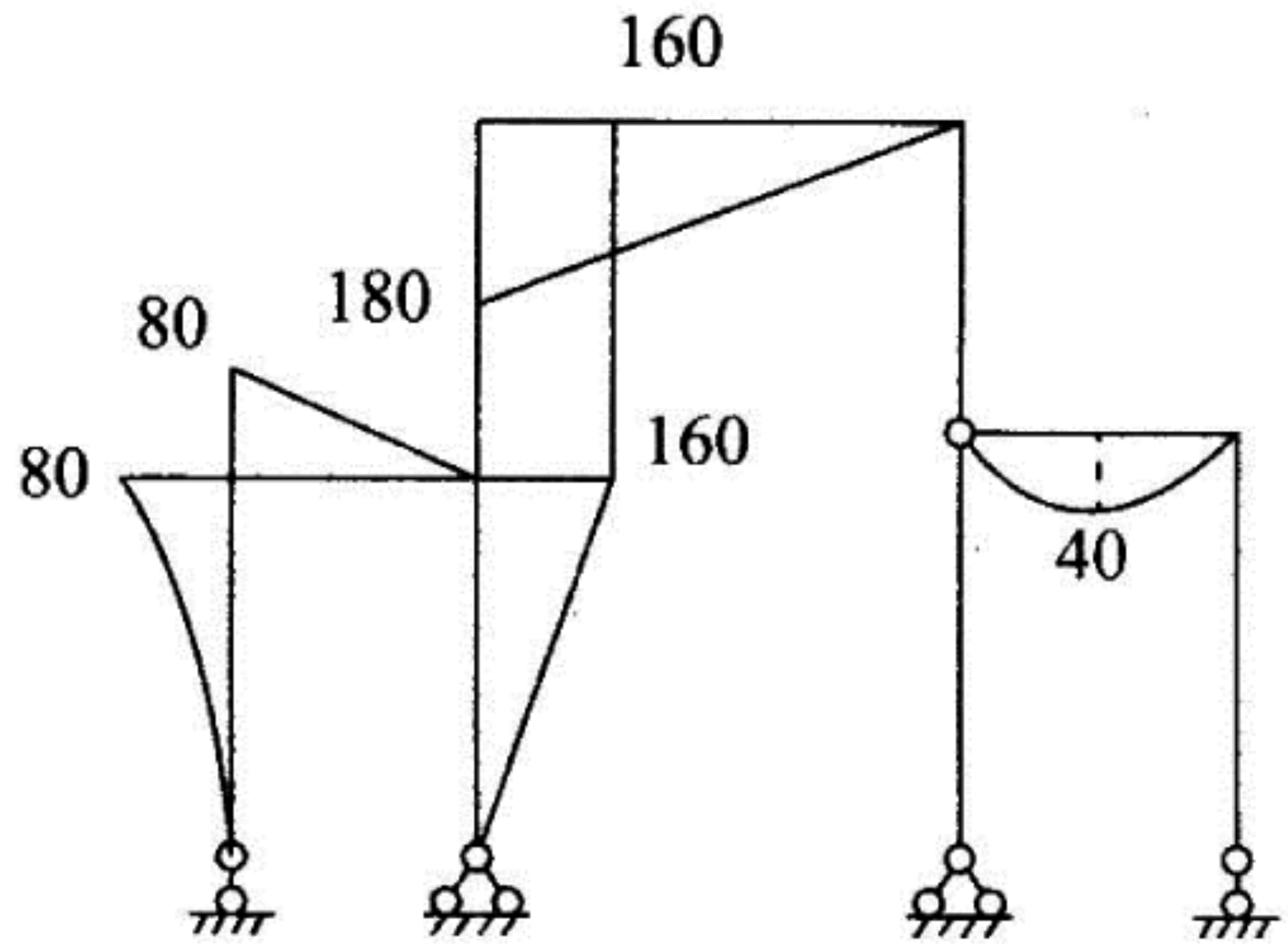


图 3-2-75

3-25　图示各弯矩图是否正确？如有错误试加以改正。

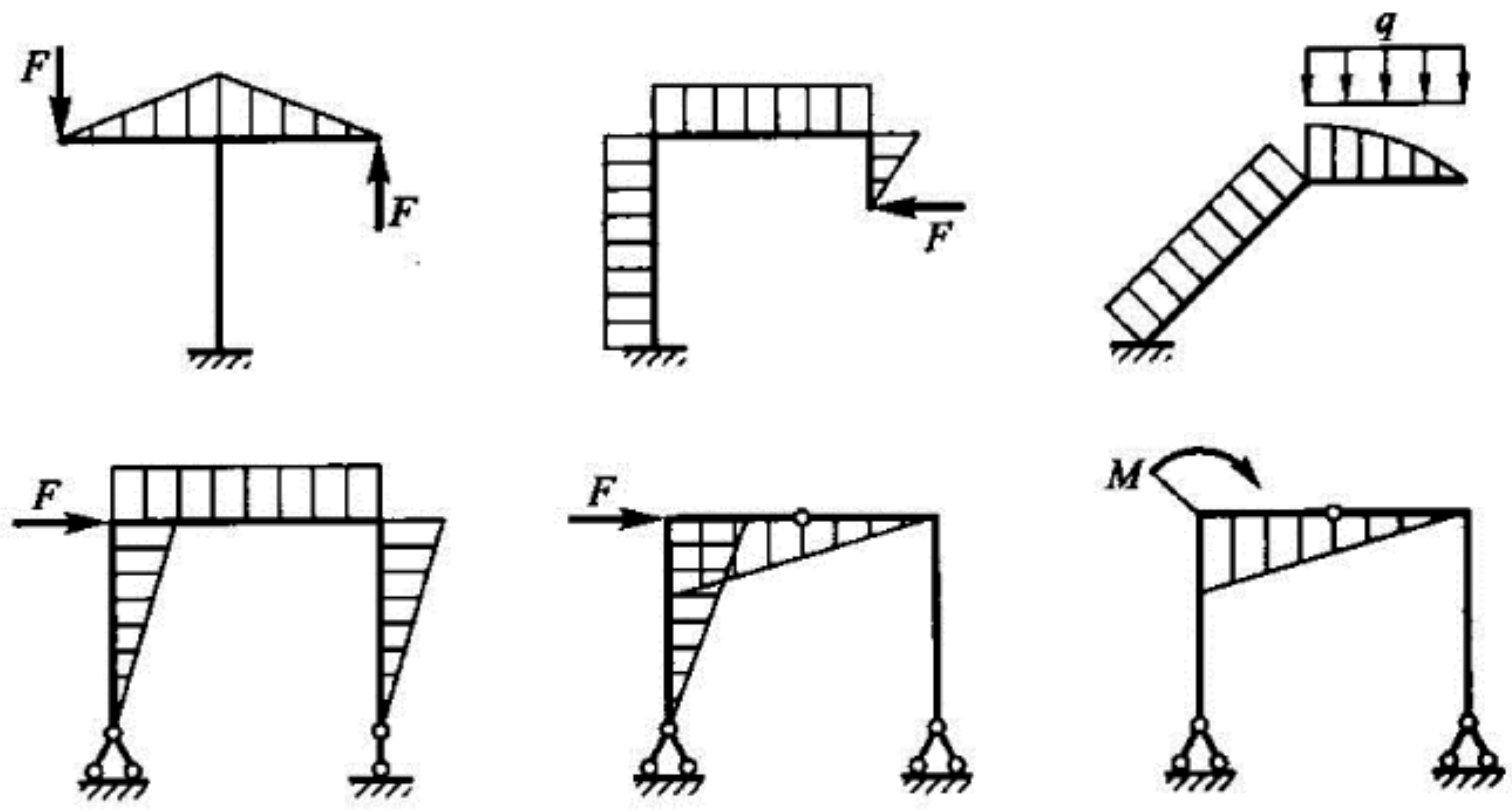


图 3-2-76（题 3-25）

答：图示所有弯矩图均有错误，正确的弯矩图如图 3-2-77 所示。

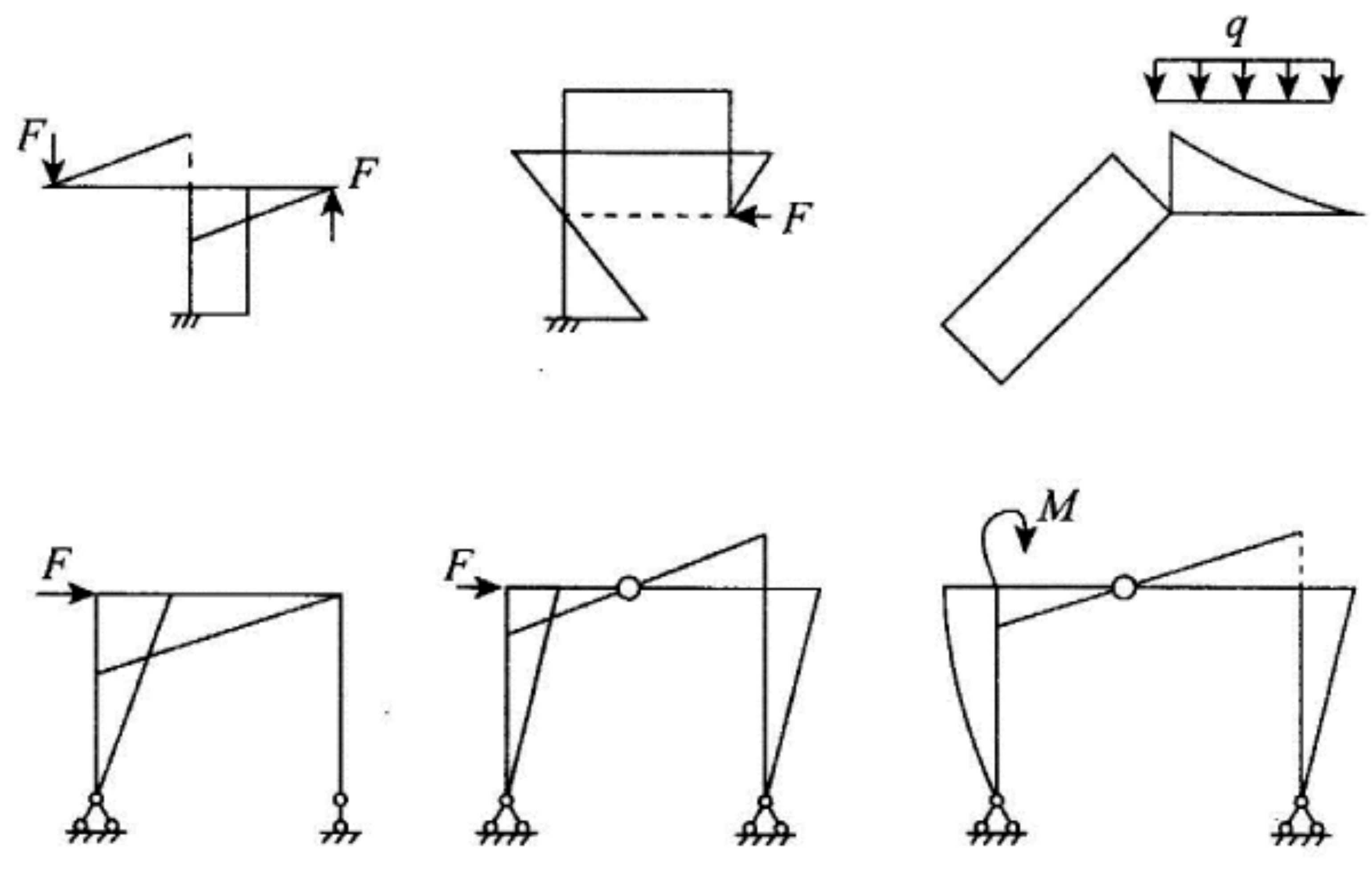


图 3-2-77

3-26　已知结构的弯矩图，试绘出其荷载。

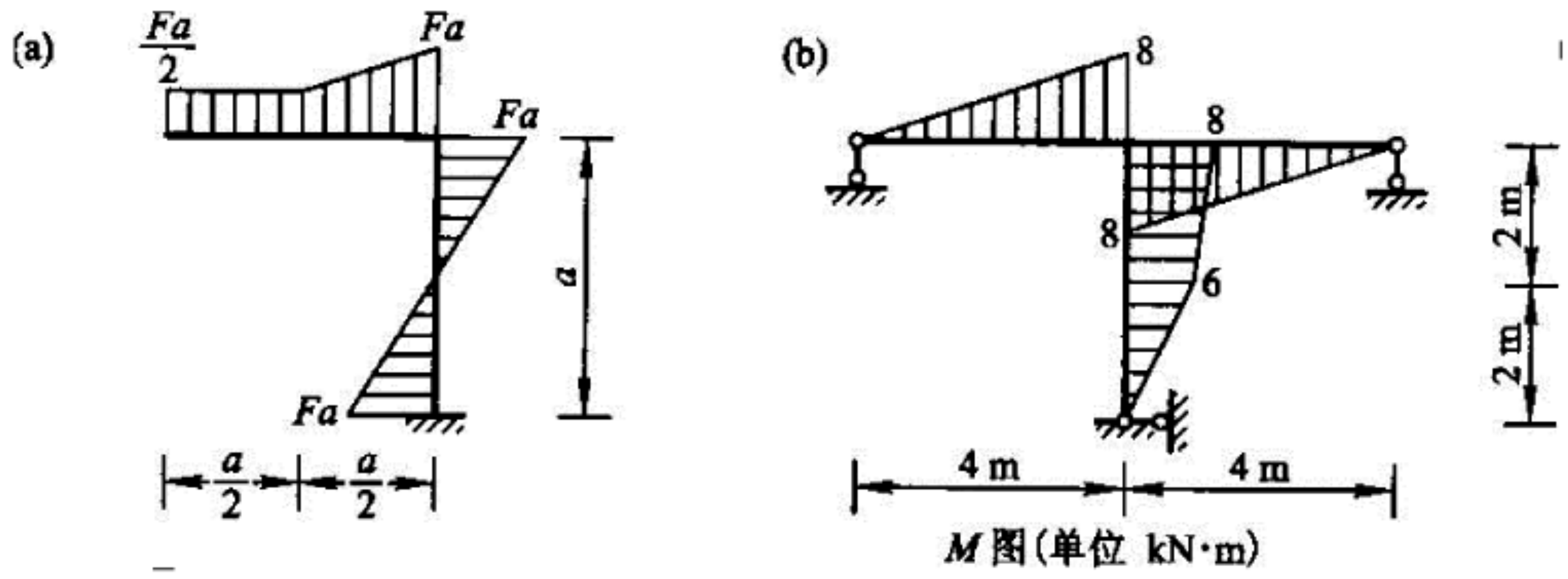


图 3-2-78（题 3-26）

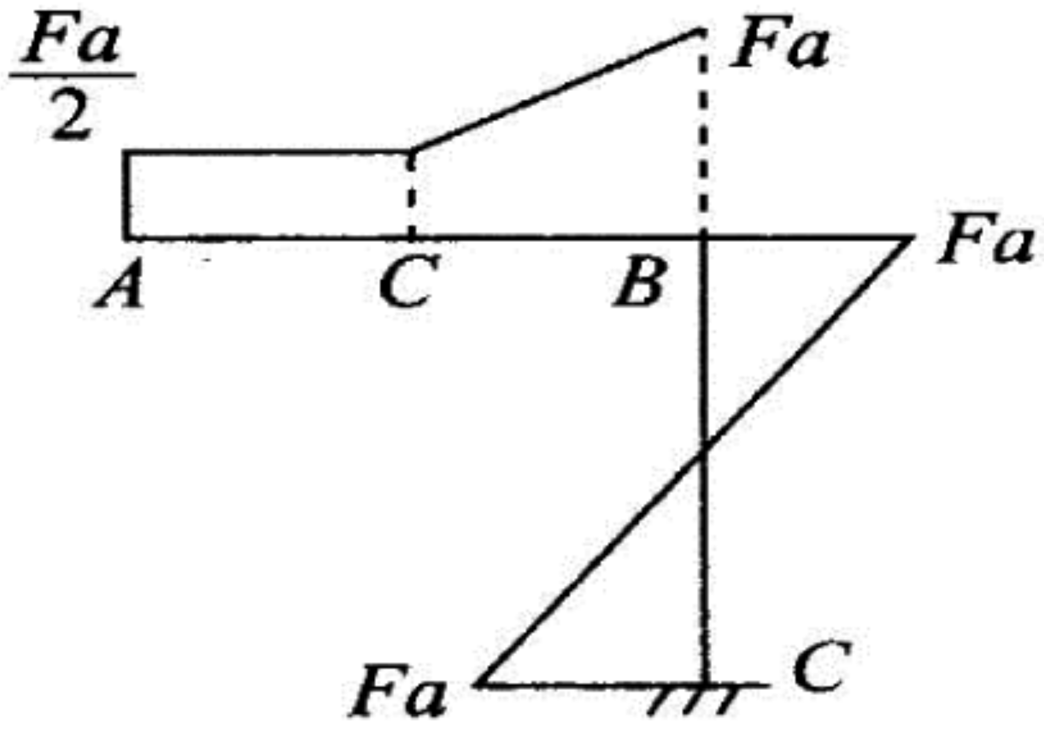


图 3-2-79（题 3-26（a）解图）

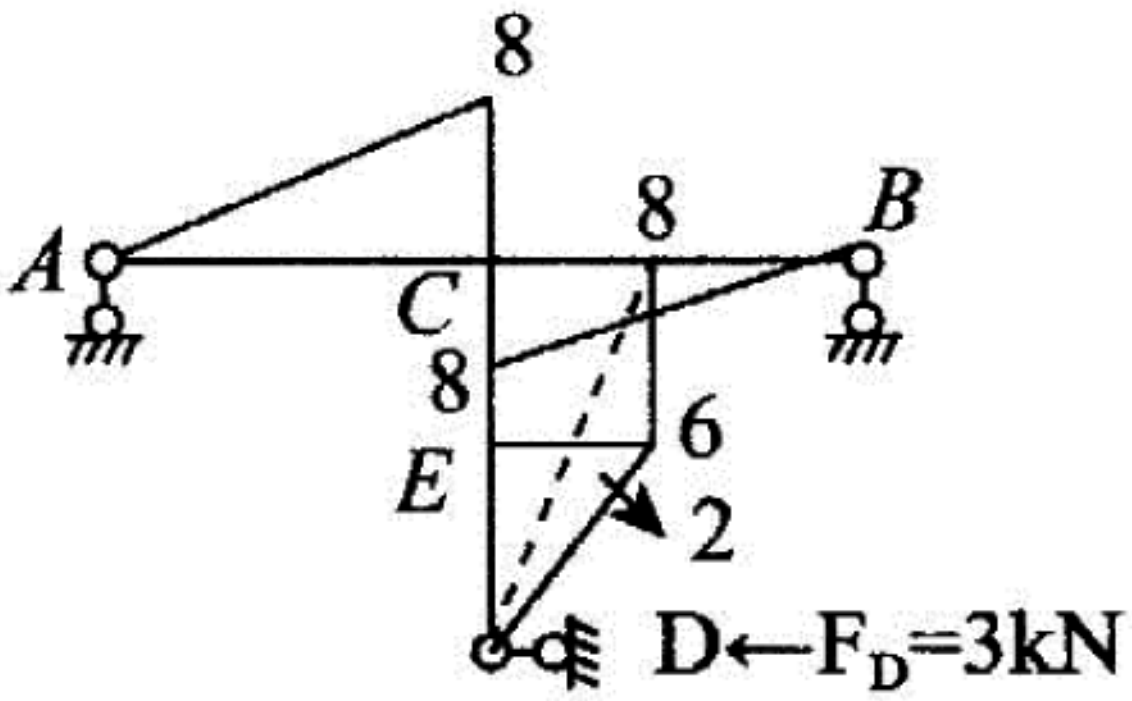


图 3-2-80（题 3-26（b）解图）

解：对（a）图分析，A 点处有弯矩，故 A 处必有一集中弯矩 M 且 $M=\frac{Fa}{2}$

在 C 处弯矩有转折点，且向下弯折，故 C 处有一集中力且方向向下。集中力大小为

$$F_{外}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}=\frac{Fa+Fa}{a}=F$$

BC 处弯矩为一直线，故所受剪力为恒定

$$F_S=F_{外}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}=\frac{Fa+Fa}{a}=2F$$

此力加在 AB 上是一水平方向的力，其中一种情况如图 3-2-81 所示，代入验证知，上述判断正确。

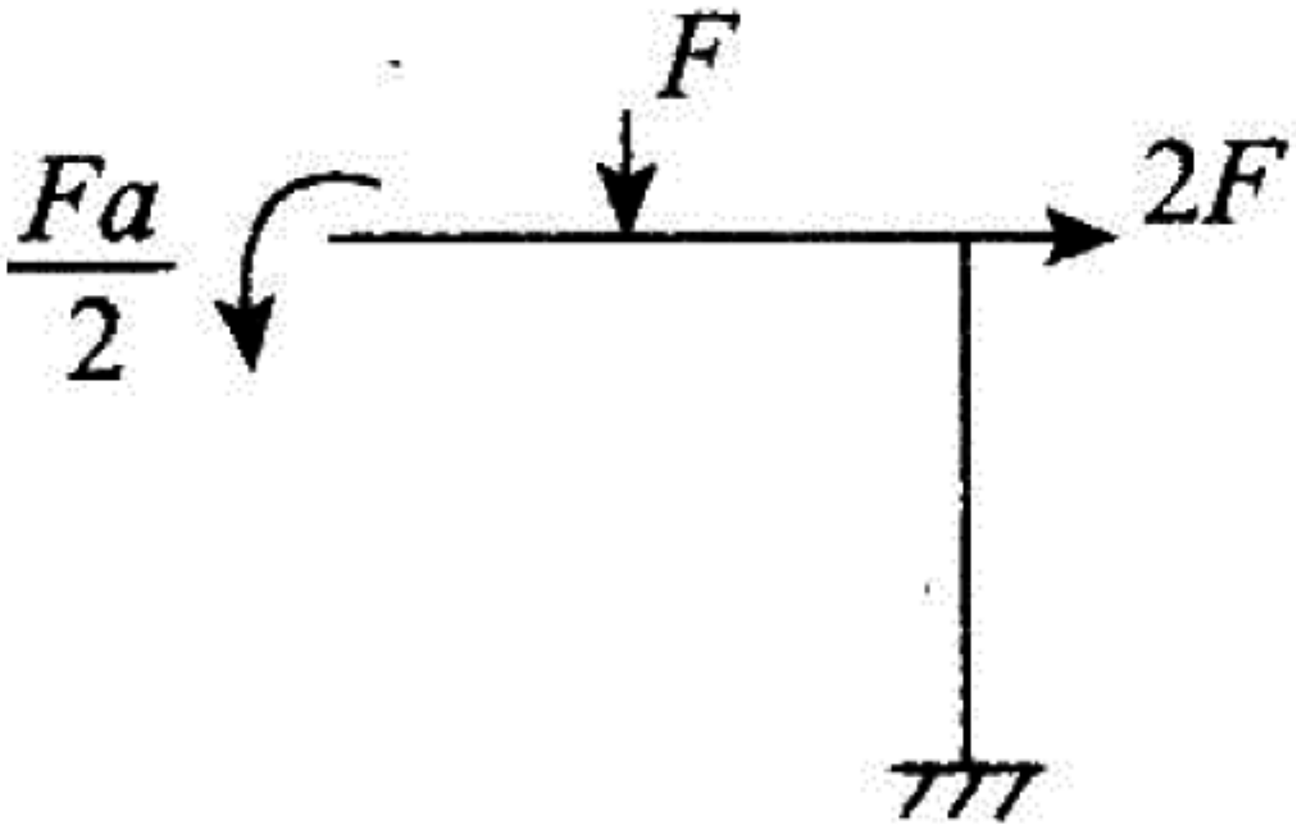


图 3-2-81

对（b）图分析，由 C 处结点弯矩不平衡，知 C 处必有一集中力偶

$$M_{外}=8+8-8=8kN\cdot m$$

又知 CD 之间弯矩图有弯折，故 E 点必有一向右的集中力 $F_{外}$

$$M=6-4=\frac{F\times2\times2}{4}\Rightarrow F_{外}=2\ kN$$

由 $M_{ED}=6kN\cdot m$，有

$$F_D\cdot2=6\Rightarrow F_D=3kN$$

由于支座 A、B 不能提供水平力，故在 AB 段必有 1kN 水平力且方向向右。
受力如图 3-2-82 所示，代入验证，上述判断正确。

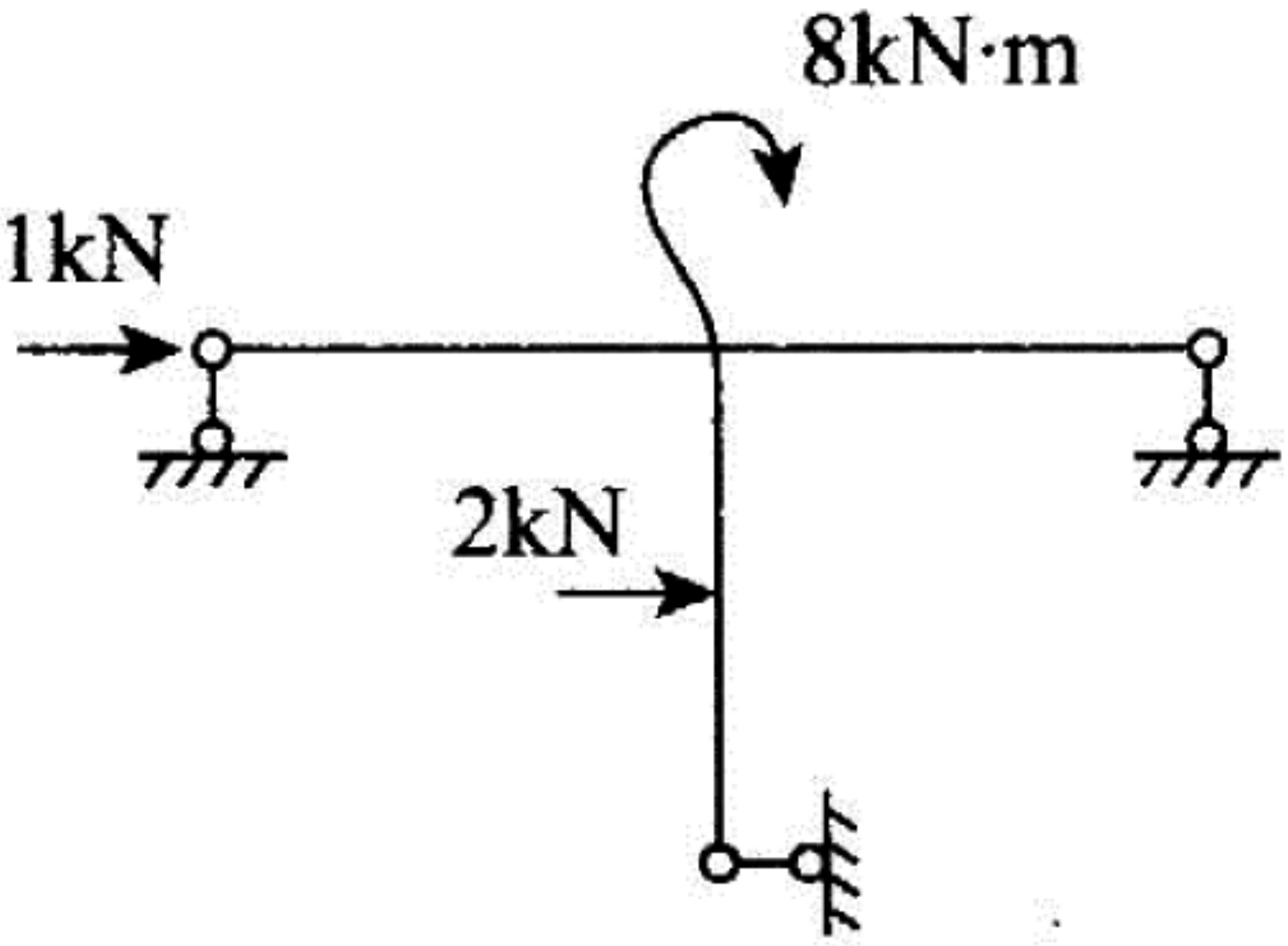


图 3-2-82

3-27　试绘出图示结构弯矩图的形状。

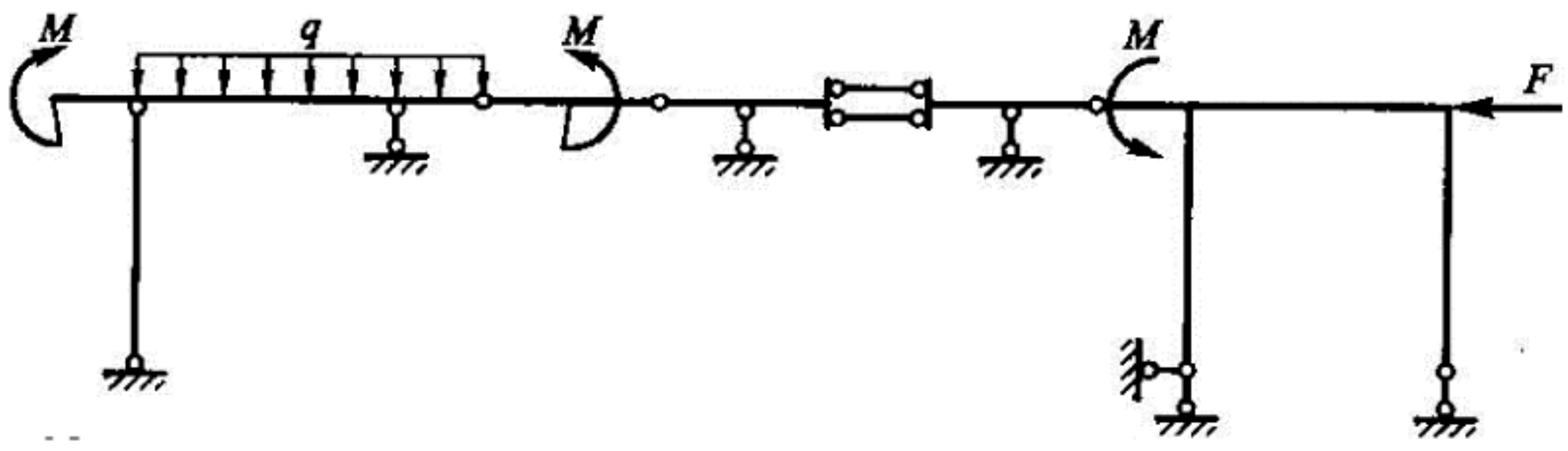


图 3-2-83（题 3-27）

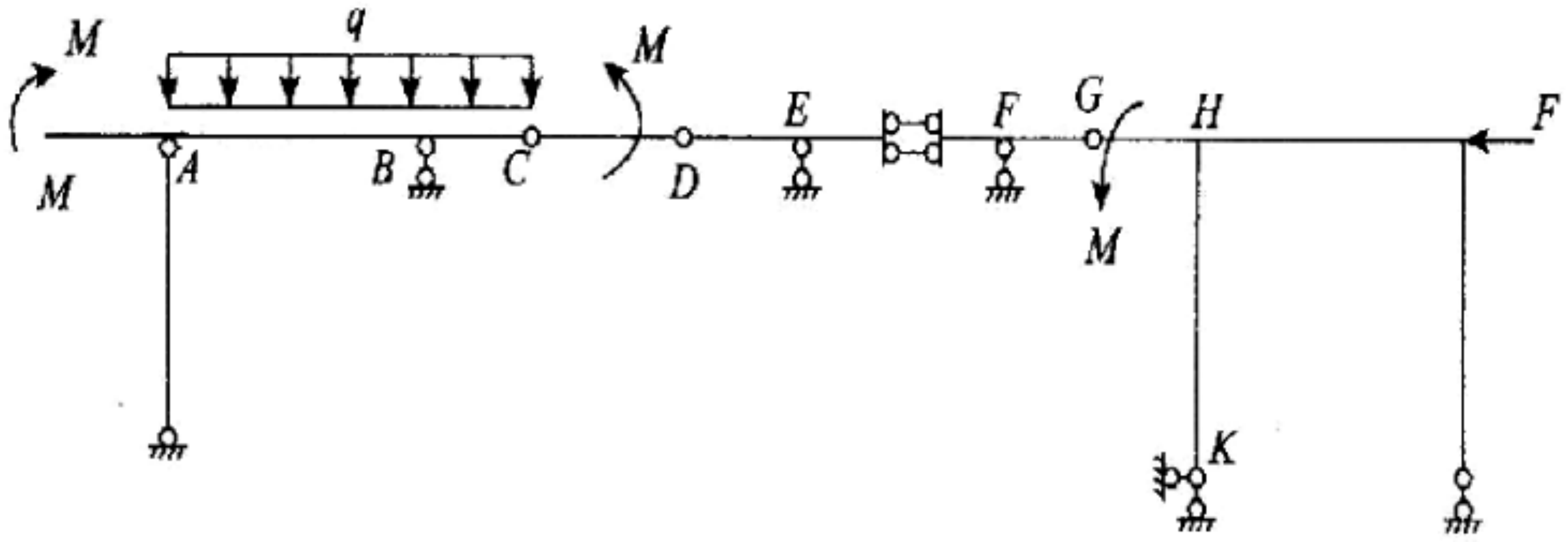


图 3-2-84（题 3-27 解图）

解：此题不需计算，可直接画出弯矩图。

对于 AM 段，弯矩大小均为 M 对于 CD 段易判断出弯矩图。D 点弯矩为 0，且 DE 之间为一直线。EF 之间无剪力，那么弯矩大小不变；

对于 GH 段，由于 G 点为铰，GH 段剪力大小相等，GH 段剪力与 FG 段相同；易判断 $F_{KX}=F$，那么 KH 段的弯矩图也易判断；

对于 BC 段，C 处弯矩先延伸，再由均布荷载 q 得出 F_B，AB 段均布荷载弯矩叠加。

故可画出最终弯矩图如图 3-2-85 所示。

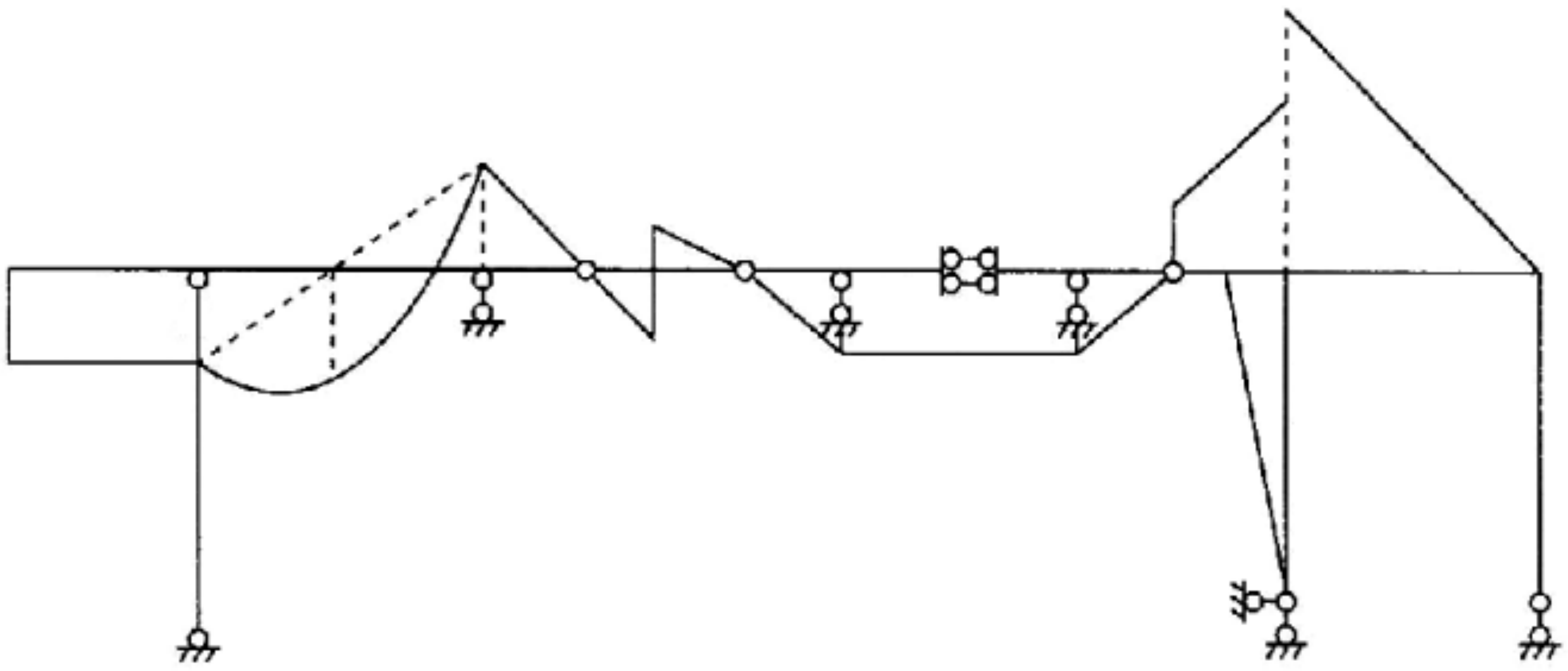


图 3-2-85

3-28　图为一水平面内的刚架承受竖直均布荷载 q 及力偶荷载 $M=\frac{1}{3}qb^2$。试作刚架内力图。

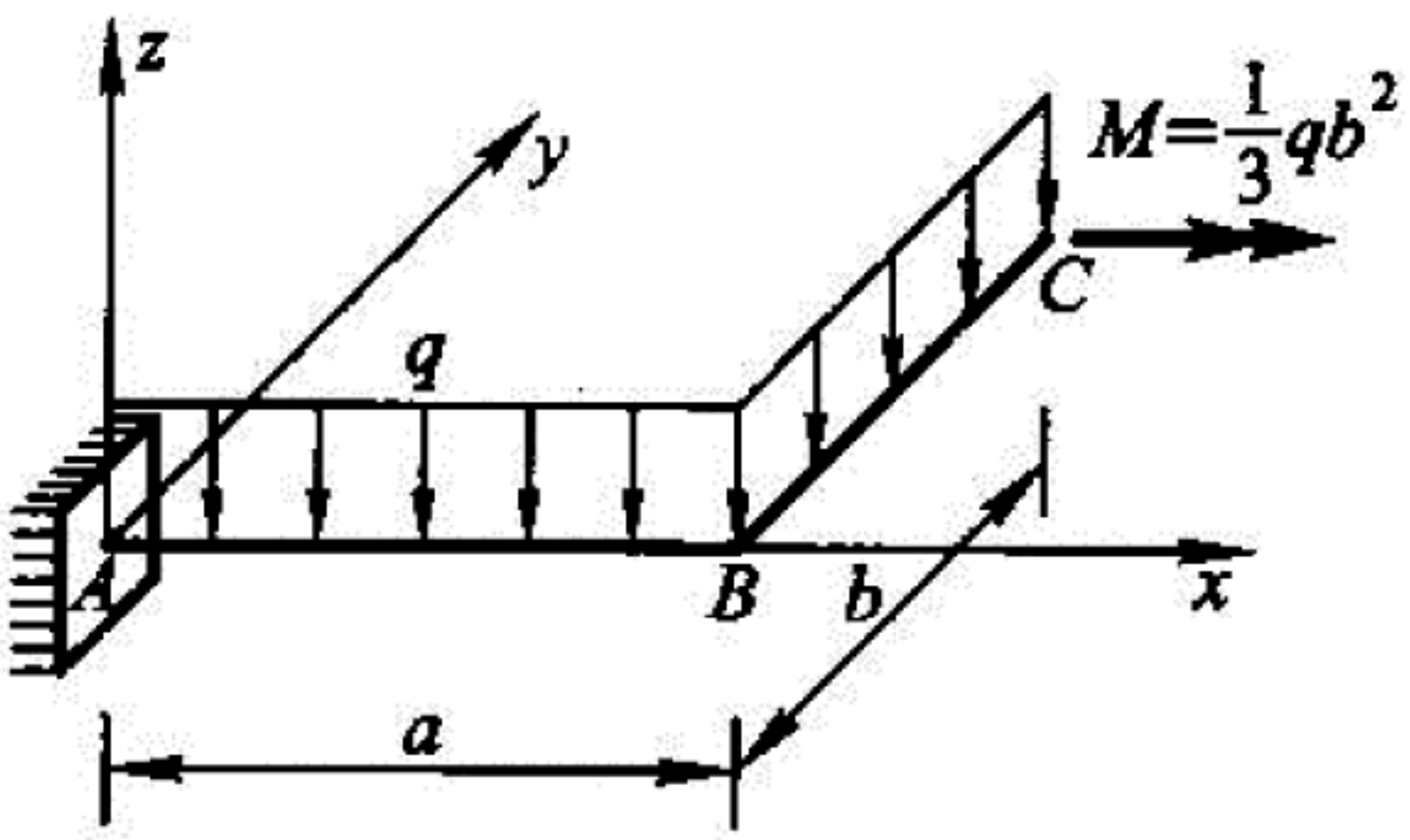


图 3-2-86（题 3-28）

解：此题空间的受力情况的分析，具体分析过程如下

对于 BC 段

$$M_{BC}=\frac{1}{2}qb^2-\frac{1}{3}qb^2=\frac{1}{6}qb^2$$

对于 AB 段

$$M_{AB}=\frac{1}{2}qa^2+qb\cdot a=\frac{1}{2}qa^2+qab$$

$$M_t=M_{BC}=\frac{1}{6}qb^2$$

$$F_{BC}=qb$$

$$F_{AB}=qb+qa=q(a+b)$$

故最终的内力图如图 3-2-87 所示。

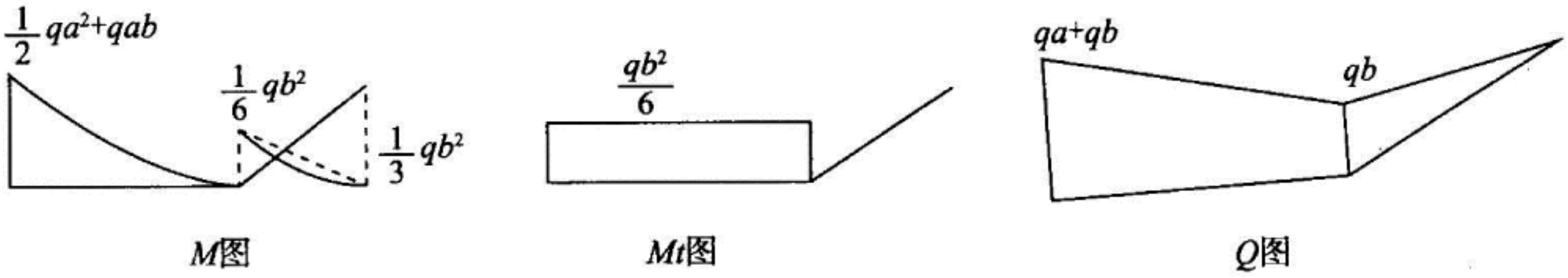


图 3-2-87

3-29　一水平面内的圆环上有一切口，切口两侧有一对等值反向的竖向力F 作用。试求圆环中的剪力、弯矩和扭矩。

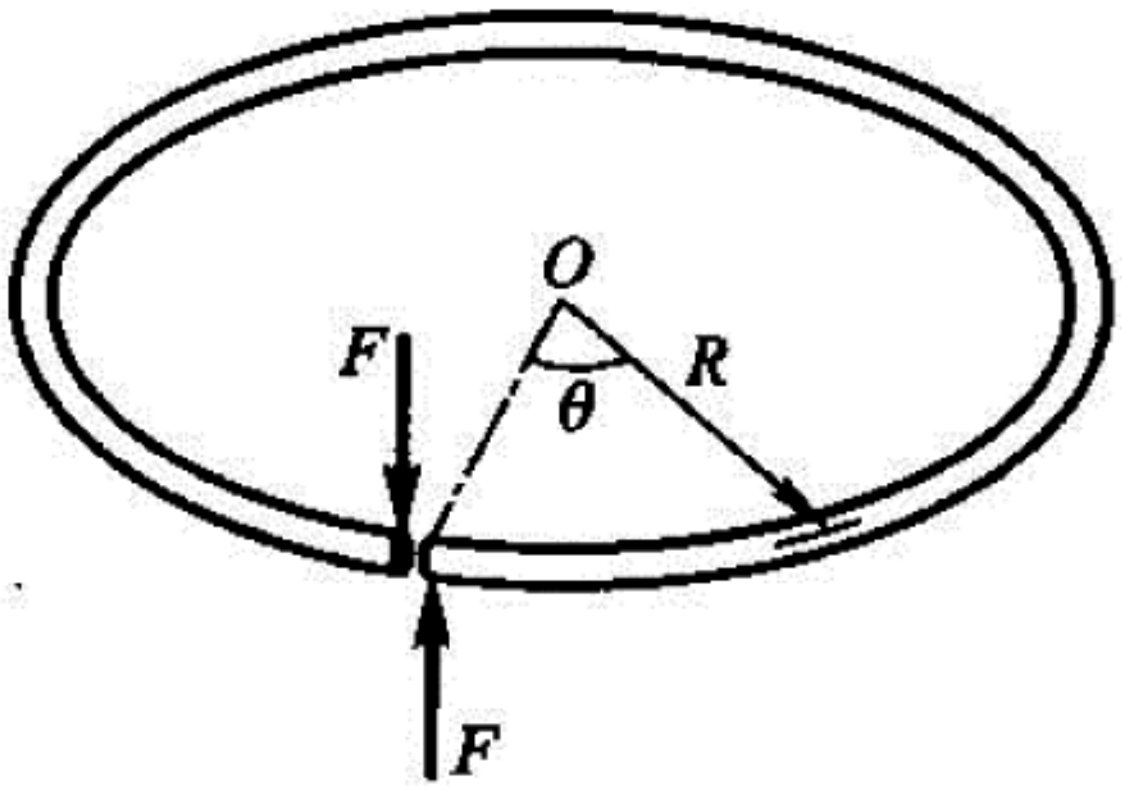


图 3-2-88（题*3-29）

解：此题为空间体系，取出其中一部分隔离体如图 3-2-89 所示进行分析。

根据平衡条件可以求得得弯矩、剪力和扭矩。

Q＝F（正面向上，剪力向下为正）

M＝FRsinθ（下边受拉为正）

M_t＝－FR（1－cosθ）（力偶矢量与截面外法线指向一致为正）

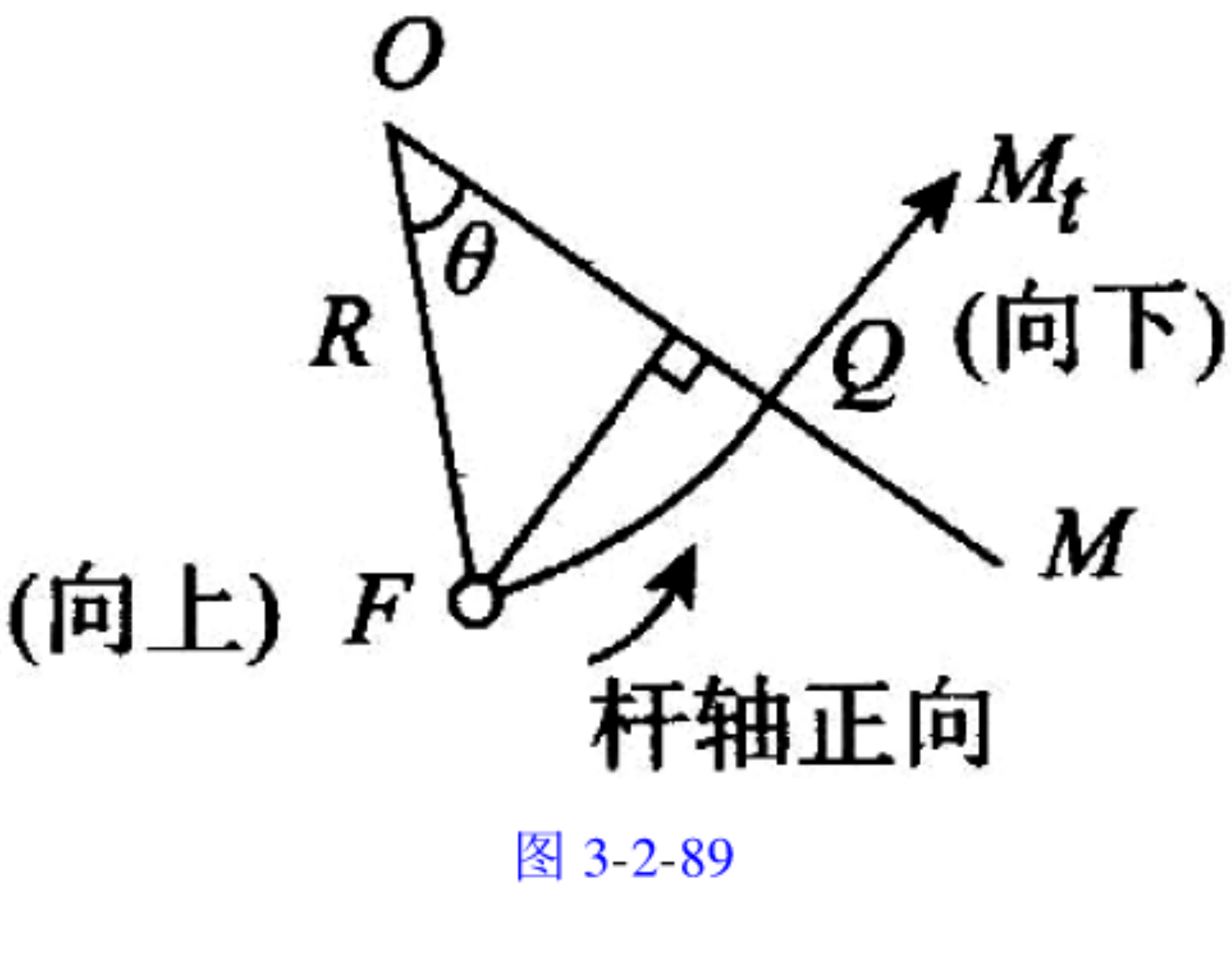


图 3-2-89

3.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 3-3-1 示静定平面刚架，在荷载作用下，支座 B 的水平反力 F_{BX}＝____，截面 D 的弯矩 M_D＝____，____侧受拉。[湖南大学 2007 研]

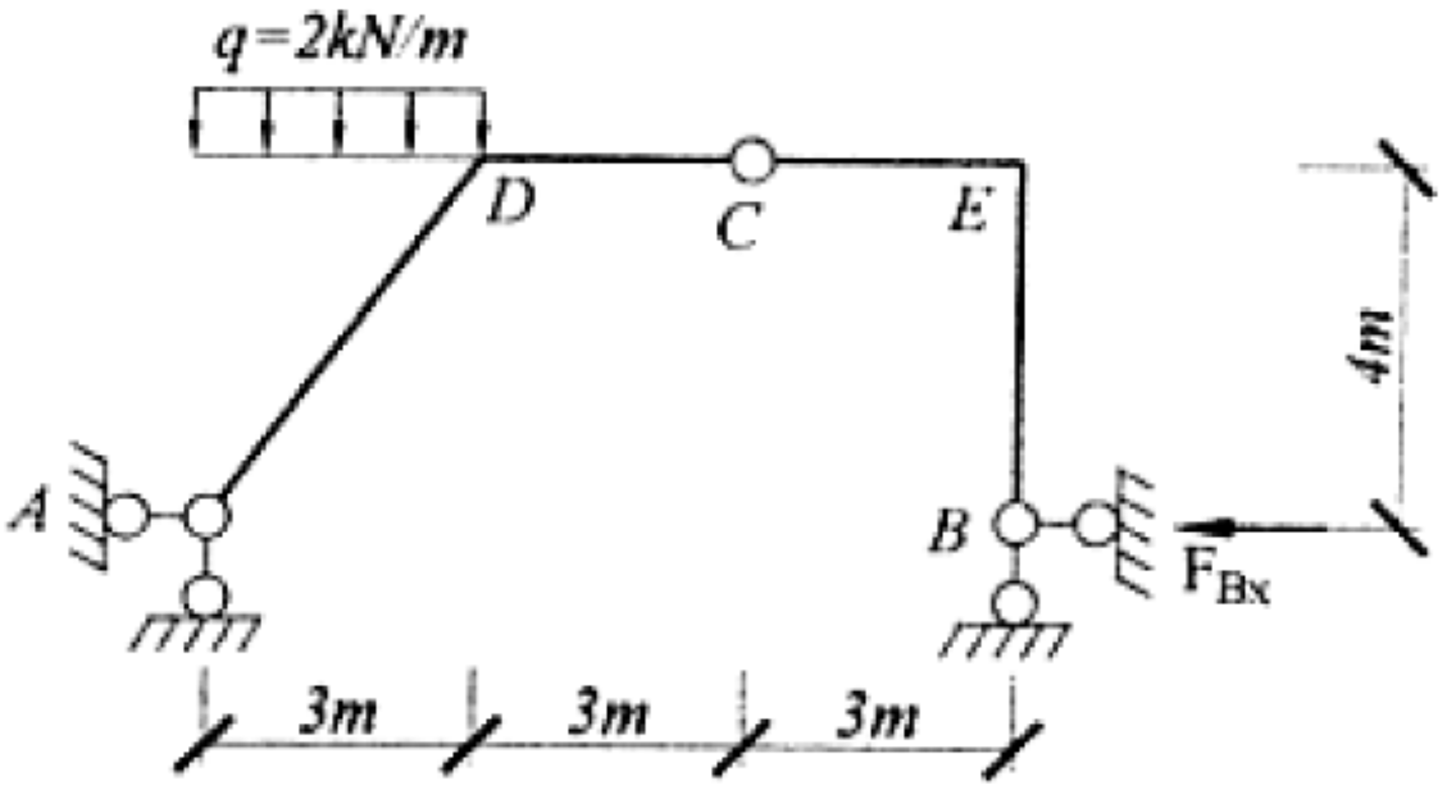


图 3-3-1

【答案】0.75kN ；3kN•m

【解析】先整体受力分析，根据 $\sum M_A = 0$，可求出 B 支座处的竖向反力 $F_{By} = 1kN(\uparrow)$；取 BEF 为隔离体，根据 $\sum M_C = 0$，可算得 B 支座处的水平反力 $F_{Bx} = 0.75kN(\leftarrow)$；取 ADC 为隔离体，可算得 $M_D = 1\times 3 = 3\mathrm{k}N\cdot m$（下侧受拉）。

2．图 3-3-2 示结构 M_K=________，_________侧受拉。[国防科技大学 2006 研]

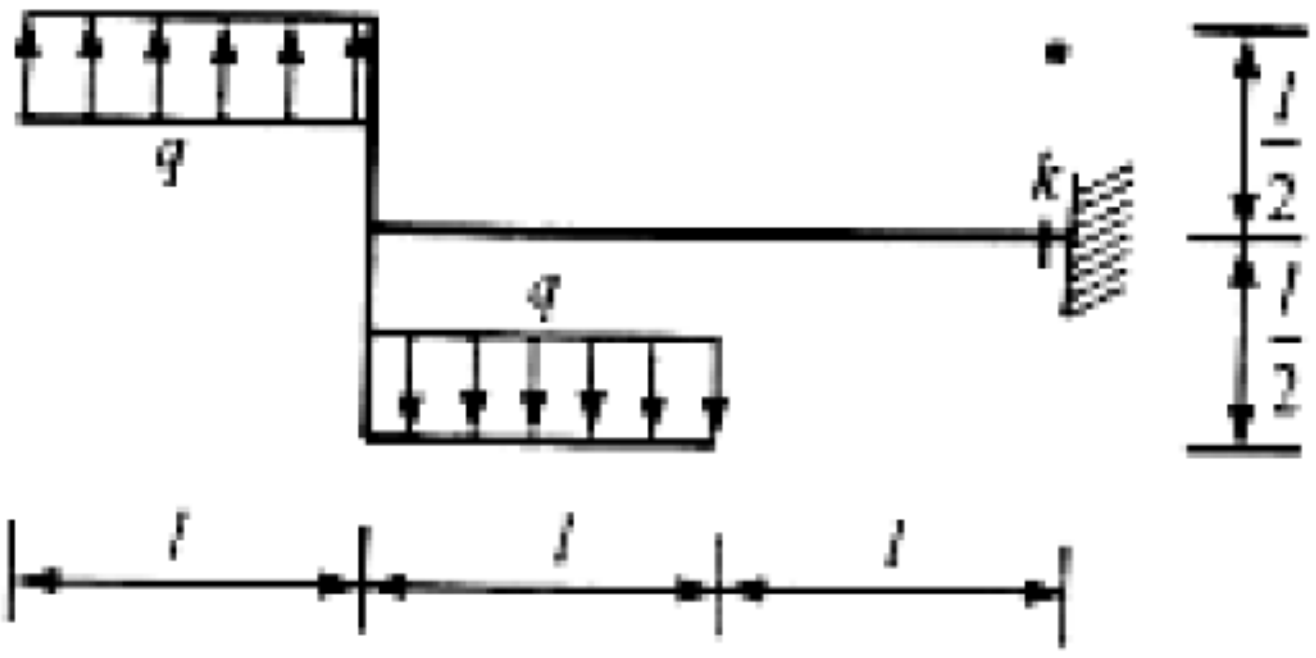


图 3-3-2

【答案】ql^2；下

【解析】直接在 K 截面处截开，可算得 $M_K = ql^2\cdot\frac{5}{2}l - ql^2\cdot\frac{3}{2}l = ql^2$ （下侧受拉）

二、选择题

1．图 3-3-3 示结构在所示荷载作用下，其 A 支座的竖向反力与 B 支座的反力相比为（　　）。[哈尔滨工业大学 2008 研]

A．前者大于后者

B．二者相等，方向相同

C．前者小于后者

D．二者相等，方向相反

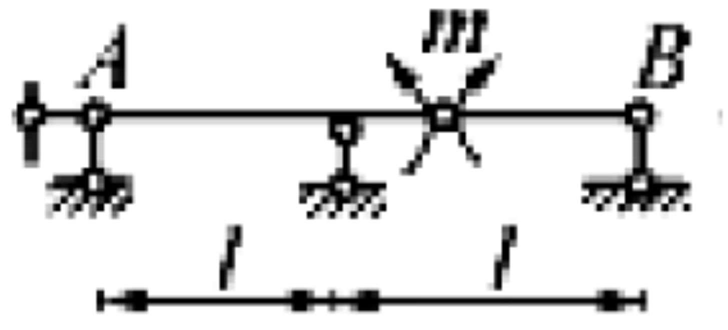


图 3-3-3

【答案】B

【解析】求 A 支座的竖向反力，向 B 支座取矩；求 B 支座的竖向反力，向 A 支座取矩；故 A 支座的竖向反力和 B 支座的竖向反力均等于中间支座竖向反力的一半。

2．图 3-3-4 示结构进行内力分析，应先计算（　　）。[浙江大学 2006 研]

A．CEF 部分

B．CDB 部分

C．AC 部分

D．ACDB 部分

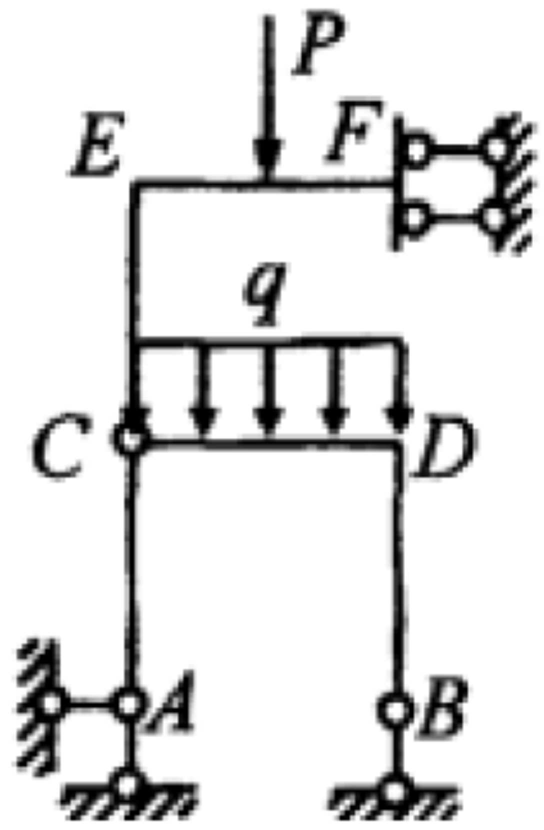


图 3-3-4

【答案】B

【解析】根据几何组成分析，CA 部分、CEF 部分和大地看作三个刚片，由三刚片规则可判断为一个几何不变体系，为基本结构；CDB 部分为附属结构。结构进行内力分析时，先对附属部分进行受力分析，再对基本部分受力分析。

3．图 3-3-5 所示结构截面 A 的弯矩（以下侧受拉为正）是（　　）。[西南交通大学 2008 研]

A．m

B．－m

C．－2m

D．0

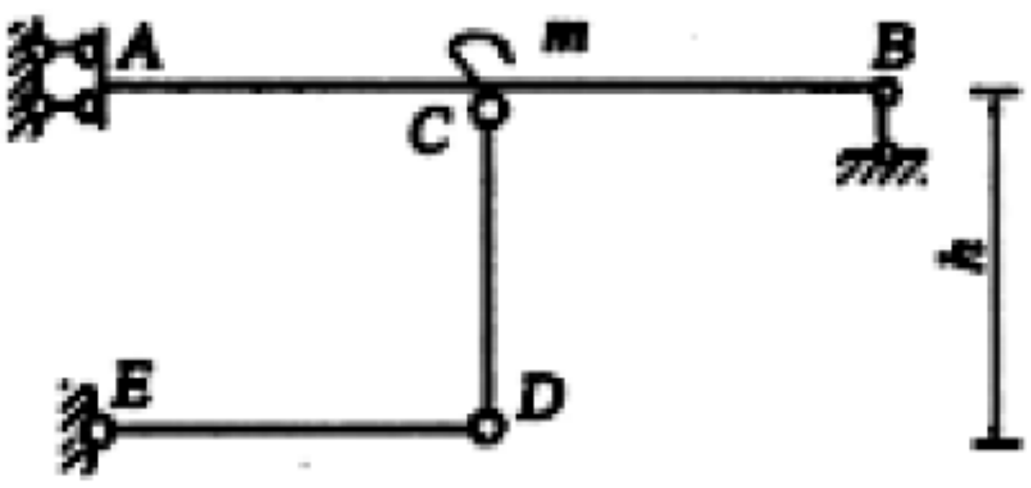


图 3-3-5

【答案】B

【解析】根据零杆的判断规则，EDC 为 L 形，故 CD 杆为零杆，进一步可推知支座 B 处的约束反力为零；根据平衡条件，可算得截面 A 的弯矩为-m（上侧受拉）。

4．在温度改变下，静定结构将（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．有内力、有位移、无应变

C．有内力、无位移、无应变

B．无内力、有位移、有应变

D．无内力、无位移、有应变

【答案】B

【解析】在温度改变下，静定结构不会产生内力，但会发生变形，即产生应变和位移。

5．图 3-3-6 示结构的内力图是（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．N 图、Q 图均为零

C．N 图不为零，Q 图均为零

B．N 图为零，Q 图均不为零

D．N 图、Q 图均不为零

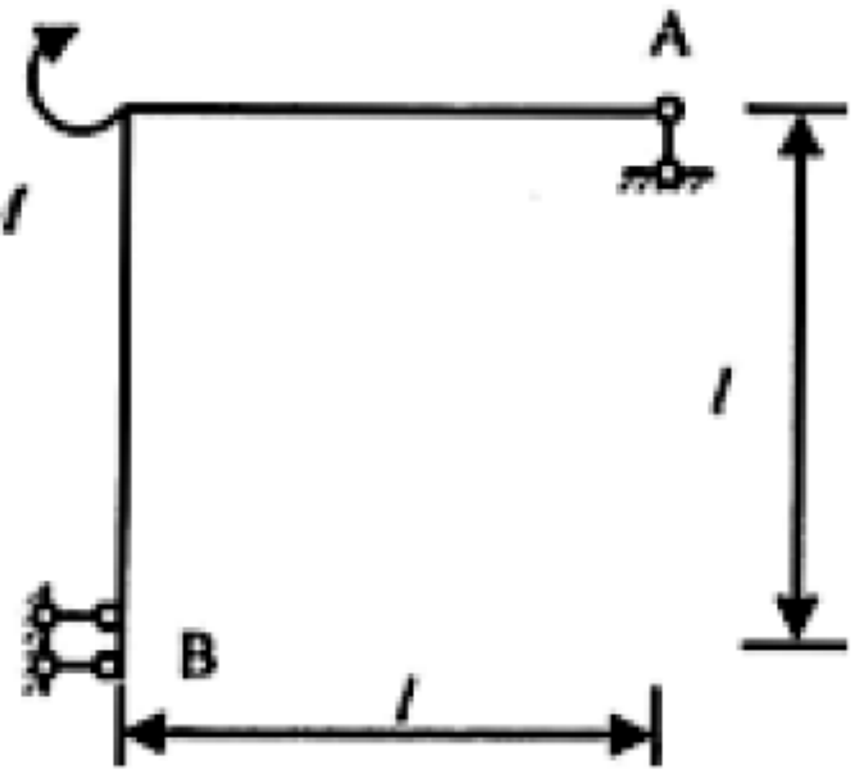


图 3-3-6

【答案】A

【解析】根据水平力和竖向力的平衡条件，易知支座 A 处的竖向反力为零，支座 B 处的水平反力为零；根据结构的力矩平衡可知支座 B 处有弯矩。故结构的 N 图和 Q 图均为零。

6．图 3-3-7 示刚架结点 B 的弯矩 M_B=_____。[浙江大学 2005 研]

A．qh^2，外侧受拉

B．qh^2，内侧受拉

C．$qa^2/2$，内侧受拉

D．$qh^2/2$，内侧受拉

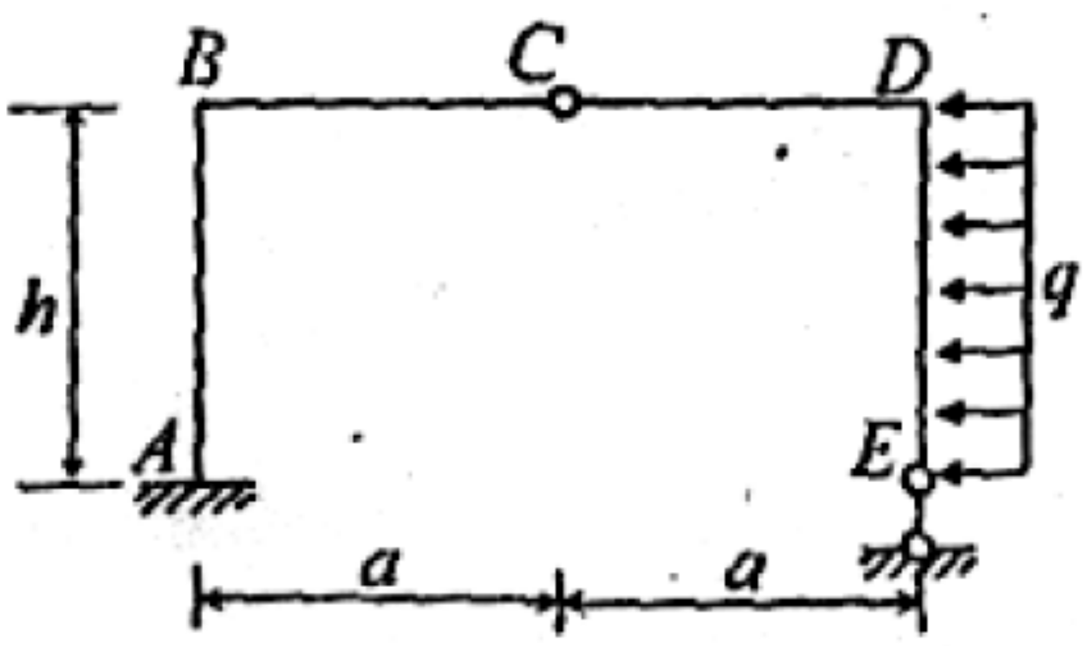


图 3-3-7

【答案】D

【解析】取 CDE 部分为隔离体，根据 $\sum M_C=0$，算得支座 E 处的竖向反力 $F_B=\frac{qh^2}{2a}$；再研究 BC 段，可算出 $M_B=\frac{qh^2}{2a}\cdot a=\frac{qh^2}{2}$（内侧受拉）。

三、判断题

1．若某直杆段的弯矩为 0，则剪力必定为 0；反之，若剪力为 0，则弯矩必定为 0。（　　）[中南大学 2005

研]

【答案】错

【解析】弯矩图的斜率是剪力，所以若某直杆段的弯矩为 0，则剪力必定为 0；但是剪力为零，弯矩不一定为零，因为从数学上讲，剪力的积分是弯矩，这其中存在积分常数的问题，例如两个相等的集中力分别作用在简支梁的三分之一和三分之二处，中间段为纯弯段：只有弯矩，剪力为零。

2．下图 3-3-8 的结构中 M_A 全部相等（　　）。[天津大学 2004 研]

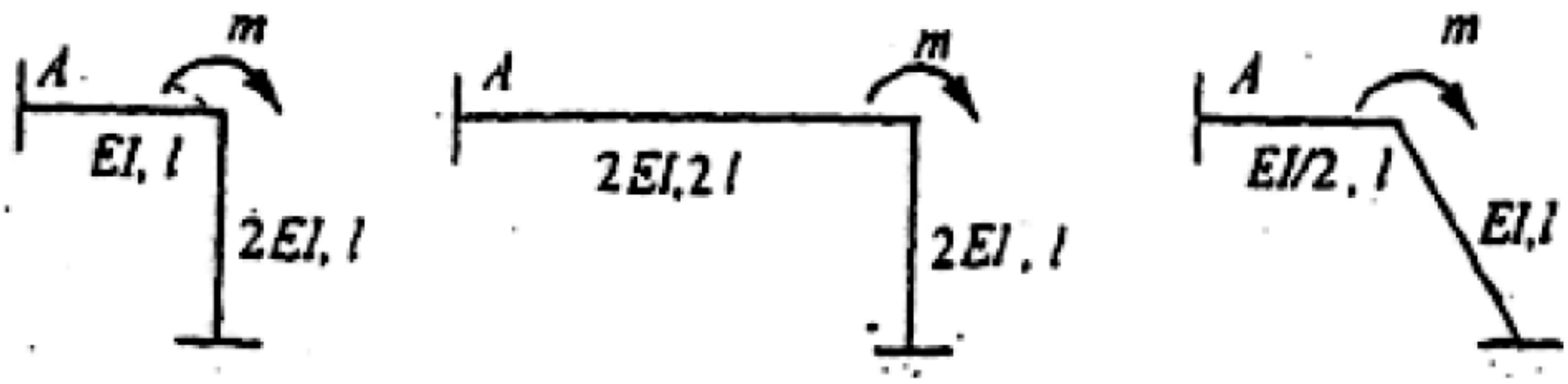


图 3-3-8

【答案】对

【解析】超静定在外荷载作用下的内力只与相对线刚度有关，由上图可知水平和竖向杆的线刚度之比均为 1:2。故三个超静定结构的内力均相同，结构中 M_A 全部相等。

3．温度改变、支座位移不会引起静定结构的内力及位移（　　）。[湖南大学 2006 研]

【答案】错

【解析】温度改变、支座位移不会引起静定结构的内力，但是会引起结构的位移。

四、计算题

1．求图 3-3-9 示结构内力图。[同济大学 2004 研]

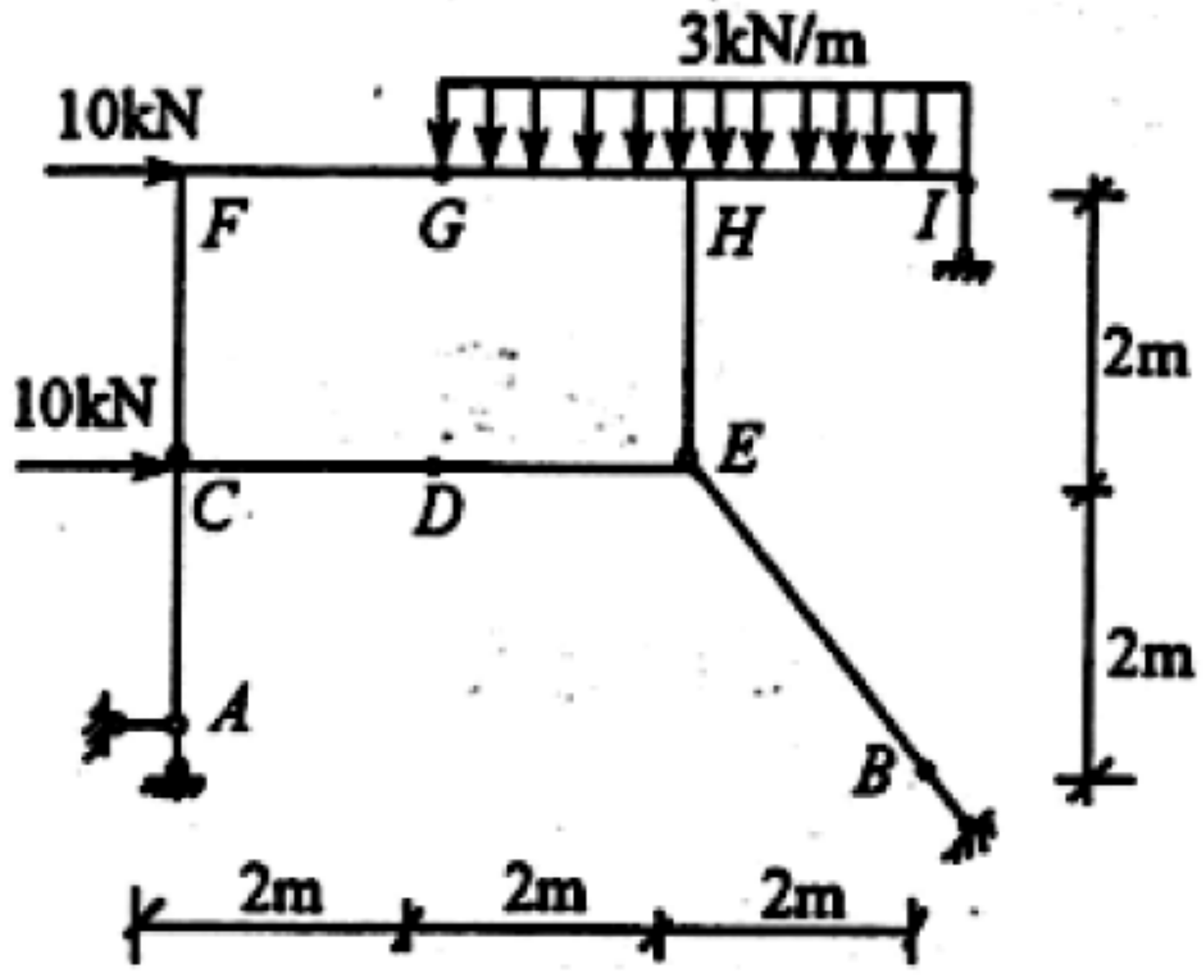


图 3－3－9

解：（1）以整体为研究对象，则受力示意图如下图 3-3-10 所示。

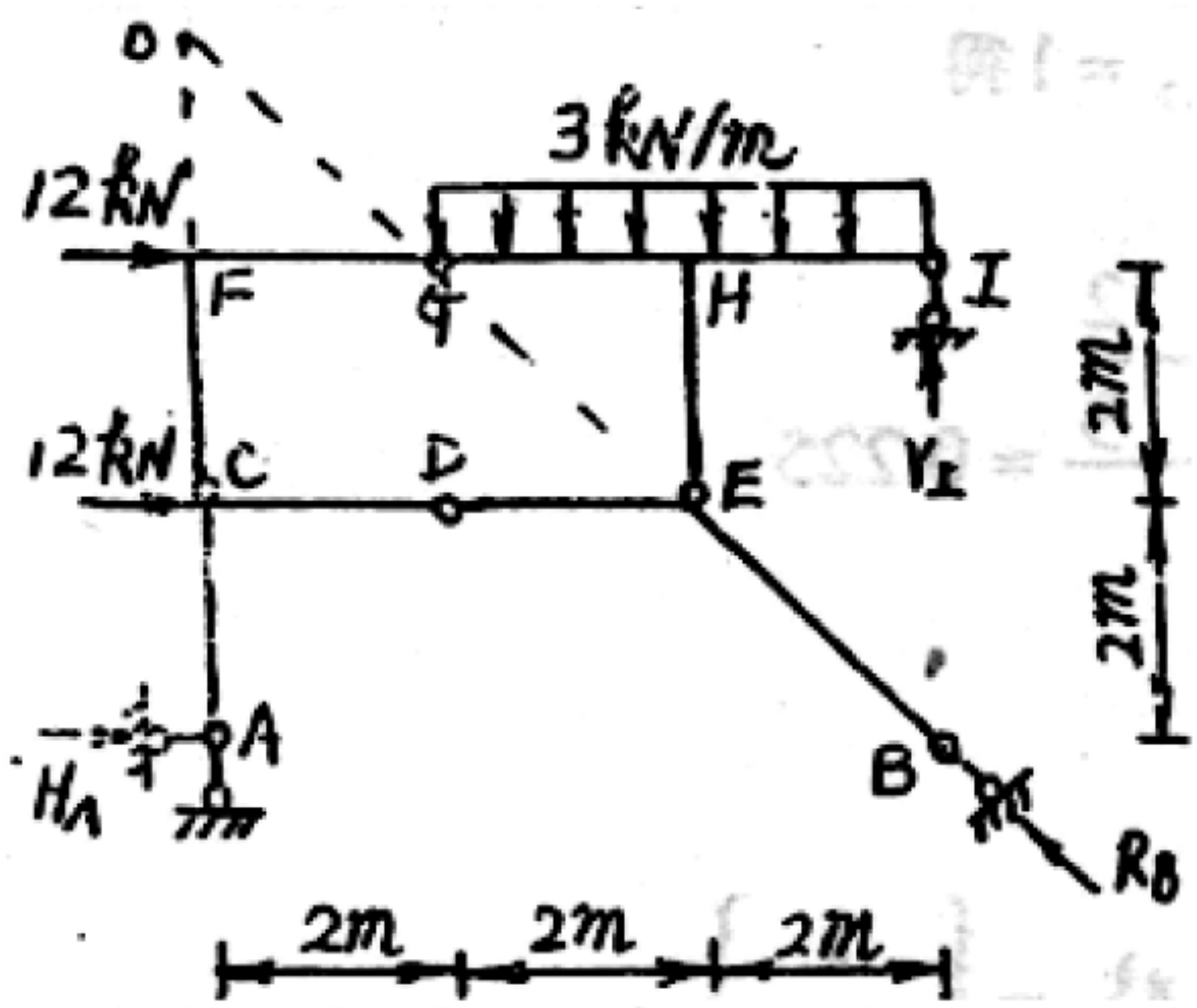


图 3-3-10

由静力平衡条件可得

$$\sum F_x=0 \quad R_B\times\frac{\sqrt{2}}{2}-12-12=0$$

$$\sum M_o=0 \quad 6V_I+12\times2+12\times4-3\times4\times4=0$$

解得

$$R_B=24\sqrt{2}=33.94\text{kN}(\nwarrow) \quad V_I=-4\text{kN}(\downarrow)$$

进而可知$H_A=0$。

（2）取隔离体，如下图 3-3-11 所示。

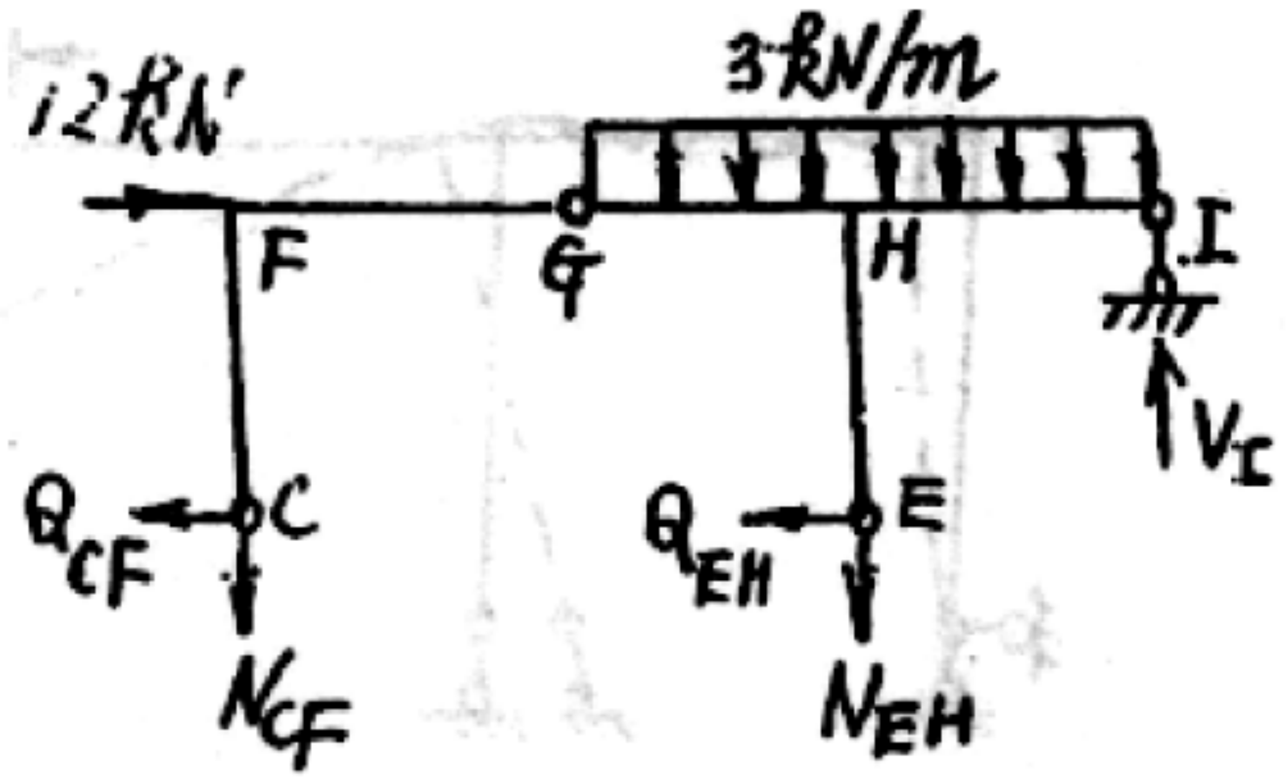


图 3-3-11

则由静力平衡条件可得

$$\sum M_E=0\text{，}\ 4N_{CE}-12\times2-4\times2=0$$

$$\sum M_G=0\text{，}\ 2Q_{CF}-12\times2-4\times2=0$$

$$\sum F_x=0\text{，}\ Q_{EH}+8-12=0$$

解得

$$N_{CE}=8\text{kN} \quad Q_{CF}=8\text{kN} \quad N_{EH}=4\text{kN}$$

（3）绘制弯矩图。根据支座反力，可求得最后的弯矩图如图 3-3-12。

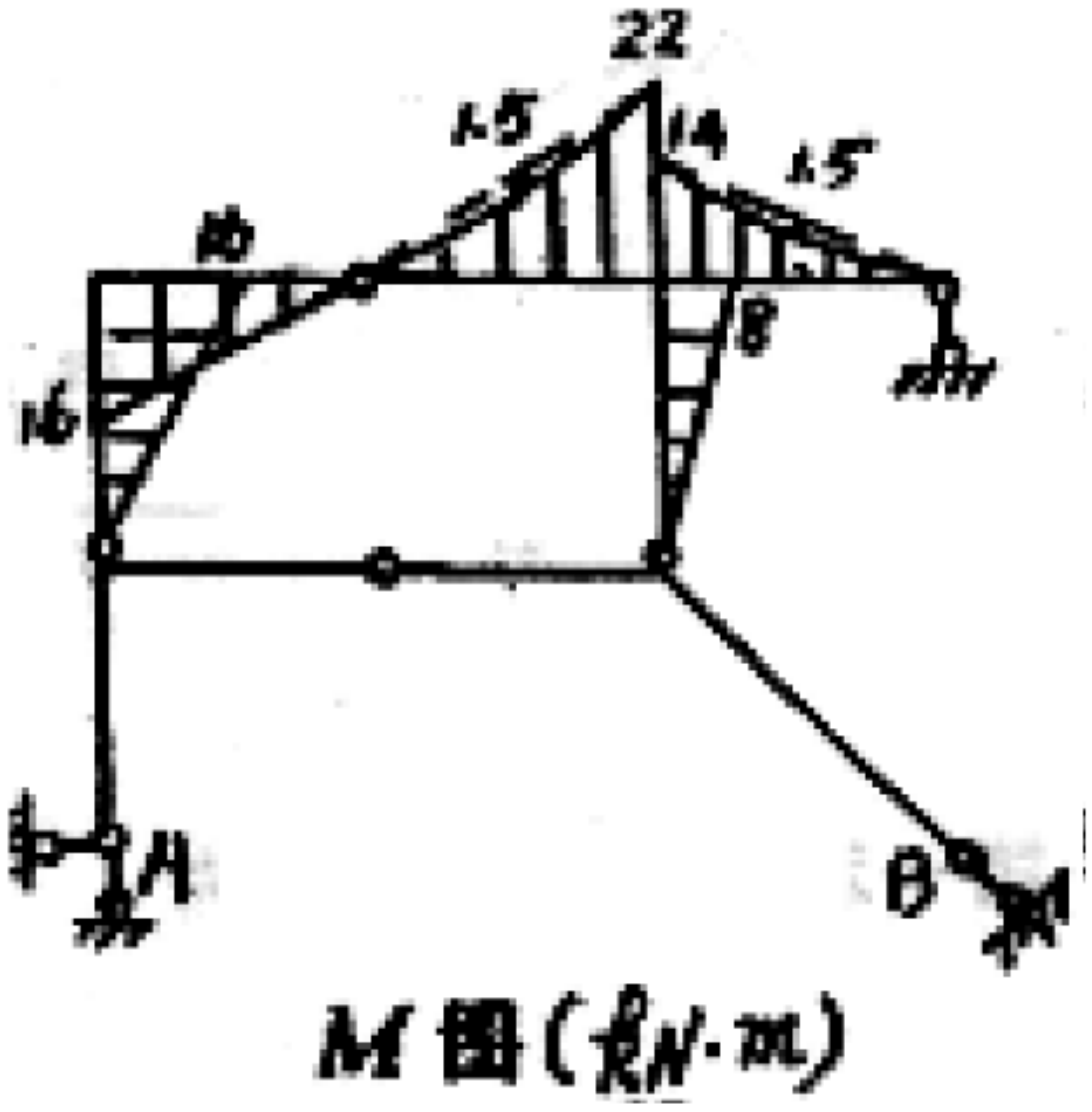


图 3-3-12

2．求图 3-3-13 示结构 M 图。[西南交通大学 2007 研]

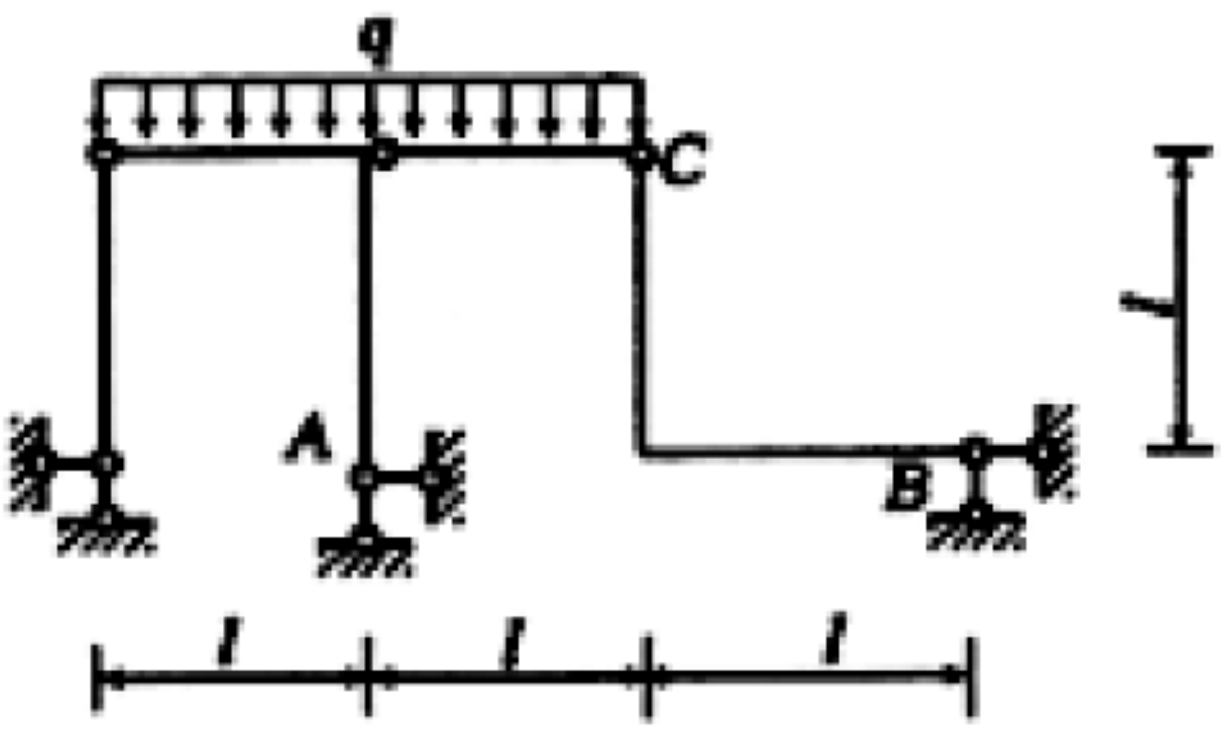


图 3-3-13

解：在 C 点处断开，受力图如下所示，取 CD 为隔离体，示意图 3-3-14。

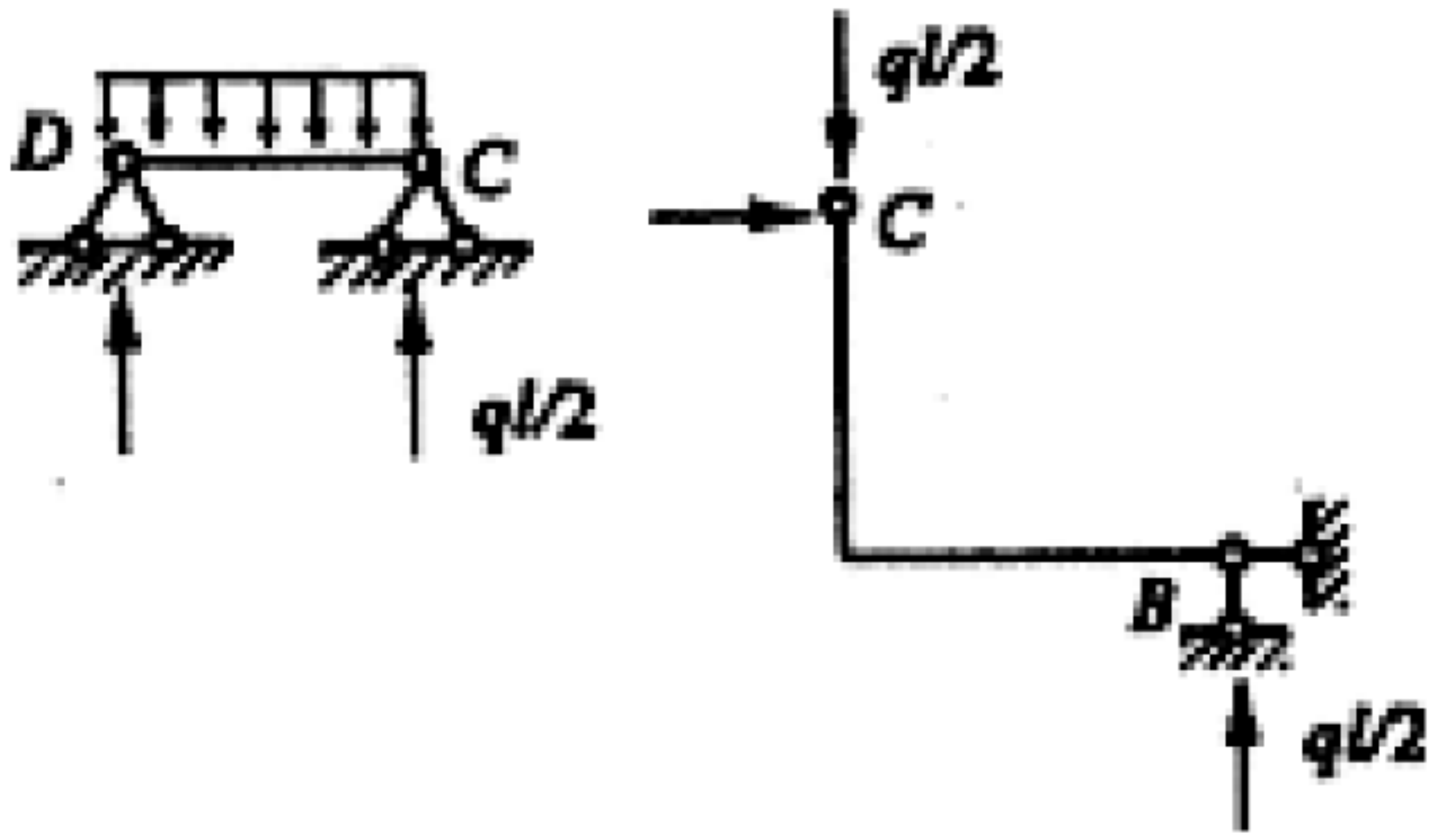


图 3-3-14

根据静力平衡条件可得：$F_{By}=ql/2(\uparrow)$ 。

取 BC 杆为研究对象，对 C 点取矩，由静力平衡条件可得：$F_{Bx}=ql/2(\leftarrow)$ 。

这样，可绘制弯矩图如下图 3-3-15 所示：

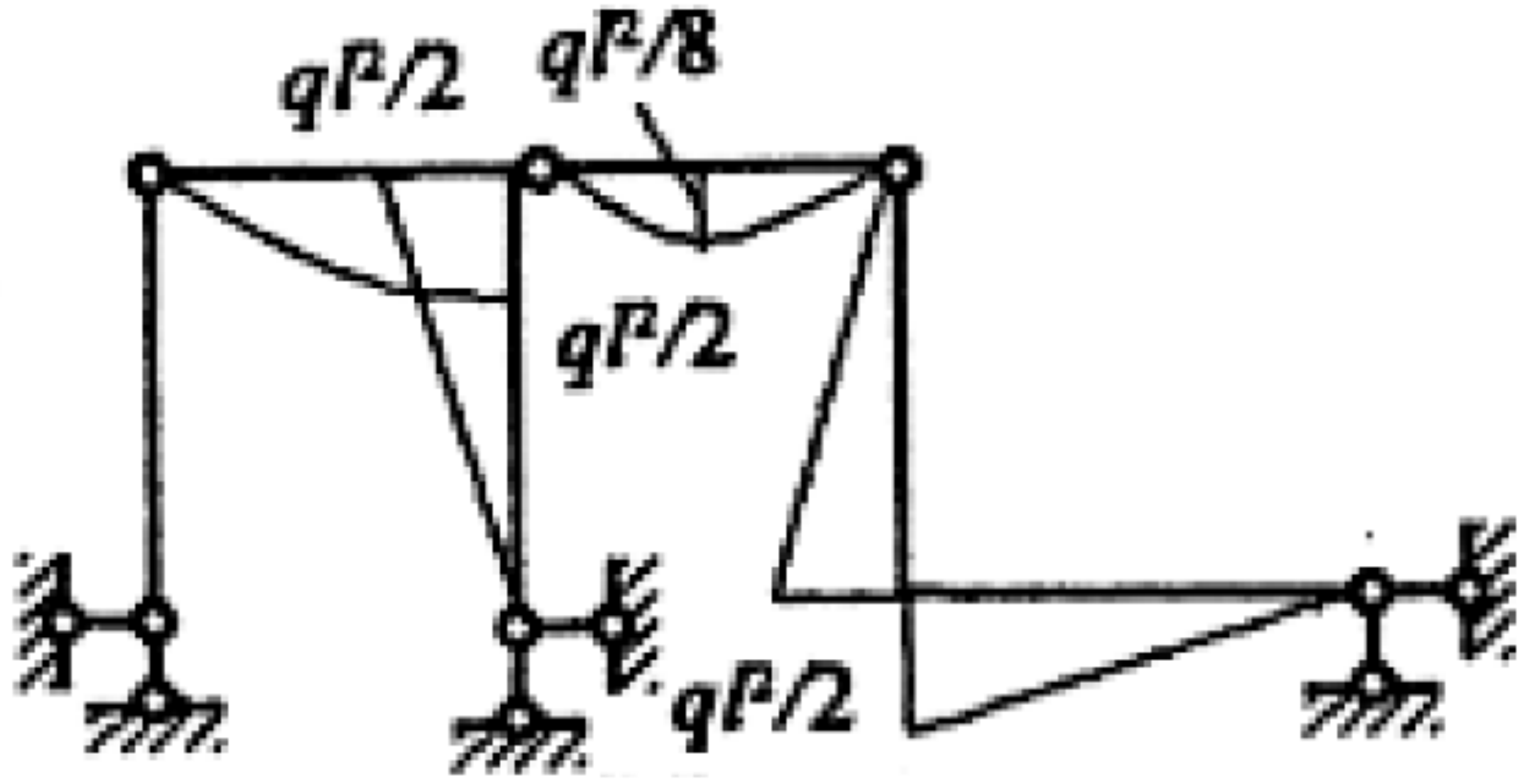


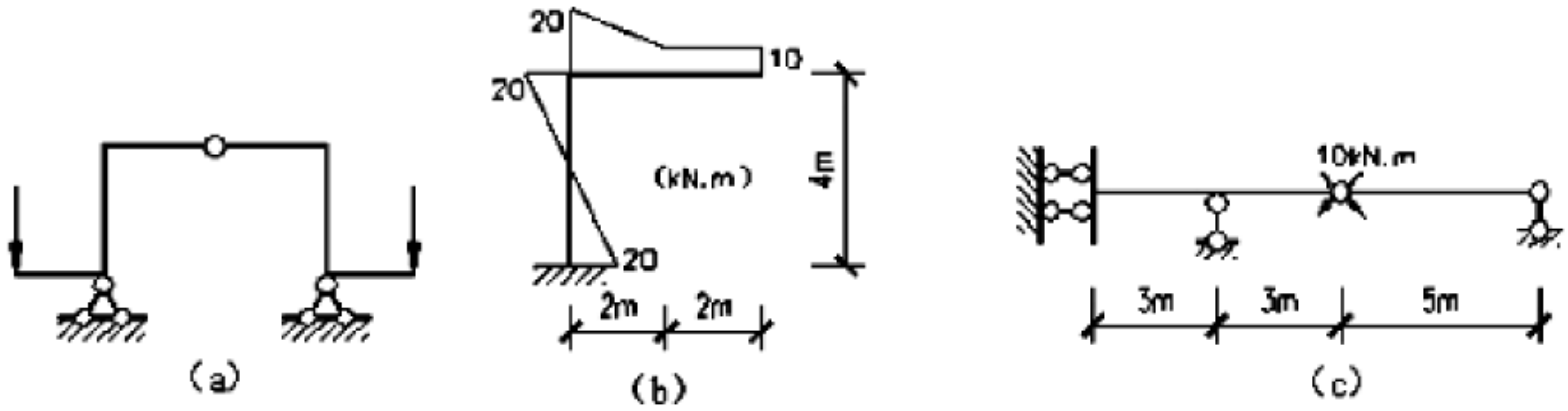
图 3-3-15

3．作图题。[武汉科技大学 2009 研]

（1）绘制图（a）所示结构弯矩图形状。

（2）已知图（b）结构弯矩图，绘制其荷载图。

（3）不经过计算，绘制图（c）所示结构弯矩图。



解：（1）图示机构为对称机构，所以只需绘制半边结构。取右边结构，由于结构对称，荷载对称，所以中间梁只有对称的力，即只有水平力，没有剪力，所以没有弯矩。由刚节点弯矩平衡可知，节点的右侧也为 0。同理可得其他部分的弯矩。这样，可绘制弯矩图如下图 3-3-16 所示：

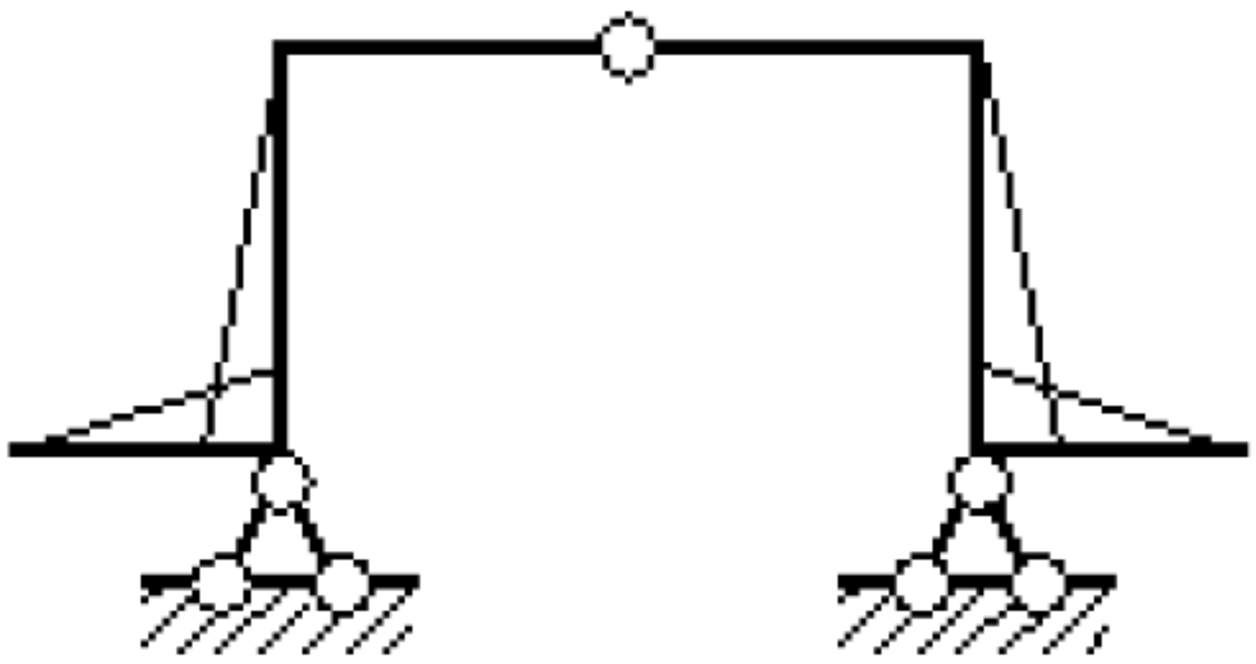


图 3-3-16

（2）水平部分中弯矩有一部分是水平的，故悬臂端有一个弯矩，方向为顺时针；在中点出弯矩出现增长，但没有突变，所以在中点处有一个集中荷载，方向向下，大小以求得为 5kN；同理分析可知，竖直杆的上部有一个集中荷载，水平向右，大小为 10kN。绘制载荷图如下图 3-3-17 所示。

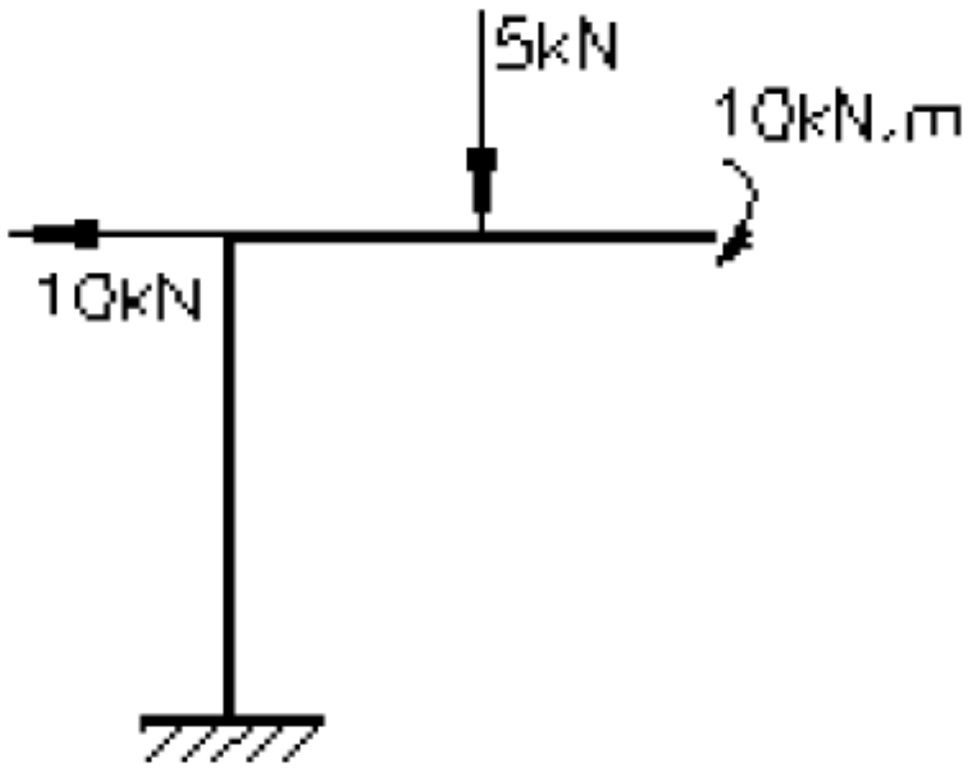


图 3-3-17

（3）弯矩图如下图 3-3-18 所示。

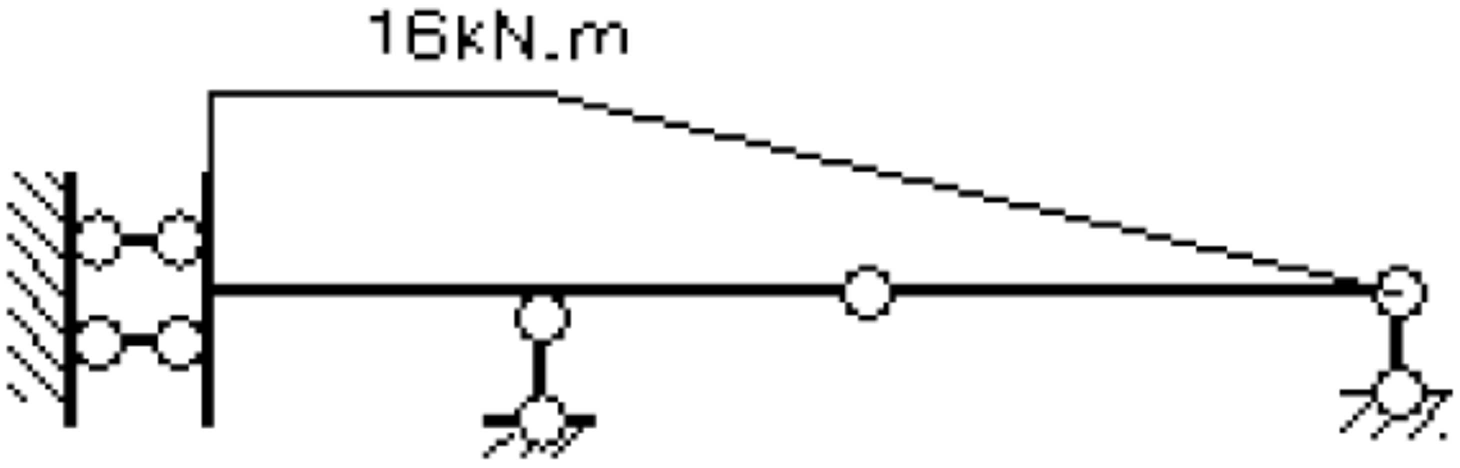


图 3-3-18

第 4 章　静定拱

4.1　复习笔记

【知识框架】

- 静定拱
  - 拱的基本概念
    - 拱的定义
    - 拱的分类
      - 按铰点数：三铰拱、两铰拱、无铰拱
      - 按铰趾位置：平拱、斜拱
    - 拱的特点
    - 拱式结构
    - 消除推力对支撑结构影响的方法
    - 拱各部分的名称：拱轴线、拱趾、拱的跨度、起拱线、拱顶、拱高等
  - 三铰拱的计算
    - 支座反力的计算
      - 反力个数
      - 计算方法
      - 计算公式
      - 反力值影响因素
    - 内力的计算：弯矩、剪力、轴力
    - 斜拱支座反力计算
  - 三铰拱的合理拱轴线
    - 合理拱轴线的定义
    - 拱轴线的计算方法

【重点难点归纳】

一、拱的基本概念

1．拱的定义

拱是指轴线（截面形心的连线）为曲线并且在竖向荷载作用下会产生水平反力的结构。

2．拱的分类

（1）按铰点数

①三铰拱；

②两铰拱；

③无铰拱。

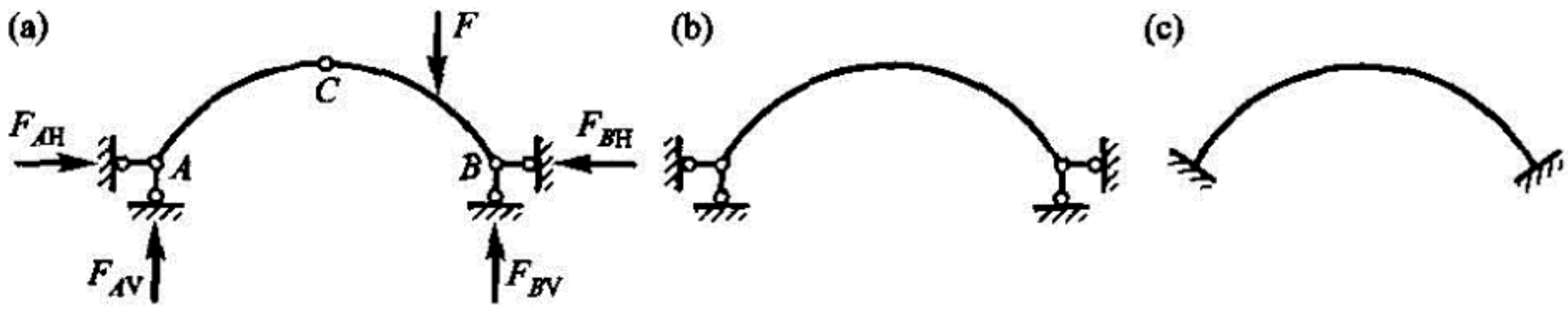


图 4-1-1

（2）按铰趾位置

①平拱

平拱是指两拱趾在同一水平线上的拱。

②斜拱

斜拱是指不在同一水平线上的拱。

3．拱的特点

（1）优点

①与梁相比，拱在竖向荷载作用下会产生水平反力。推力的存在与否是区别拱与梁的主要标志。

②由于推力的存在，拱的弯矩常比跨度、荷载相同的梁的弯矩小得多，使得拱截面上的应力分布较为均匀。

③主要承受压力，可利用抗拉性能较差而抗压较强的材料如砖、石、混凝土等来建造，更能发挥材料的作用。

（2）缺点

拱支座要承受水平推力，因而要求比梁具有更坚固的地基或支承结构（墙、柱、墩、台等）。

4．拱式结构

拱式结构是指在竖向荷载作用下会产生水平反力的结构，也称为推力结构。如三铰刚架、拱式桁架等。

5．消除推力对支撑结构影响的方法

在拱的两支座间设置拉杆来代替支座承受水平推力，使其成为带拉杆的拱（图 4-1-2（a））。为了使拱下获得较大的净空，有时也将拉杆做成折线形的（图 4-1-2（b））。

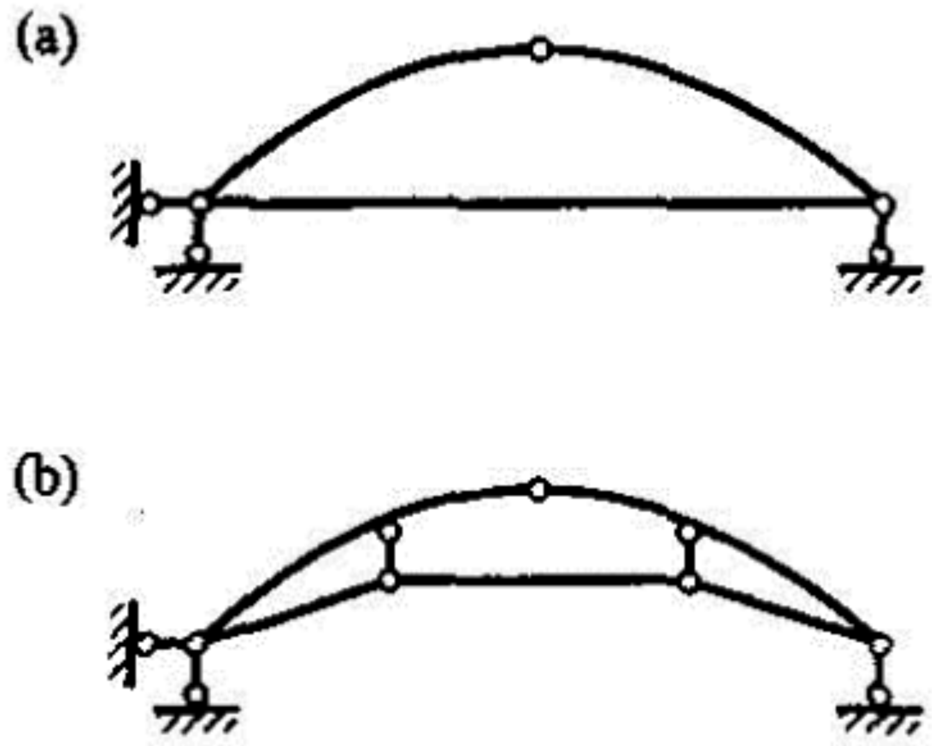


图 4-1-2

6．拱的各部分名称

（1）拱轴线

拱轴线是指拱身各横截面形心的连线。

（2）拱趾

拱趾是指拱的两端支座的位置。

（3）拱的跨度 l

拱的跨度是指两拱趾间的水平距离。

（4）起拱线

起拱线是指两拱趾的连线称为起拱线。

（5）拱顶

拱顶是指拱轴上距起拱线最远的一点。

（6）拱高 f

拱高是指拱顶至起拱线之间的竖直距离。

（7）高跨比

高跨比是指拱高与跨度之比 f/l。

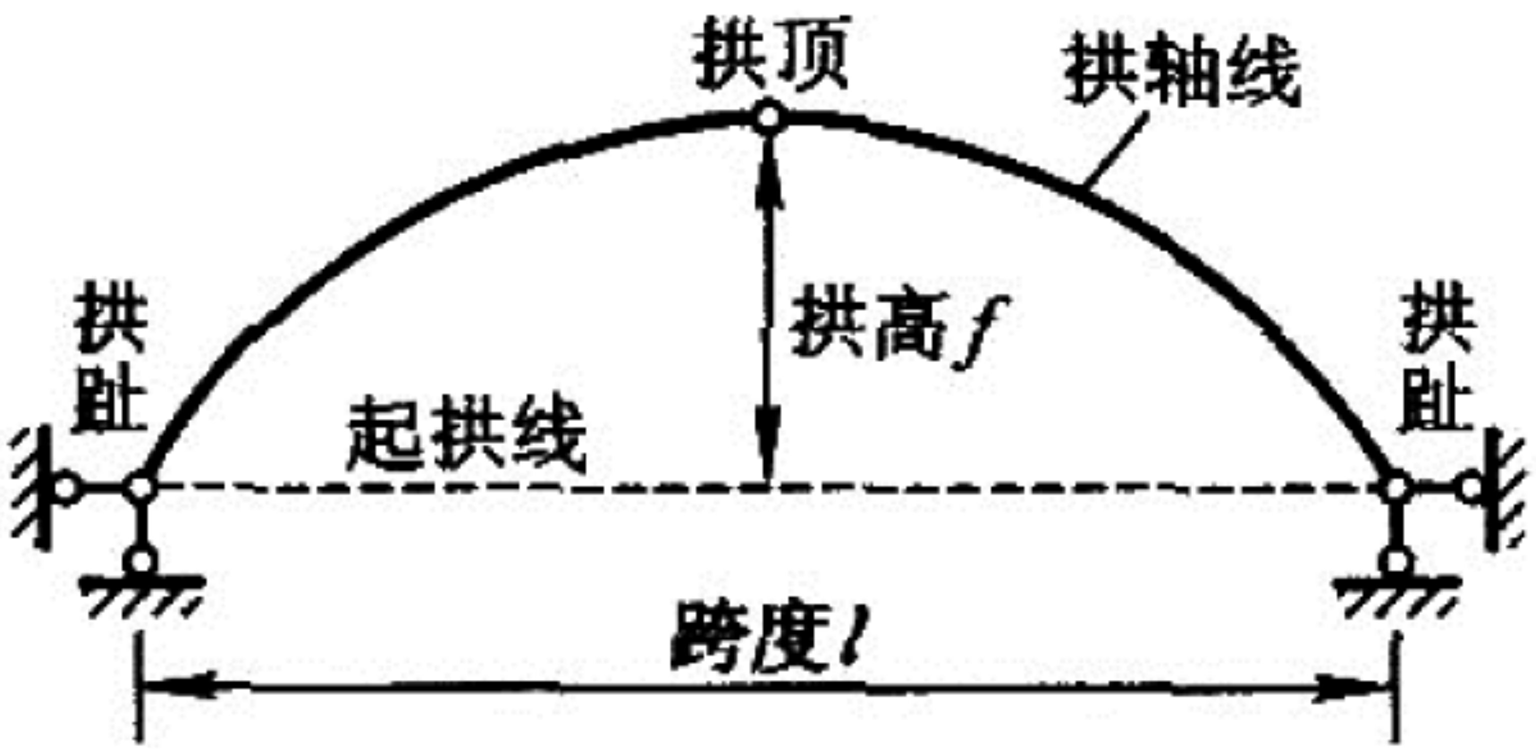


图 4-1-3

二、三铰拱的计算

1．支座反力的计算

（1）反力个数

三铰拱是由两根曲杆与地基之间按三刚片规则组成的静定结构，共有四个未知反力（图 4-1-4（a））。

（2）计算方法

取全拱为隔离体可建立三个平衡方程外，再取左（或右）半拱为隔离体，以中间铰 C 为矩心，根据平衡条件 $\sum M_C = 0$ 建立一个方程，从而求出所有的反力。

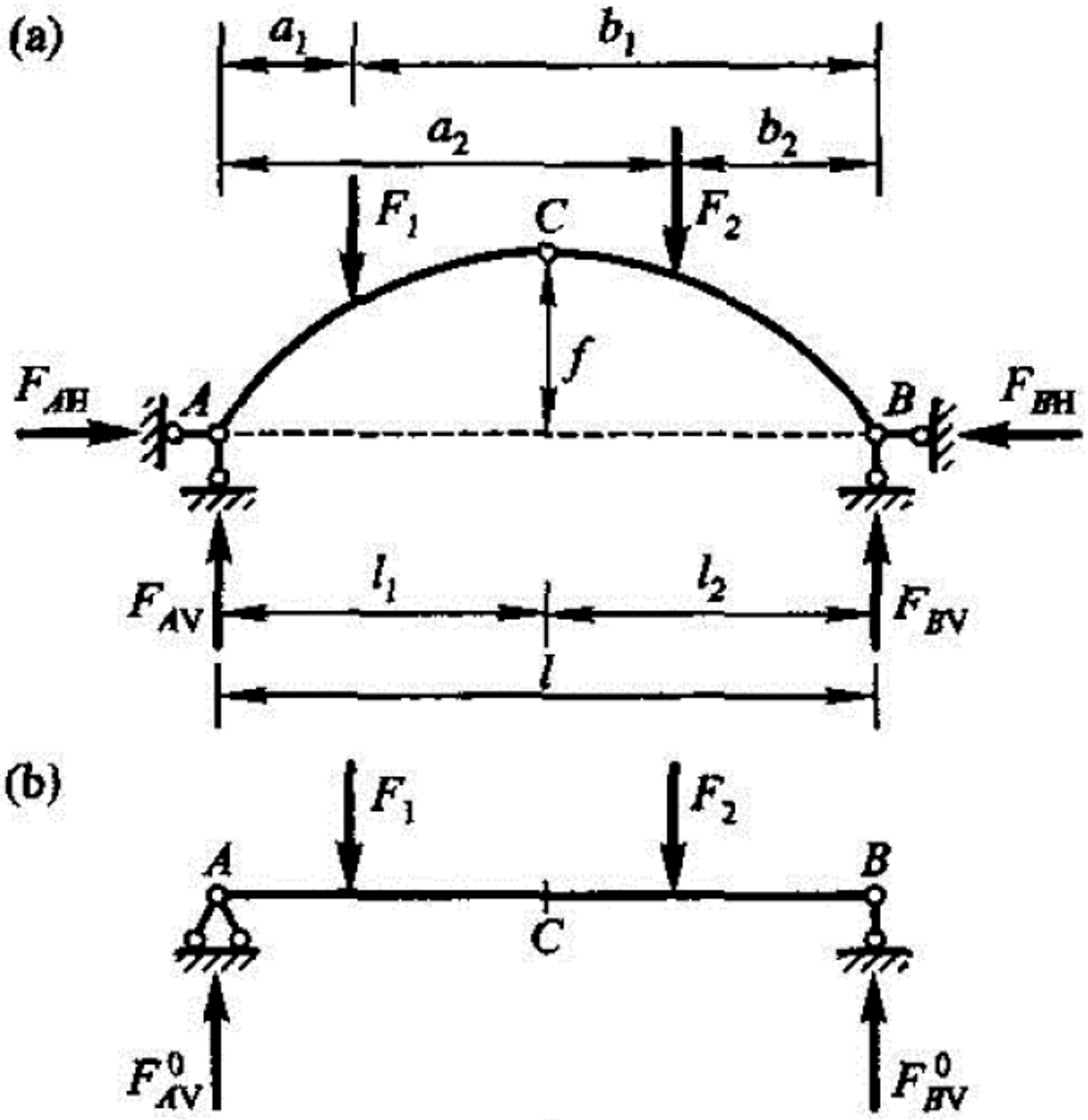


图 4-1-4

（3）计算公式

①由$\sum M_B=0$ 及$\sum M_A=0$ 可求得两支座的竖向反力为

$$F_{AV}=\frac{\sum F_i b_i}{l}$$

$$F_{BV}=\frac{\sum F_i a_i}{l}$$

②由$\sum F_x=0$，且左半拱为隔离体，$\sum M_C=0$ 可求得两支座的水平反力

$$F_{AH}=F_{BH}=F_H=\frac{F_{AV}l_1-F_1(l_1-a_1)}{f}$$

③上各式可写为

$$F_{AV}=F_{AV}^0$$

$$F_{BV}=F_{BV}^0$$

$$F_H=\frac{M_C^0}{f}$$

式中，F_{AV}^0 和F_{BV}^0 为相应简支梁的竖向反力；M_C^0 为相应简支梁上与拱的中间铰处对应的截面 C 的弯矩。

（4）反力值影响因素

a．三铰拱的反力只与荷载及三个铰的位置有关，而与各铰间的拱轴线形状无关。

b．当荷载及拱的跨度 l 不变时，推力 F_H 将与拱高 f 成反比。

第一，f 愈大即拱愈陡时 F_H 愈小；

第二，f 愈小即拱愈平坦时 F_H 愈大；

第三，若 $f=0$，则 $F_H=\infty$，此时三个铰已在一直线上，属于瞬变体系。

2．内力的计算

（1）弯矩

①弯矩正负

通常规定弯矩以使拱内侧受拉者为正。

②计算公式

由图 4-1-5（b）所示的隔离体可求得截面 K 的弯矩为

$$M=[F_{AV}x-F_1(x-a_1)]-F_Hy$$
$$=M^0-F_Hy$$

式中，M^0 为相应简支梁截面 K 的弯矩。

由上式可知：

a．拱内任一截面的弯矩 M 等于相应简支梁对应截面的弯矩 M^0 减去推力所引起的弯矩 F_Hy；

b．由于推力的存在，拱的弯矩比梁的要小。

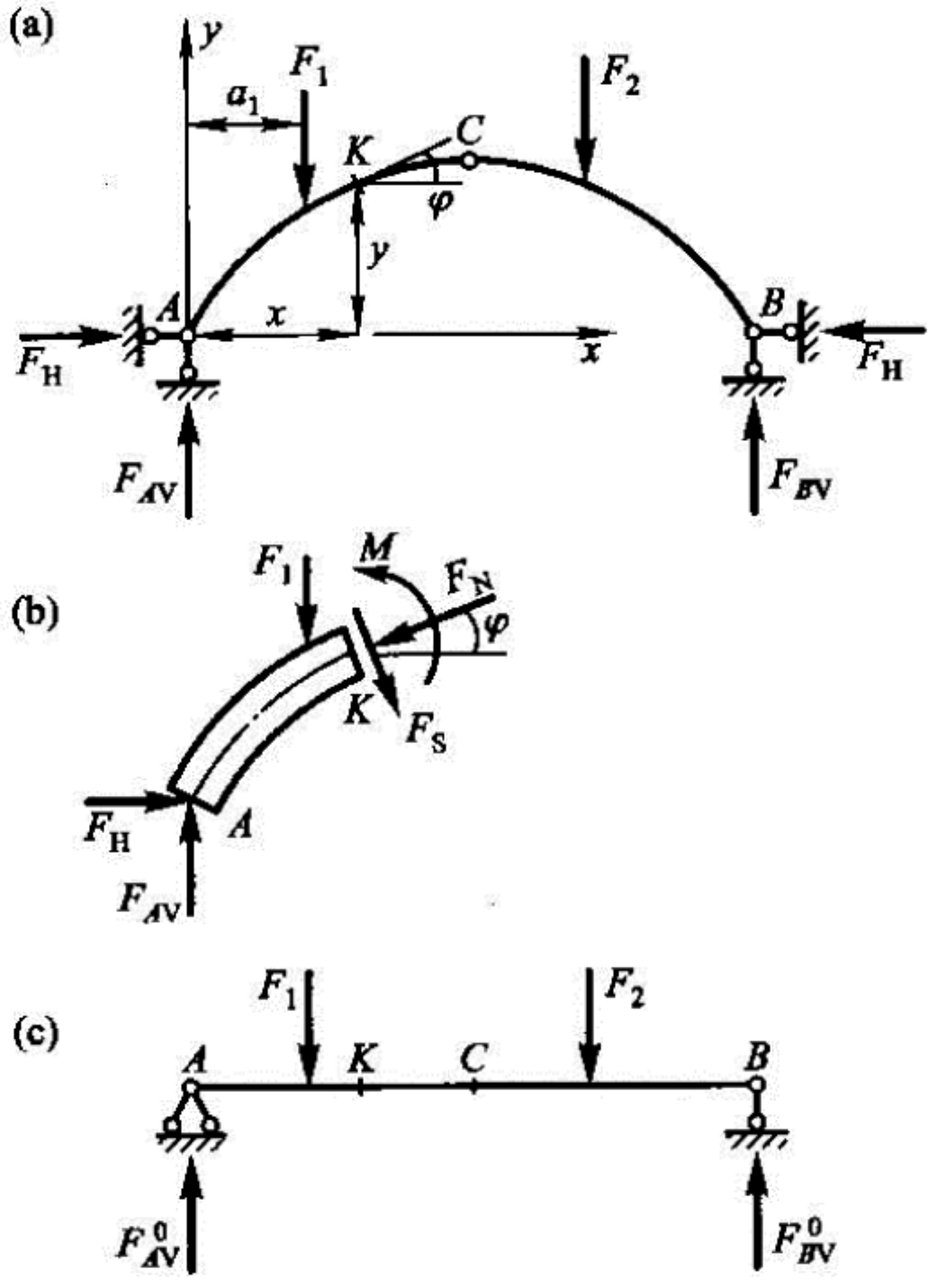


图 4-1-5

（2）剪力

①剪力正负

剪力以绕隔离体顺时针转动为正，反之为负。

②计算公式

任一截面 K 的剪力 F_S 等于该截面一侧所有外力在该截面方向上的投影代数和，由图 4-1-5（b）可得

$$
\begin{aligned}
F_S &= F_{AV}\cos\varphi - F_1\cos\varphi - F_H\sin\varphi \\
&= (F_{AV} - F_1)\cos\varphi - F_H\sin\varphi \\
&= F_S^0\cos\varphi - F_H\sin\varphi
\end{aligned}
$$

式中，$F_S^0 = F_{AV} - F_1$ 为相应简支梁截面 K 的剪力，φ 的符号在图示坐标系中左半拱取正，右半拱取负。

（3）轴力

①轴力正负

因拱常受压，故规定轴力以压力为正。

②计算公式

任一截面 K 的轴力等于该截面一侧所有外力在该截面法线方向上的投影代数和，由图 4-1-5（b）有

$$
\begin{aligned}
F_N &= (F_{AV} - F_1)\sin\varphi + F_H\cos\varphi \\
&= F_S^0\sin\varphi + F_H\cos\varphi
\end{aligned}
$$

（4）内力值影响因素

三铰拱的内力值将不但与荷载及三个铰的位置有关，而且与各铰间拱轴线的形状有关。

3．斜拱支座反力计算

（1）先将两支座的反力分别沿竖向和起拱线方向分解为相互斜交的分力 F'_{AV}、F'_R 和 F'_{BV}、F'_R，根据平衡条件可求得它们为

$$
F'_{AV} = F_{AV}^0, \quad F'_{BV} = F_{BV}^0, \quad F'_R = \frac{M_C^0}{h}
$$

其中 h 为铰 C 到起拱线的垂直距离。

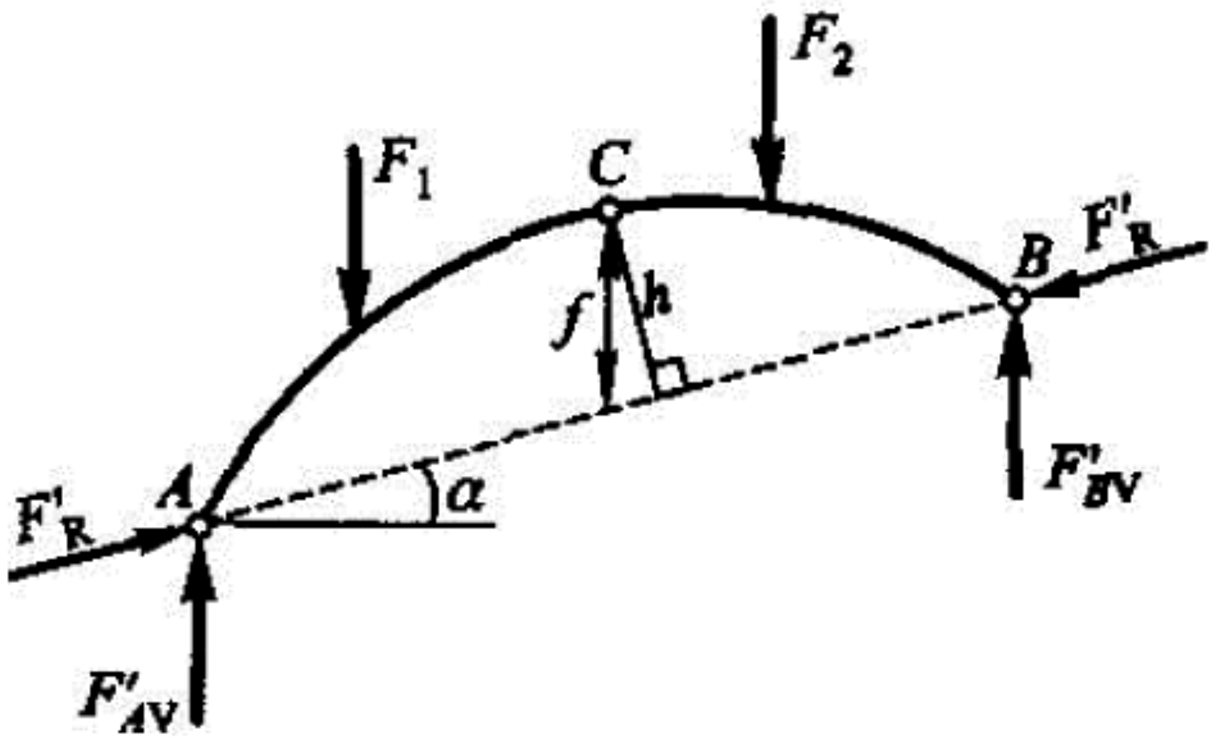


图 4-1-6

（2）将 F'_R 沿水平和竖直方向分解，支座水平反力和竖向反力为

$$
F_H = F'_R\cos\alpha = \frac{M_C^0}{f}
$$

$$
F_{AV} = F_{AV}^0 + F_H\tan\alpha
$$

$$
F_{BV} = F_{BV}^0 - F_H\tan\alpha
$$

式中，f 为铰 C 到起拱线的竖向距离；α 为起拱线倾角。

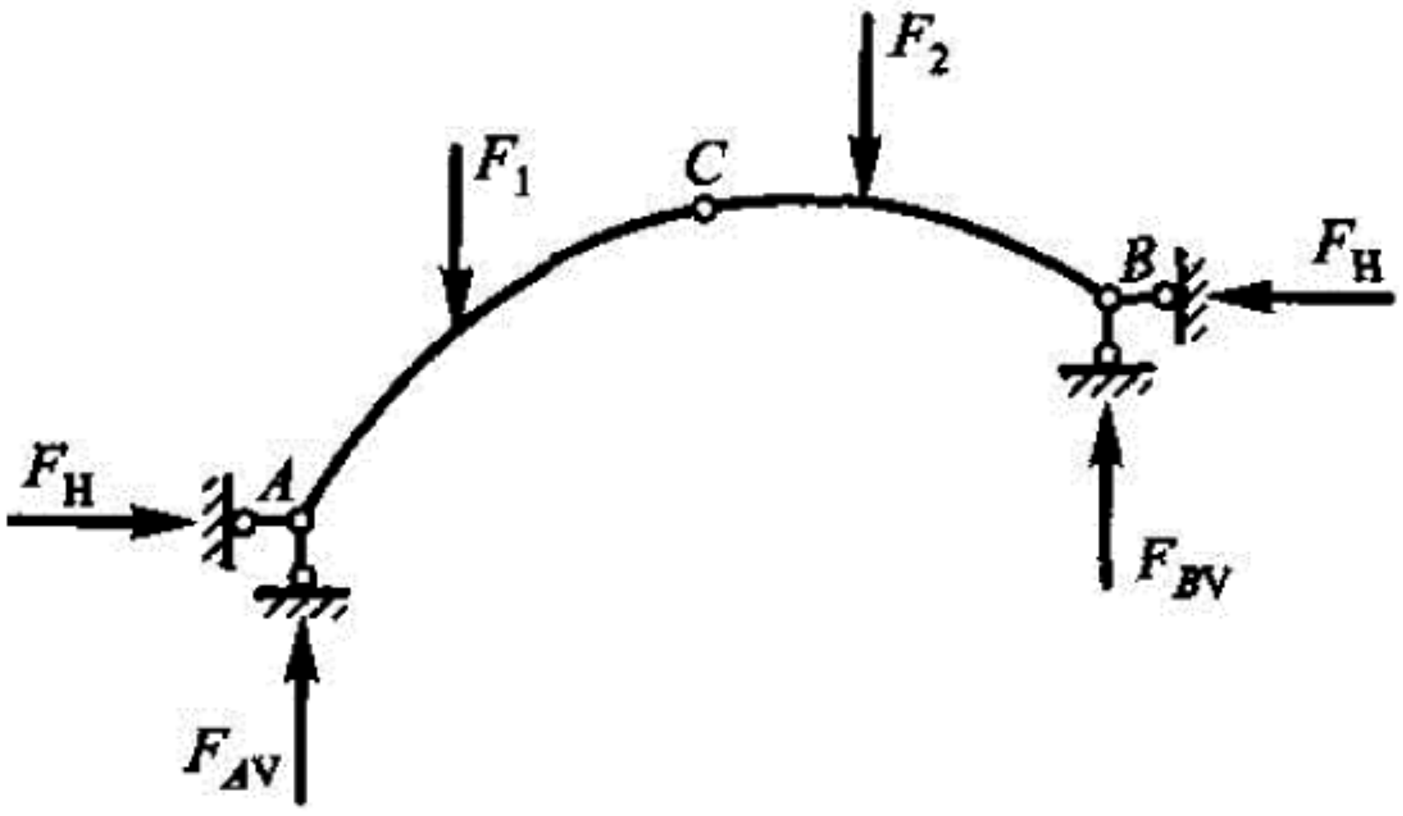


图 4-1-7

三、三铰拱的合理拱轴线

1．合理拱轴线的定义

合理拱轴线是指使拱上所有截面的弯矩都等于零（可以证明，从而剪力也为零）而只有轴力的拱轴线。合理拱轴线使拱截面上的正应力分布均匀，能最充分地利用材料。

2．拱轴线的计算方法

根据弯矩为零的条件$M = M^0 - F_H y = 0$，可得合理拱轴线的纵坐标 y

$$y = \frac{M^0}{F_H}$$

在竖向荷载作用下，三铰拱合理拱轴线的纵坐标 y 与相应简支梁弯矩图的竖标成正比。当荷载已知时，只需求出相应简支梁的弯矩方程，然后除以常数 F_H，便得到合理拱轴线方程。

4.2　课后习题详解

复习思考题

1．拱的受力情况和内力计算与梁和刚架有何异同？

答：（1）拱与梁的受力情况和内力计算的区别

①拱在竖向荷载作用下会产生水平反力，而梁竖向荷载作用下不会产生水平反力；

②由于水平推力的存在，拱的弯矩常比跨度、荷载相同的梁的弯矩小得多，使得拱截面上的应力分布较为均匀；

③内力计算时，若只有竖向荷载时，梁只需进行简单的整体分析即可求解，而拱由于水平力的存在，需要整体分析与局部分析相结合，显得更繁琐。

（2）拱与刚架的受力情况和内力计算的异同

①拱与刚架的受力情况和内力计算的特点和所应用方法基本一致，例如三铰刚架也属于拱式结构；

②拱的轴线是曲线，刚架杆的轴线是直线，但在本质上即便拱的轴线是曲线，在应用平衡条件计算内力时，也是取投影的距离，这与直杆计算原理相同。

2．在非竖向荷载下怎样计算三铰拱的反力和内力？能否使用式（4-1）和（4-2）？

答：（1）三铰拱承受非竖向荷载时，需要将非竖向荷载分解为水平荷载和竖向荷载即可。

（2）仍然可以应用式（4-1）和（4-2），只需将水平反力加上非竖向荷载水平方向上的分量代入公式中求解即可。

$$\left.\begin{aligned} F_{AV} &= F_{AV}^0 \\ F_{BV} &= F_{BV}^0 \\ F_H &= \frac{M_C^0}{f} \end{aligned}\right\} \qquad (4-1)$$

$$\left.\begin{aligned} M &= M^0 - F_H y \\ F_S &= F_S^0 \cos\varphi - F_H \sin\varphi \\ F_N &= F_S^0 \sin\varphi + F_H \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (4-2)$$

3．什么是合理拱轴线？试绘出图 4-2-1 各荷载作用下三铰拱的合理拱轴线形状。

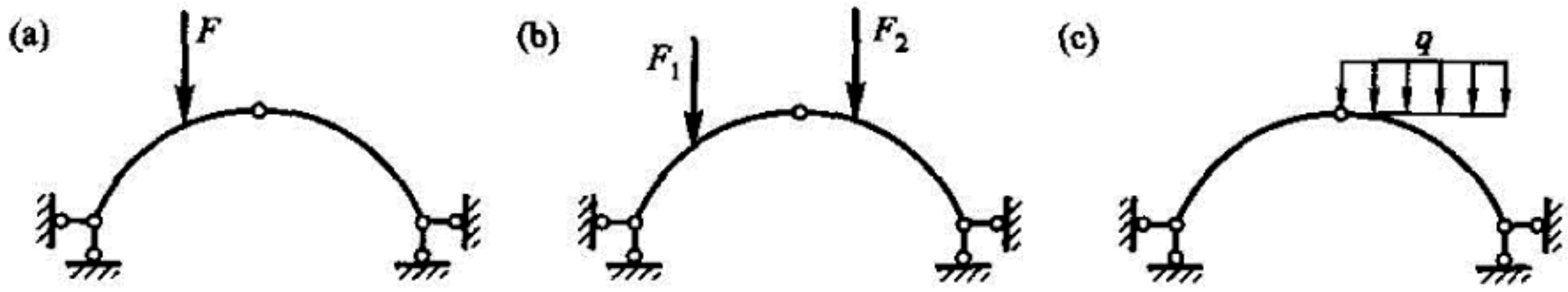


图 4-2-1

答：（1）合理拱轴线是指使拱上所有截面的弯矩都等于零（可以证明，从而剪力也为零）而只有轴力的拱轴线。

（2）合理拱轴线如图 4-2-2 所示。

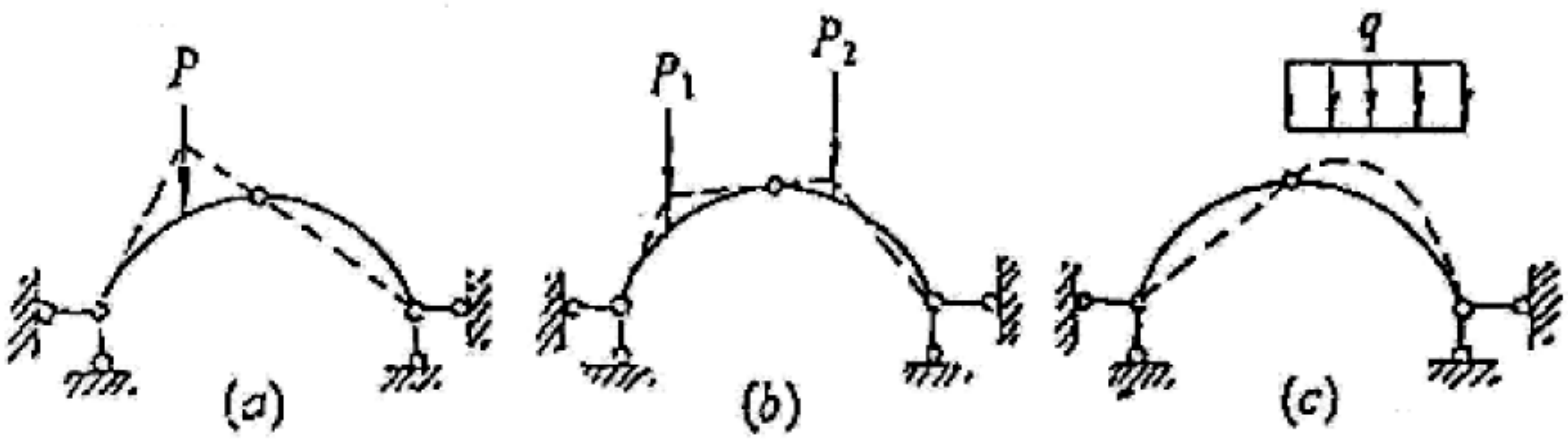


图 4-2-2

习题

4-1　图示抛物线三铰拱的轴线方程为$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，试求截面 K 的内力。

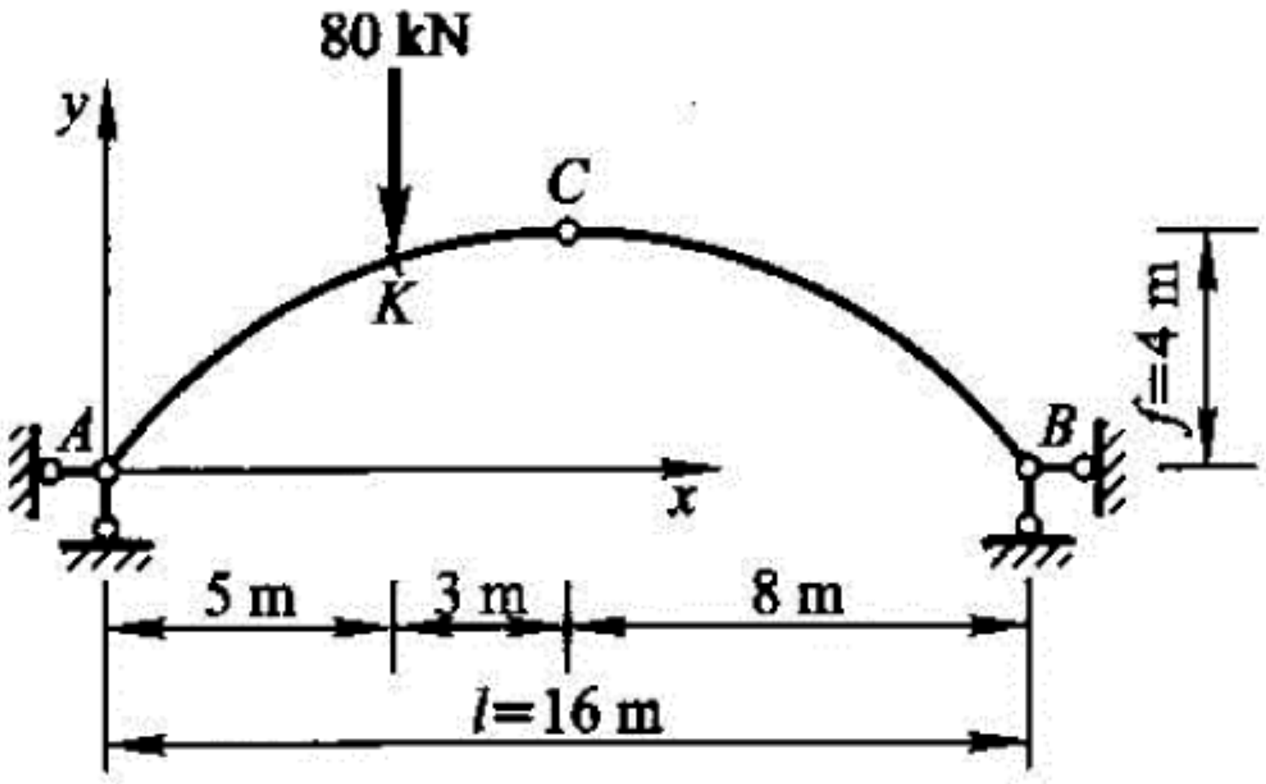


图 4-2-3（题 4-1）

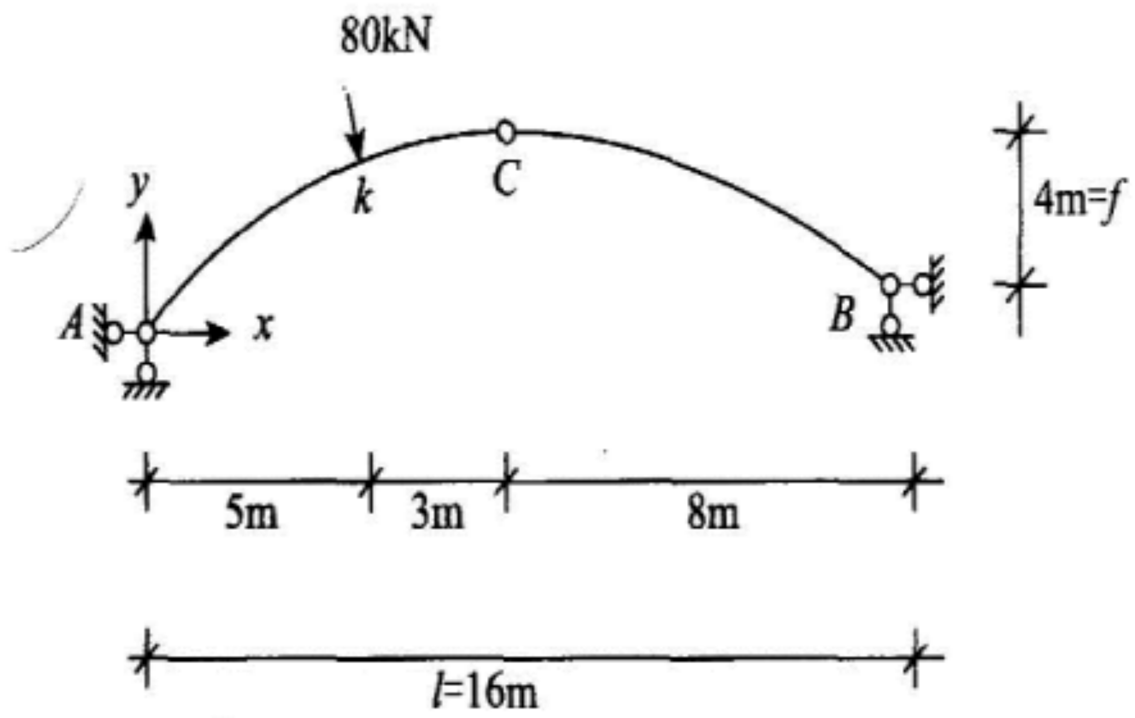


图 4-2-4（题 4-1 解图）

解：曲线方程

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)=x(1-\frac{x}{16})$$

对其求导得

$$y'=1-\frac{x}{8}$$

通过曲线方程求出 K 点标

$$y_K=\frac{55}{6},y'=\frac{3}{8}=0.375$$

则

$$\sin y_K=0.3511,\cos y_K=0.9363$$

则可列平衡方程求解支座反力

$$\sum M_B=0,F_{Ay}\cdot 16-80\times 11=0$$

$$F_{Ay}=55\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0,F_{By}=25\ \text{kN}$$

$$F_H=\frac{F_{Av}l_1-F_1(l_1-a_1)}{f}=\frac{55\times 8-80\times 3}{4}=50\ \text{kN}$$

取隔离体，如图 4-2-5 所示，故可求出 K 截面处的内力如下

$$M_K=55\times 5-50\times 3.4375=103.1\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_{K左}=55\times 0.9363-50\times 0.3511=33.9\ \text{kN}$$

$$Q_{K右}=(55-80)\times 0.9363-50\times 0.3511=-41.0\ \text{kN}$$

$$N_{K左}=55\times 0.3511+50\times 0.9636=66.1\ \text{kN}$$

$$N_{K右}=(55-80)\times 0.3511+50\times 0.9636=38.0\ \text{kN}$$

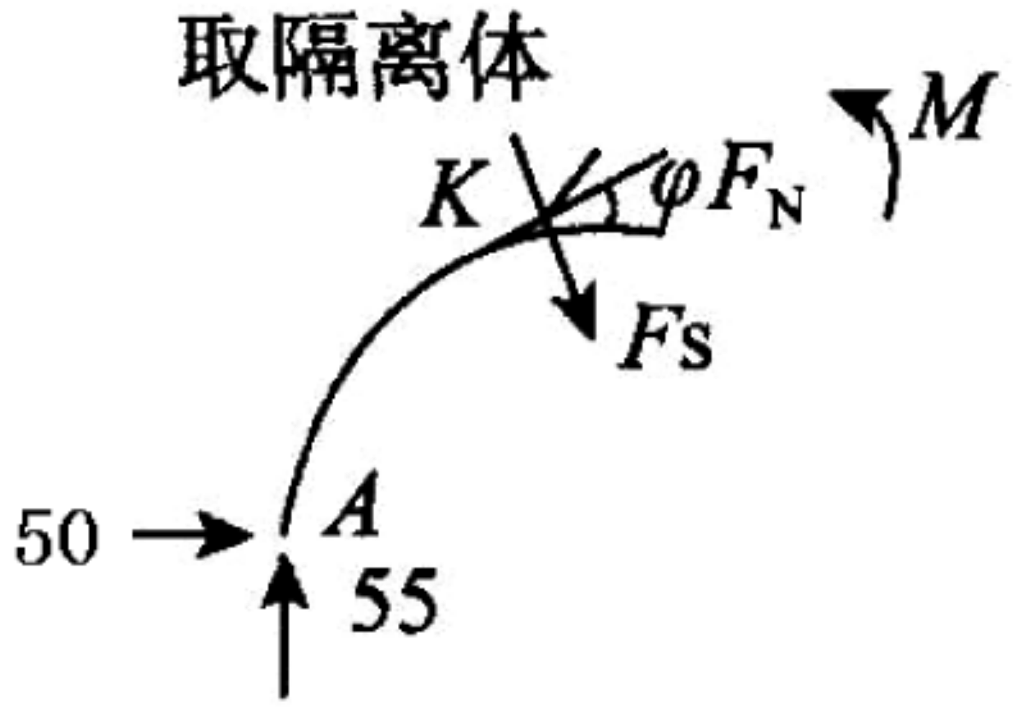


图 4-2-5

4-2　试求带拉杆的半圆三铰拱截面 K 的内力。

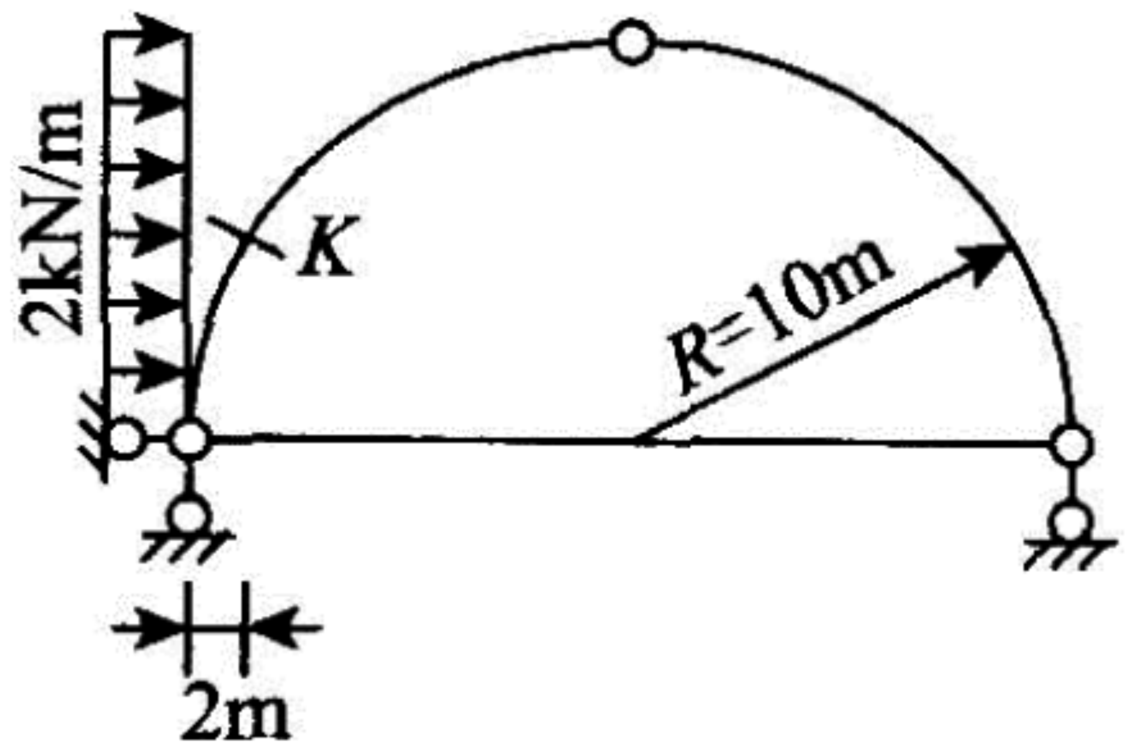


图 4-2-6（题 4-2）

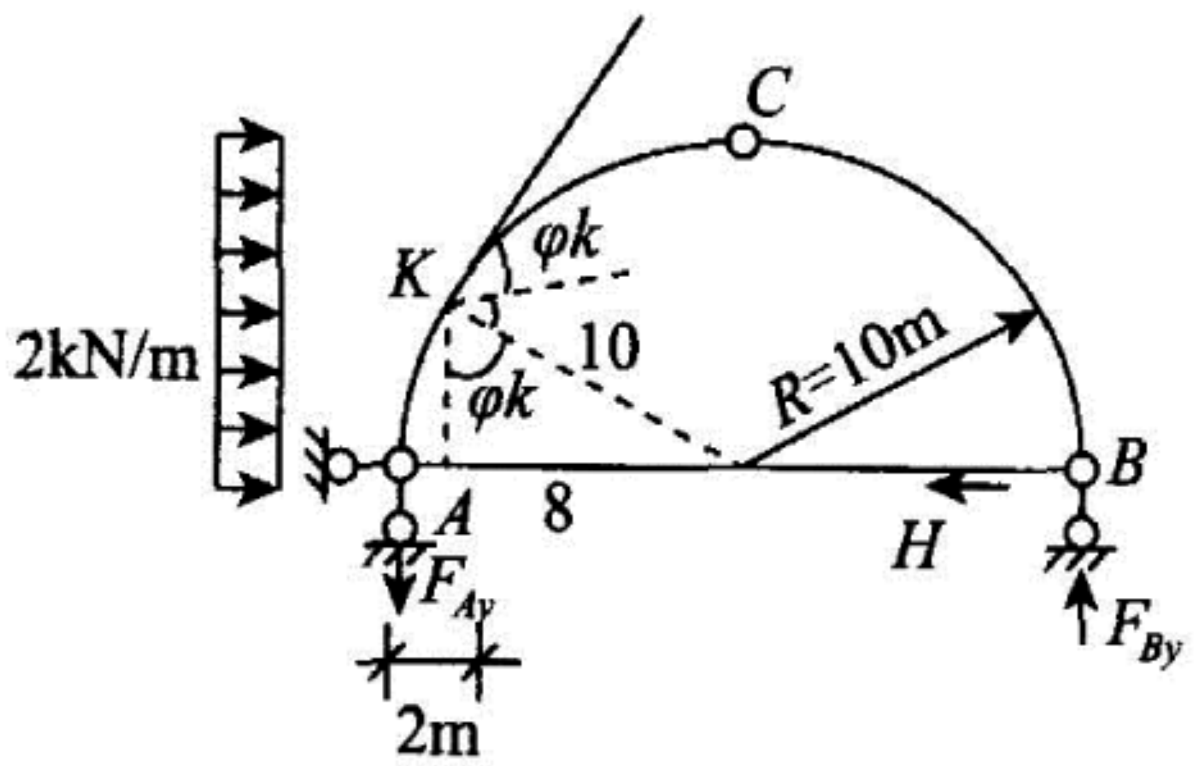


图 4-2-7（题 4-2 解图）

解：由图中几何关系可以得出

$$\tan\varphi_K=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ \sin\varphi_K=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\ \cos\varphi_K=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

由平衡条件可得支座反力

$$\begin{cases}\sum M_C=0, F_{By}\cdot 10-H\cdot 10=0\\ \sum M_A=0, F_{By}\cdot 20-2\times 10\times 5=0\end{cases}$$

$\Rightarrow F_{By}=H=5\ \text{kN}$　　　　$\sum F_y=0, F_{Ay}=5\ \text{kN}(\downarrow), F_{Ax}=20\ \text{kN}$

取左半部分为隔离体，受力分析如图 4-2-8 所示。

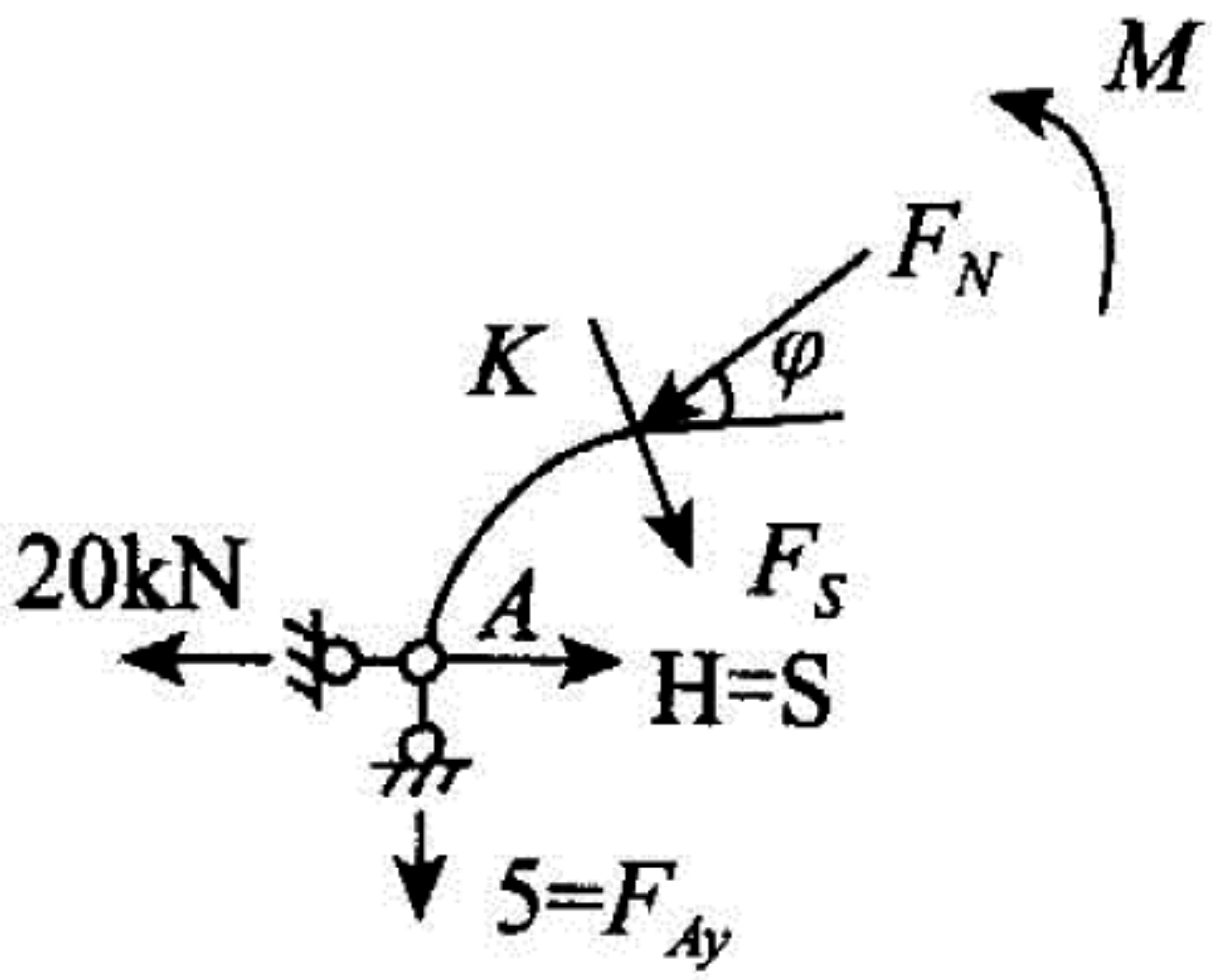


图 4-2-8

列平衡方程算得截面内力如下

$$M_K = -5\times2+(20-5)\times6-2\times6\times3=44KN\cdot m$$
$$Q_K = -5\times0.6+(20-5-2\times6)\times0.8=-0.6KN$$
$$N_K = -5\times0.8-(20-5-2\times6)\times0.6=-5.8KN$$

4-3　试求图示三铰圆环截面 K 的内力。

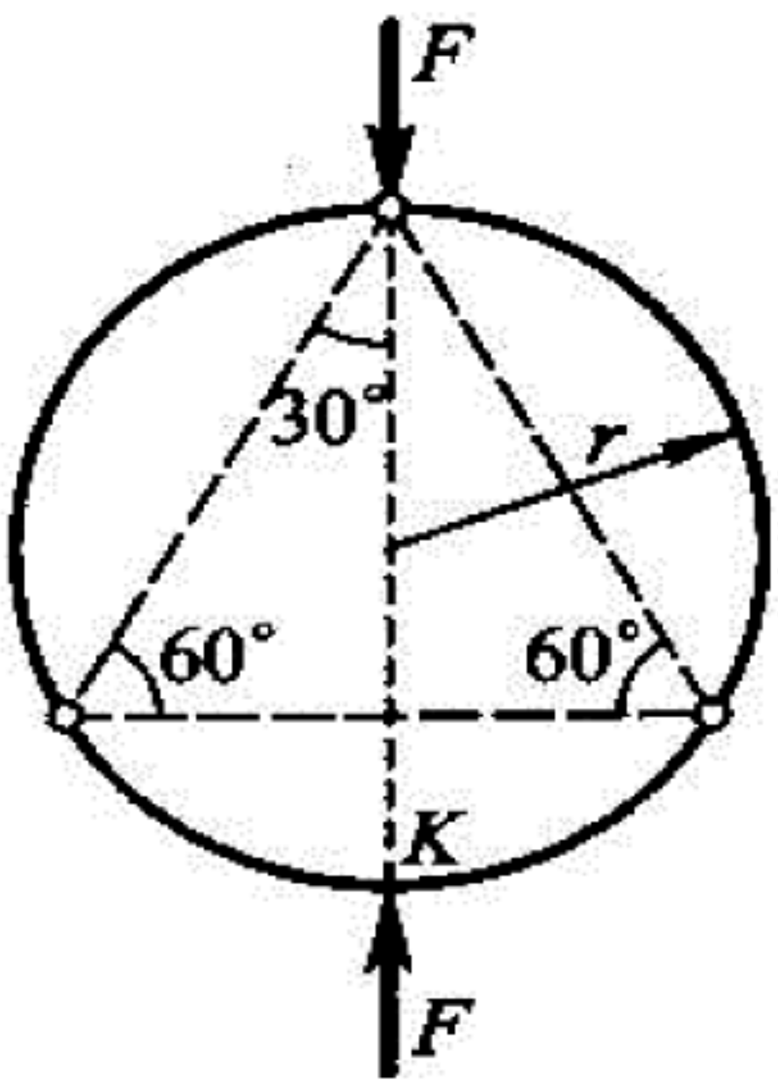


图 4-2-9（题 4-3）

解：首先取上部结构受力分析，如图 4-2-10 所示。

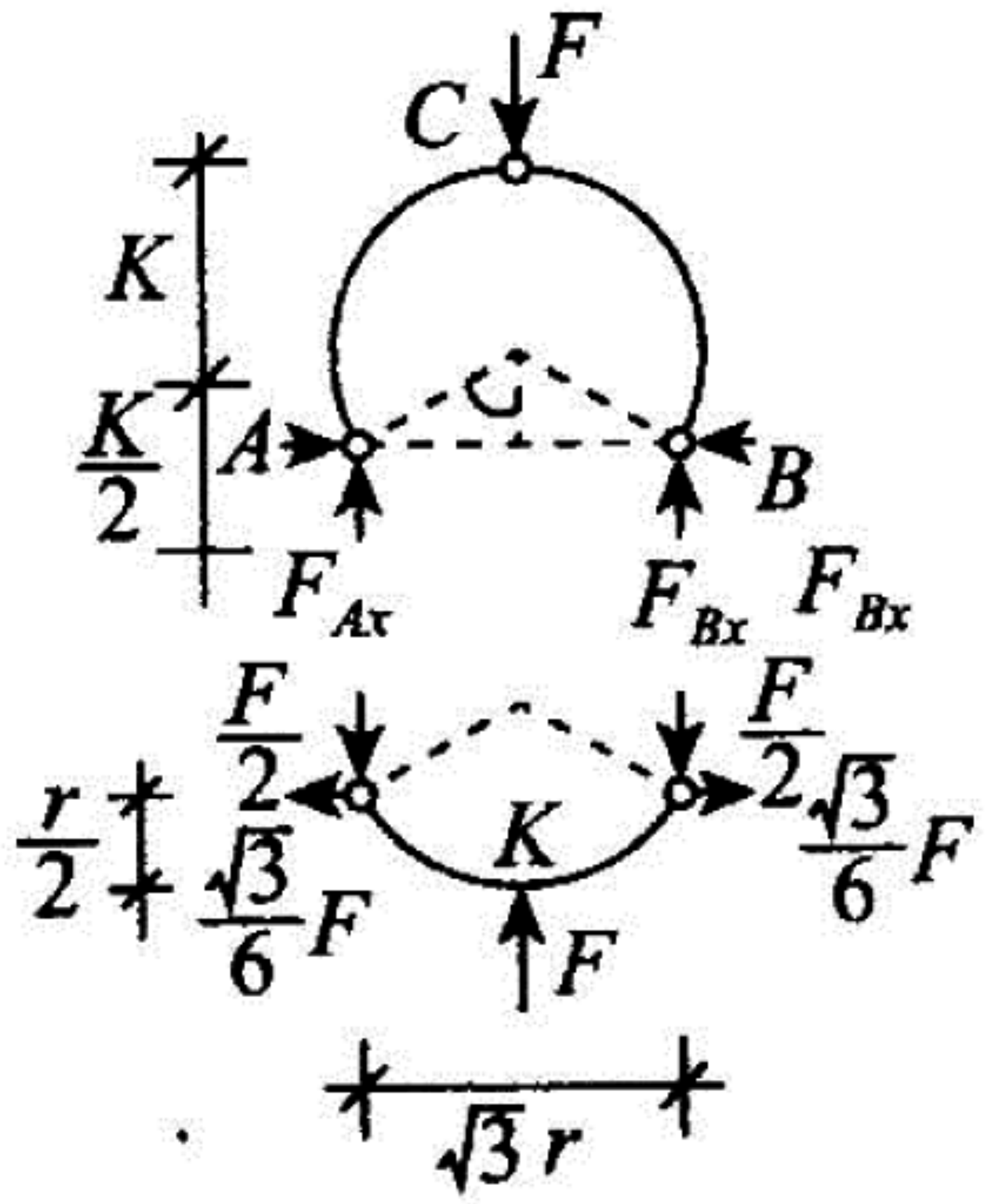


图 4-2-10

平衡方程求解支座反力如下

$$\sum M_A=0, F_{By}\cdot\sqrt{3}r-F\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=0, F_{By}=\frac{F}{2}$$

$$\sum F_y=0, F_{Ay}=\frac{F}{2}$$

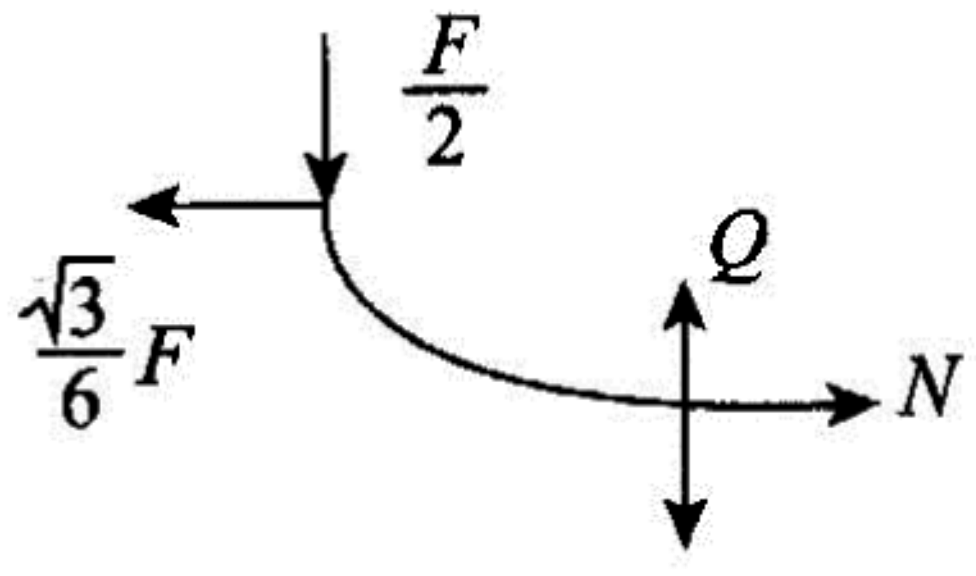
$$\sum M_c=0, F_{By}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r-F_{Bx}\cdot\frac{3}{2}r=0, F_{Bx}=\frac{\sqrt{3}}{6}F$$

再取下侧结构分析，如图 4-2-10 所示。

$$M_K=\frac{F}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r+\frac{\sqrt{3}}{6}Fr(1-\cos60°)=\frac{\sqrt{3}}{3}Fr \text{（内侧受拉）}$$

取含 K 截面的隔离体分析

$$Q_{K左}=-\frac{F}{2},\ Q_{K右}=\frac{F}{2},\ N_K=\frac{\sqrt{3}}{6}F \text{（拉力）}$$



4-4　试求图示三铰拱在均布荷载作用下的合理拱轴线方程。

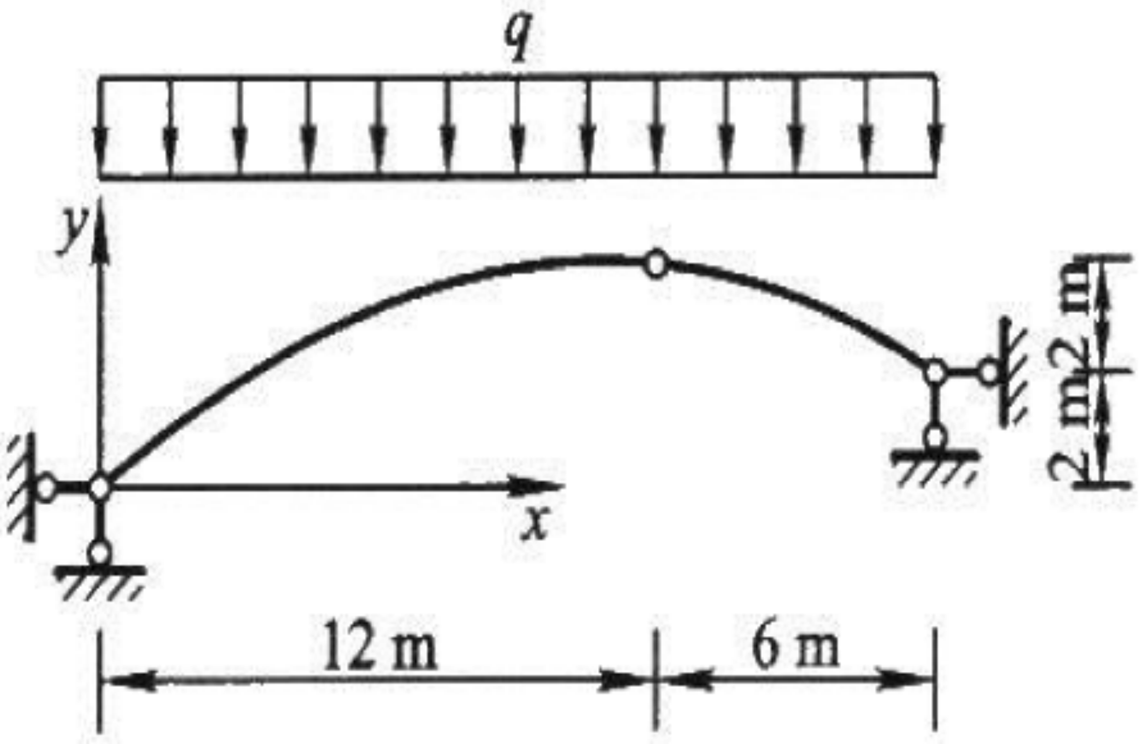


图 4-2-11（题 4-4）

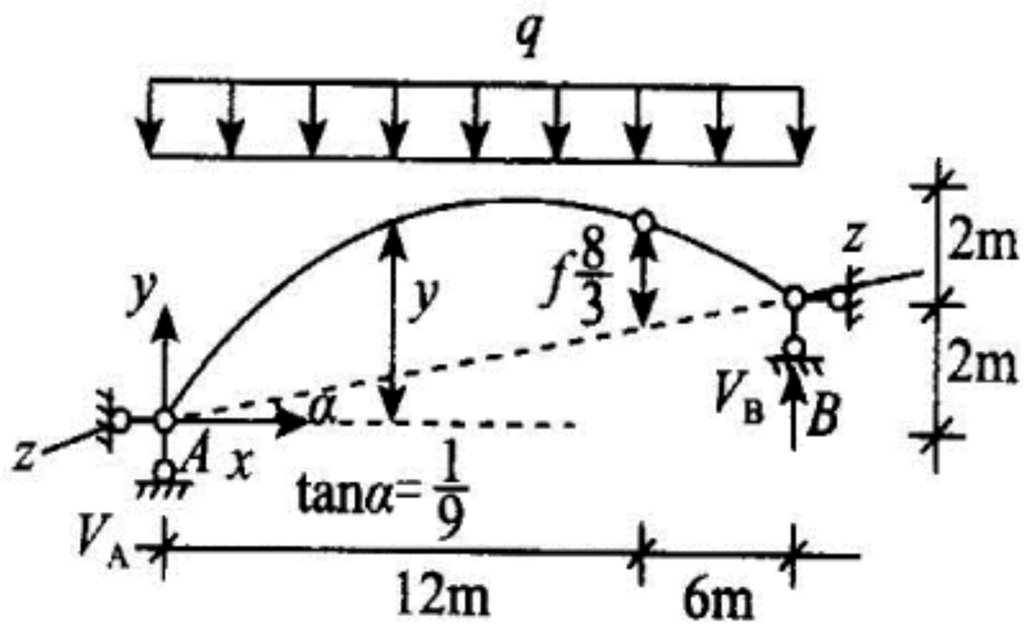


图 4-2-12（题 4-4 解图）

解：建立如图 4-2-12 所示的坐标系，将力分解为 z 方向和 y 方向，列平衡方程求解内力

$$\sum M_A=0, V_B \cdot 18-q \cdot 18 \cdot 9=0$$

$$V_B=9q$$

由几何条件可知

$$H=z\cos\varphi=\frac{M_c^\circ}{f}=\frac{9q\times 12-\frac{q}{2}\times 12^2}{\frac{8}{3}}=\frac{27}{2}q$$

则

$$V_A=V^\circ A+H\tan\alpha=9q+\frac{27}{2}q\cdot\frac{1}{9}=\frac{21}{2}q$$

$$M=V_Ax-\frac{qx^2}{2}-Hy=q\left(\frac{21}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{27}{2}y\right)=0$$

得出合理拱轴线

$$y=\frac{x}{27}(21-x)$$

4.3　名校考研真题详解

一、填空题

1. 合理拱轴线的定义是____________________________________。对称三铰拱在均布荷载作用下（图 4-3-1（a）），其合理拱轴线是___________。对称三铰拱在填土荷载作用下（图 4-3-1（b）），其合理拱轴线是__________。[湖南大学 2007 研]

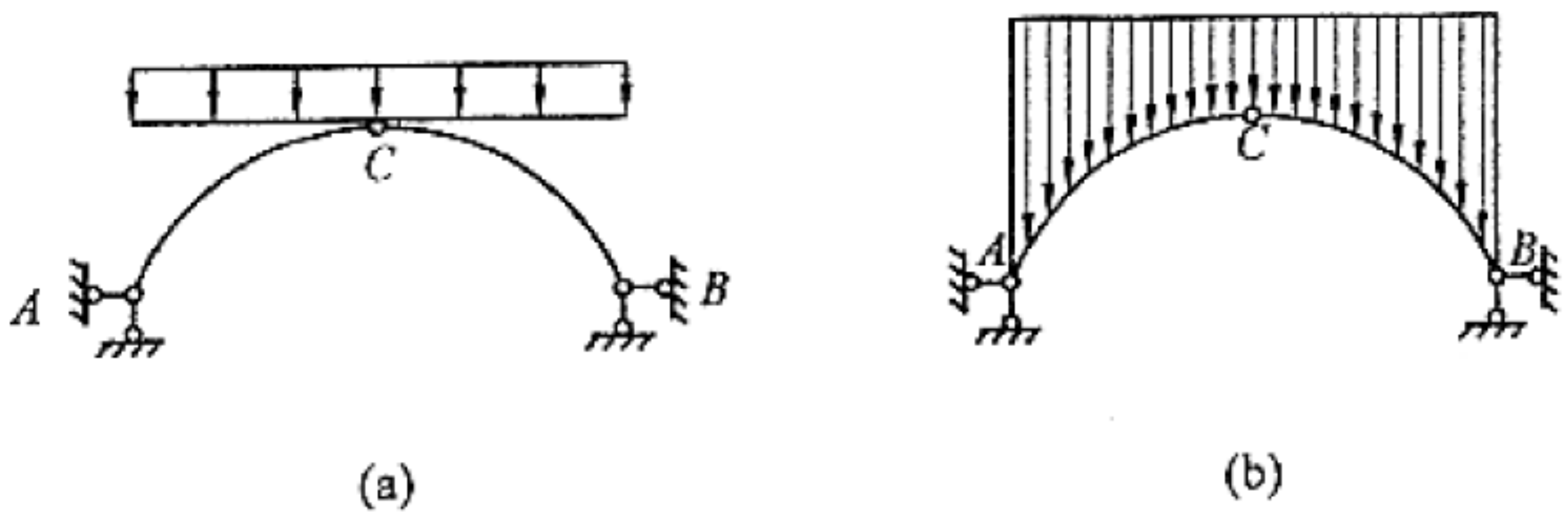


图 4-3-1

【答案】在某一特定荷载作用下，使拱截面只承受压力的轴线；二次抛物线；悬链线

【解析】合理拱轴线是指在某一特定荷载作用下，使拱截面只承受压力的轴线；对称三铰拱在沿水平方向均匀分布的竖向荷载作用下，拱的合理拱轴线为抛物线；对称三铰拱在沿拱轴线方向均匀分布的竖向荷载作用下，其合理拱轴线是较为复杂的悬链线。

2．图 4-3-2 示三铰拱在荷载作用下，其水平推力 F_H=______________。[湖南大学 2006 研]

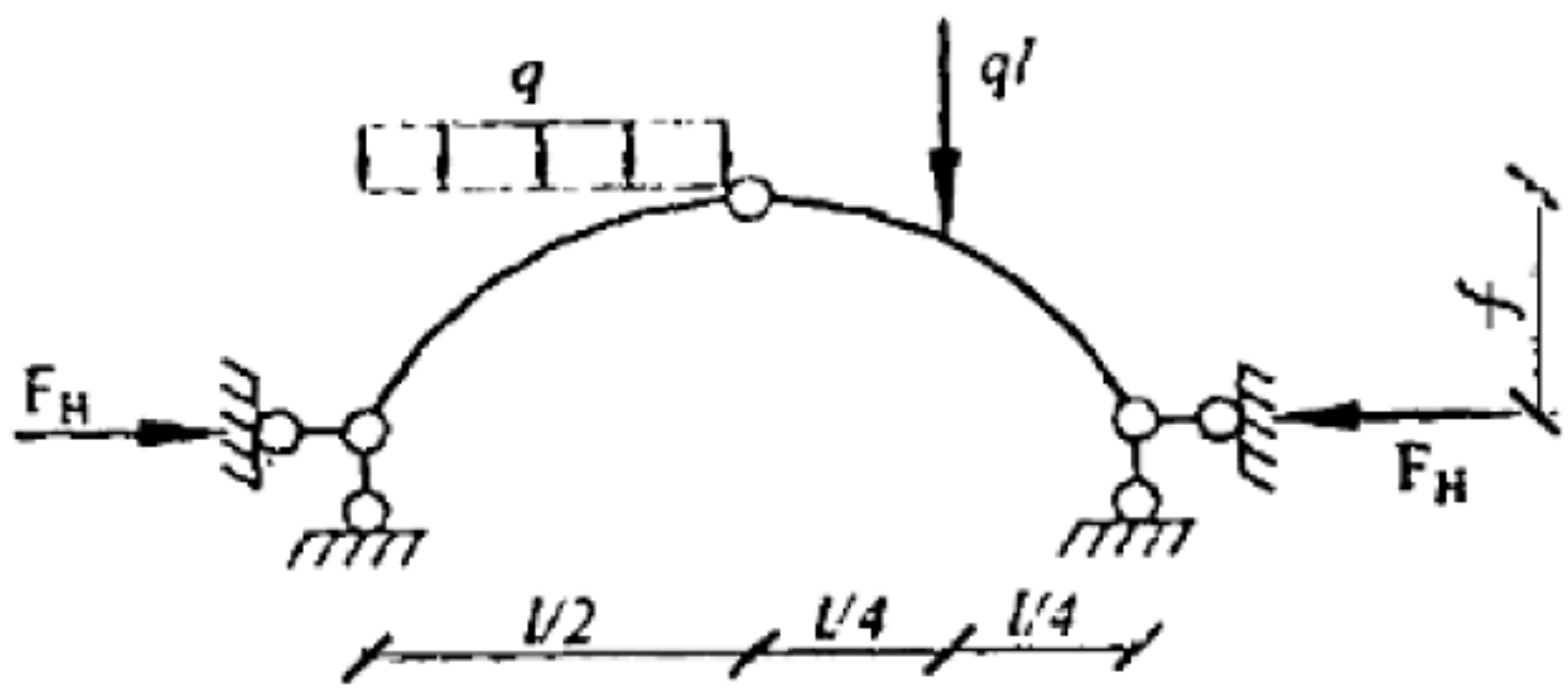


图 4-3-2

【答案】$\dfrac{3ql^2}{16}\cdot\dfrac{1}{f}$

【解析】利用公式直接求解，设看成简支梁时中间截面的弯矩为 M_0，计算得 $M_0=\dfrac{7}{8}ql\cdot\dfrac{l}{2}-\dfrac{l}{4}\cdot ql=\dfrac{3ql^2}{16}$，

故水平推力 $F_H=\dfrac{M_0}{f}=\dfrac{3ql^2}{16}\dfrac{1}{f}$。

3．图 4-3-3 示三铰拱的水平反力 H 为________。[国防科技大学 2003 研]

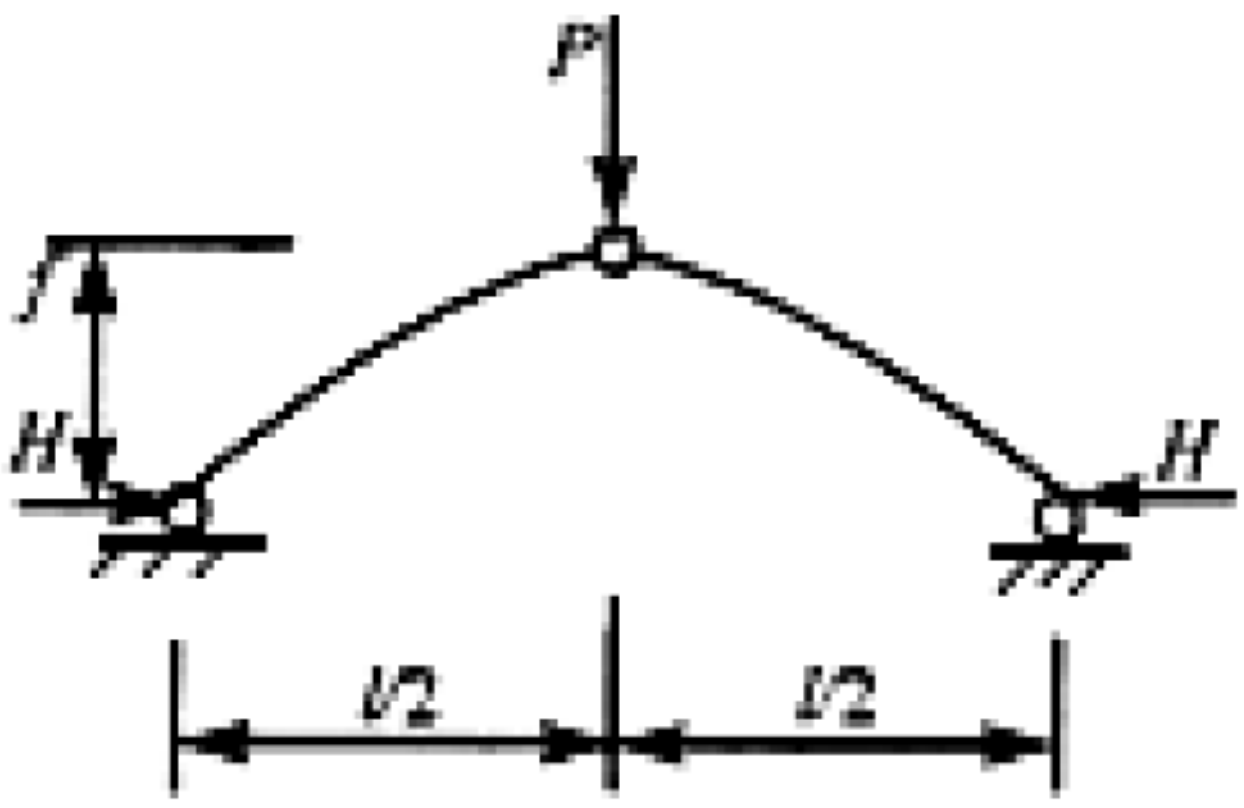


图 4-3-3

【答案】$Pl/4f$

【解析】利用公式直接求解，设看成简支梁时中间截面的弯矩为 M_0，计算得 $M_0=\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}=\frac{Pl}{4}$，故水平推力 $F_H=\frac{M_0}{f}=\frac{Pl}{4f}$。

二、选择题

图 4-3-4 示三铰拱，链杆 AB 的轴力为（　　）。[中南大学 2005 研]

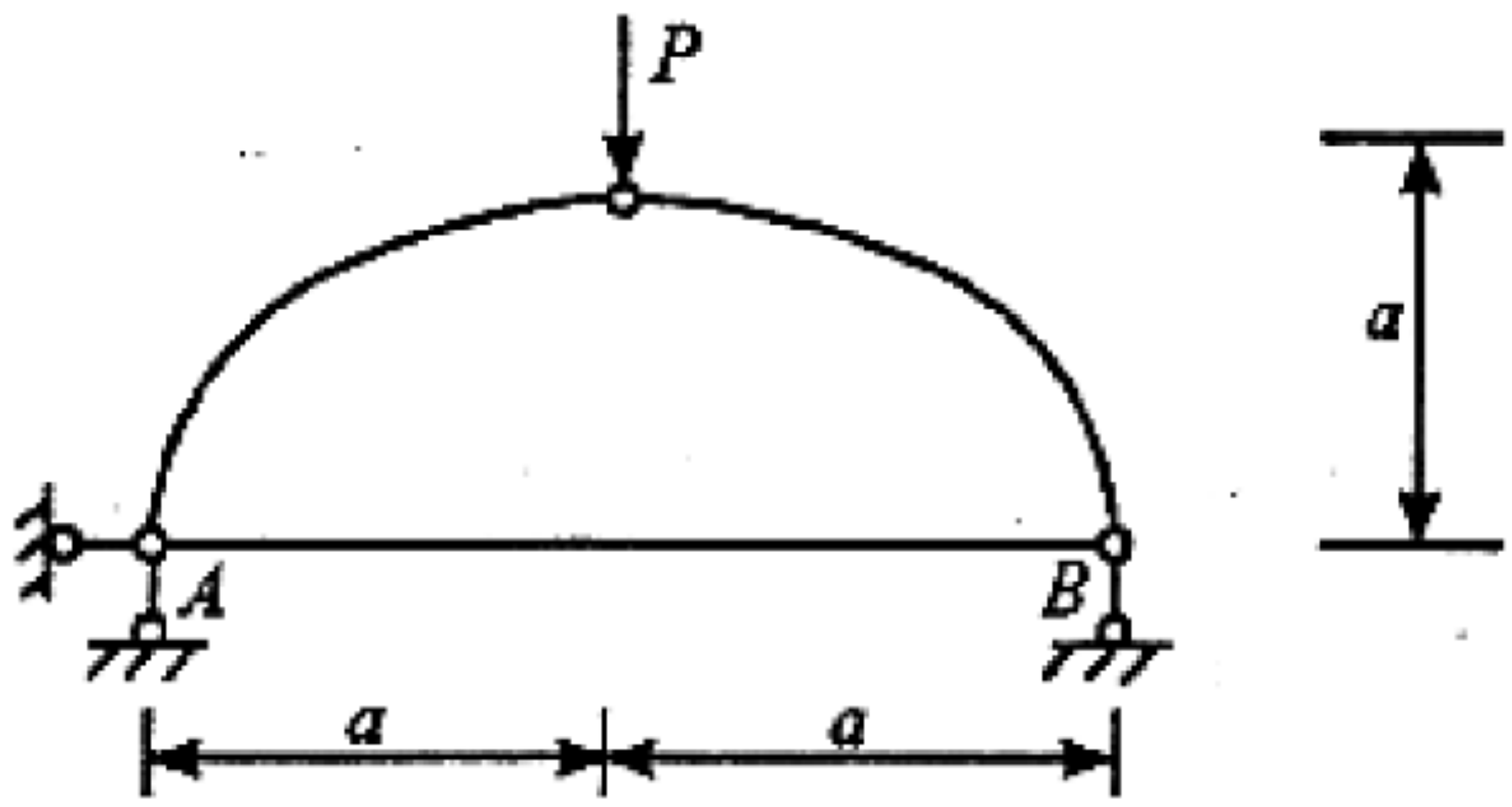


图 4-3-4

A. -P/2

B. -P/4

C. P/4

D. P/2

【答案】D

【解析】显然 A、B 支座的约束反力相等，均为 P/2；在中间点截开，取右半部分为隔离体，向中间点取矩有

$$\frac{P}{2}\cdot a-N_{AB}\cdot a=0$$

算得链杆 AB 的轴力 N_{AB}=P/2。

三、判断题

图 4-3-5 所示拱在荷载作用下，N_{DE} 为 30kN。（　　）[天津大学 2003 研]

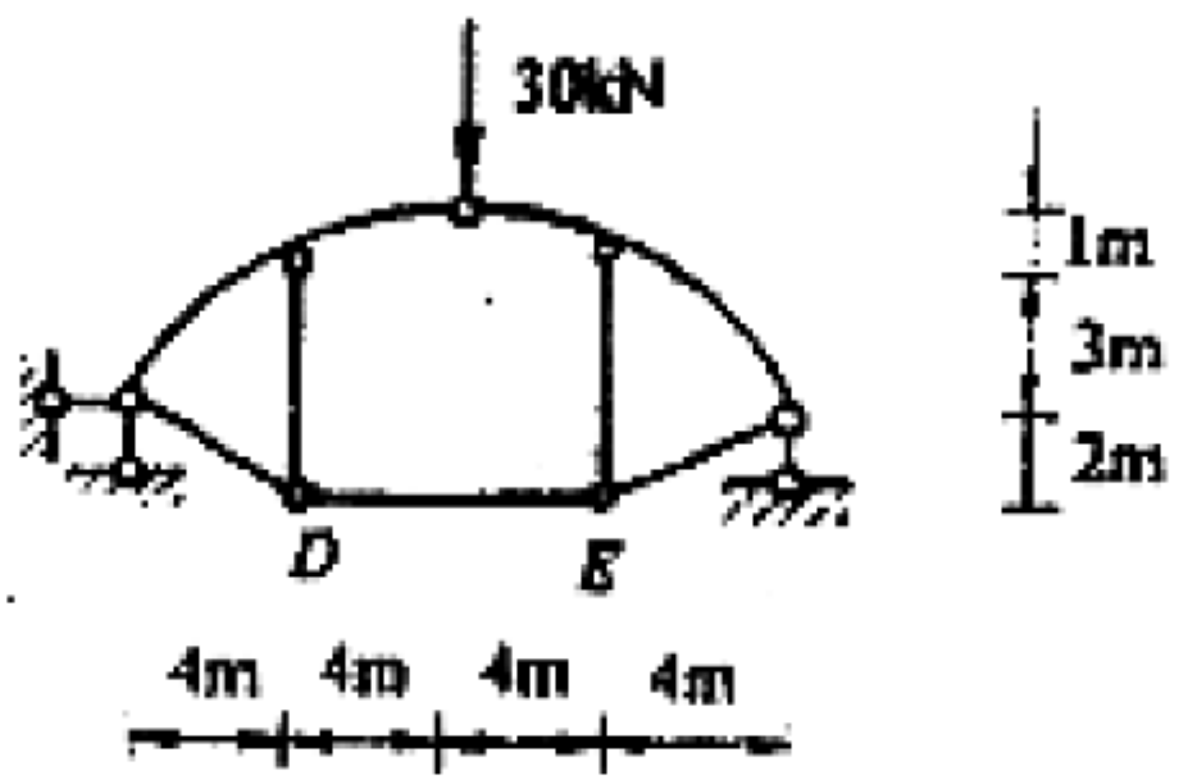


图 4-3-5

【答案】错

【解析】先整体分析，显然支座的约束反力相等，均为 15kN；沿中间结点和 DE 杆截开，取右半部分为隔离体，有 $15\times8-N_{DE}\cdot6=0$，算得 N_{DE}=20kN。

四、计算题

求图 4-3-6 示结构支座 C 的水平和竖向反力。[浙江大学 2004 研]

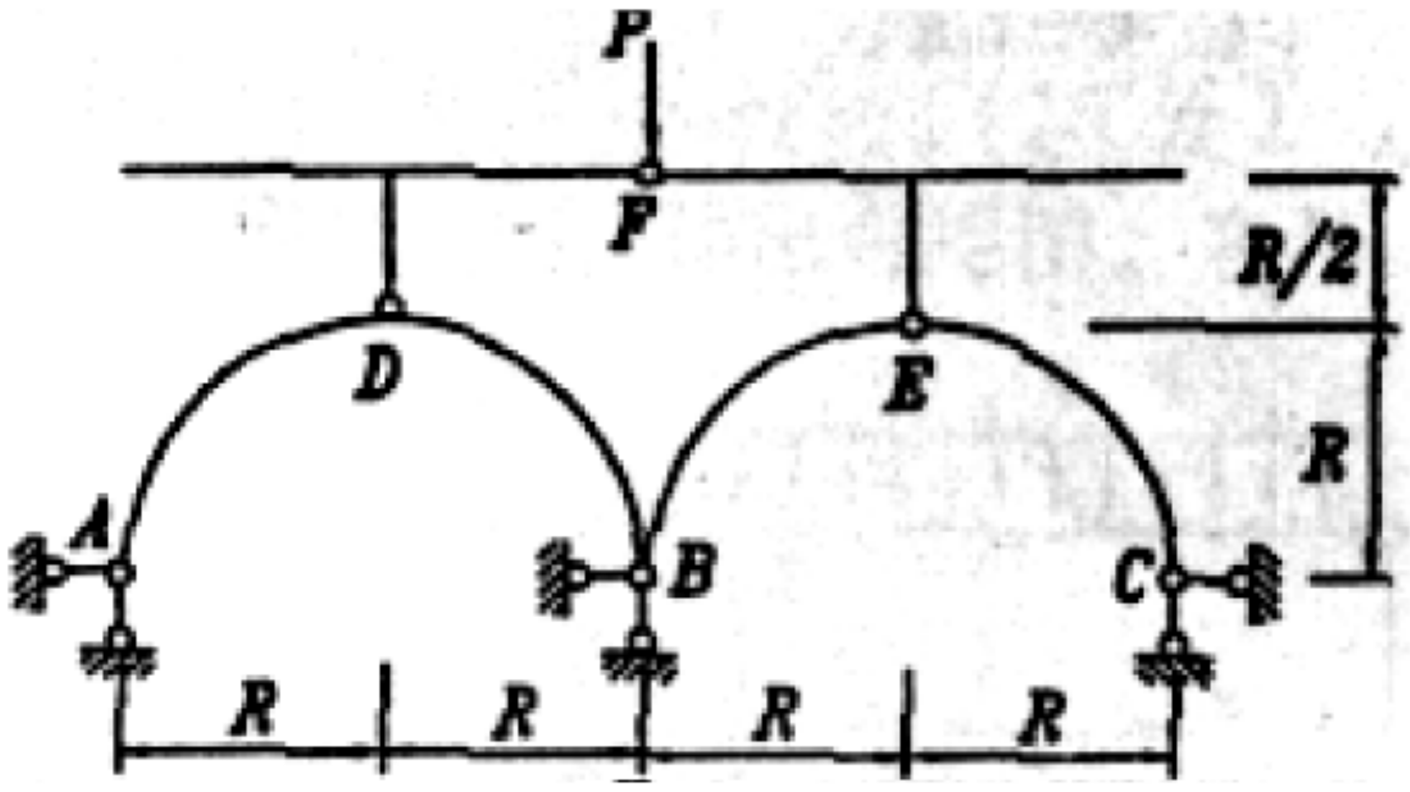


图 4-3-6

解：（1）取上部杆为研究对象，受力图如下图 4-3-7 所示。

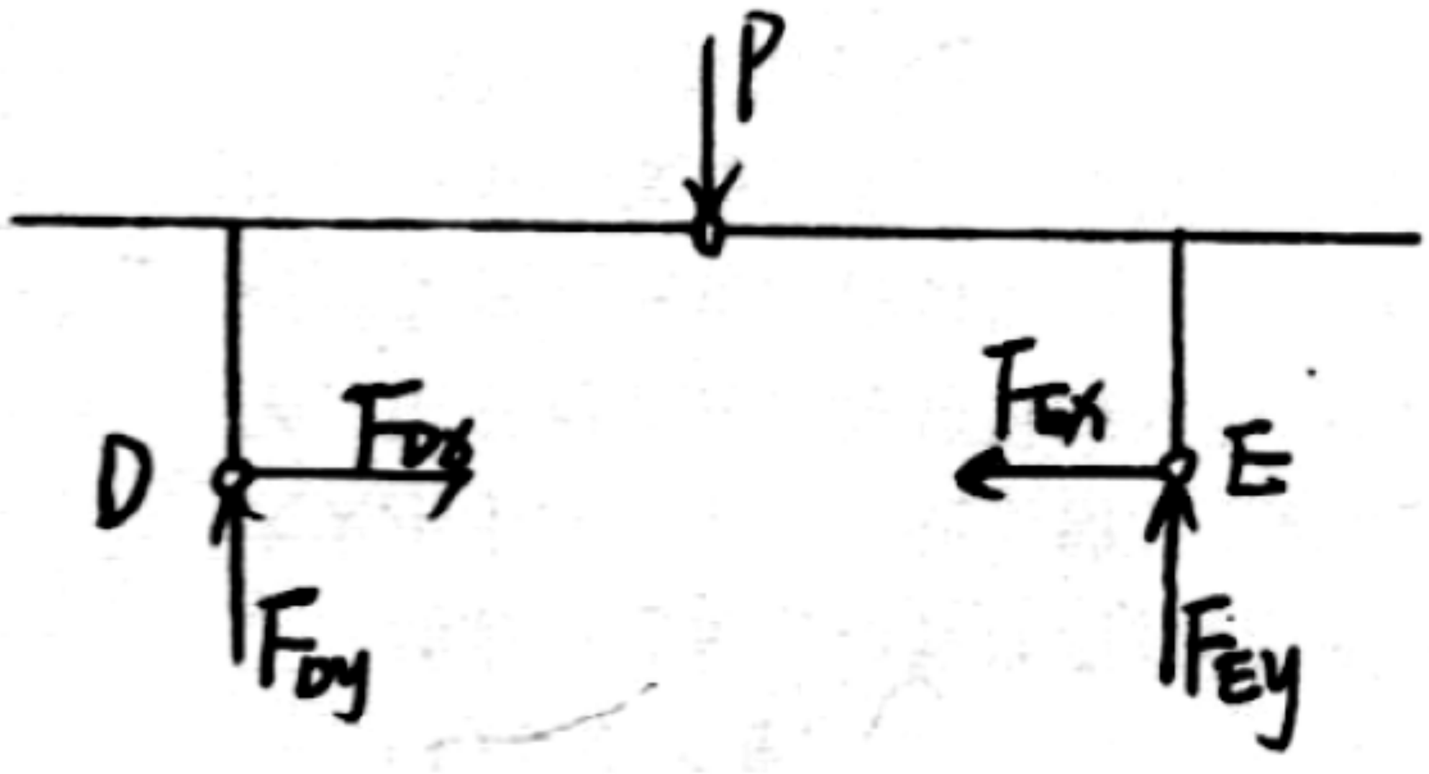


图 4-3-7

解得 $F_{Dy}=F_{Ey}=\dfrac{P}{2}$。

取 FE 为隔离体受力图如下图 4-3-8 所示。

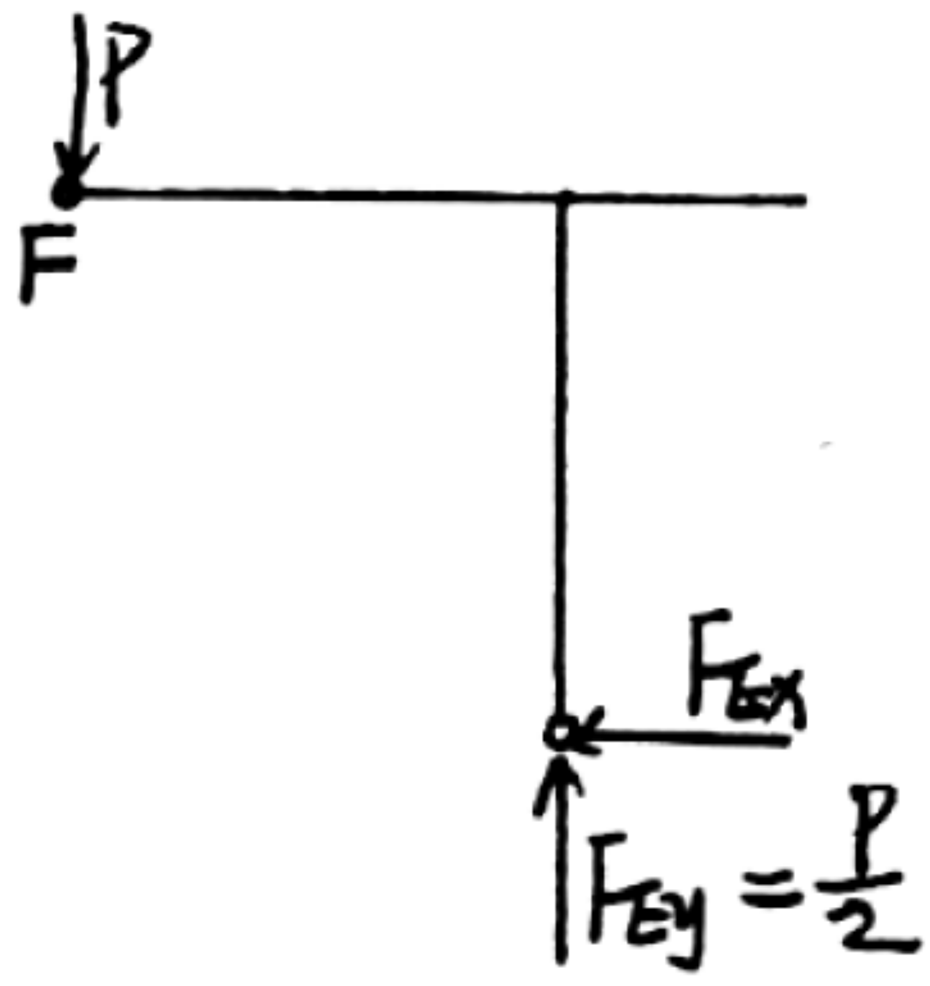


图 4-3-8

则有

$$\sum M_F=0\text{，}\quad F_{Ey}\cdot R=F_{Ex}\cdot\frac{P}{2}$$

解得 $F_{Ex}=P$。

下面的拱受力对称，只研究右半拱，受力图如下图 4-3-9 所示。

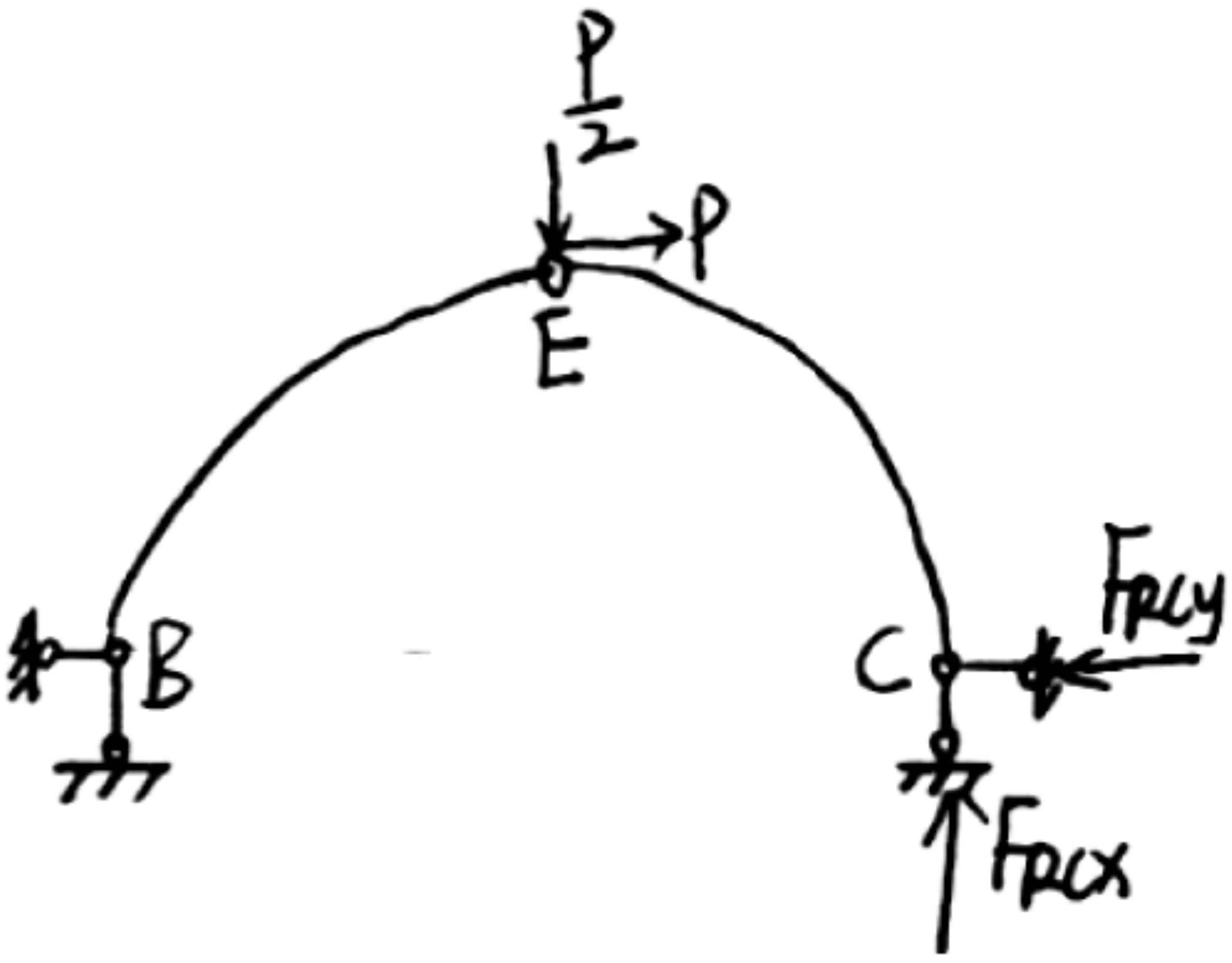


图 4-3-9

则有

$$\sum M_B=0,\quad \frac{P}{2}\cdot R+P\cdot R=F_{RCx}\cdot 2R$$

解得 $F_{RCx}=\frac{3}{4}P$。

取 EC 为隔离体，则有

$$\sum M_E=0,\quad F_{RCy}\cdot R=F_{RCx}\cdot R$$

解得 $F_{RCy}=F_{RCx}=\frac{3}{4}P$。

第 5 章　静定平面桁架

5.1　复习笔记

【知识框架】

- 静定平面桁架
  - 概述
    - 桁架的定义
    - 桁架的分类
      - 根据桁架的外形：平行弦桁架、折弦桁架、三角弦桁架
      - 按照竖向荷载是否引起水平支座反力：梁式桁架、拱式桁架
      - 按几何组成方式：简单桁架、联合桁架、复杂桁架
    - 桁架各部分的名称：弦杆、腹杆、节间、节间长度、跨度、桁高
  - 平面桁架的计算简图
    - 平面桁架计算假定
    - 假定桁架的受力分析
    - 计算简图
    - 实际结构与计算简图之间的差别
    - 主应力和次应力
  - 结点法
    - 结点法的定义
    - 结点法求解规律
    - 特殊结点的平衡规律：L 形结点、T 形结点、X 形结点、K 形结点
    - 零杆
  - 截面法
    - 截面法定义
    - 截面法的分类
      - 力矩法
      - 投影法
    - 截面法的注意事项
    - 截面法和结点法的比较
  - 常用梁式桁架的比较
    - 内力分析：平行弦桁架、抛物线型桁架、三角形桁架
    - 各桁架的特点：平行弦桁架、抛物线型桁架、三角形桁架
  - 组合结构的计算
    - 组合结构的定义
    - 组合结构的受力分析
      - 链杆
      - 受弯构件
    - 内力求解步骤：先求反力，再求链杆的轴力，最后求受弯构件内力
  - 零载法分析几何构造
    - 零载法的描述
    - 零载法的使用场合

【重点难点归纳】

一、概述

1．桁架的定义

桁架是指经合理简化后，由杆件组成，整体以承受弯矩为主，而杆件主要承受轴力，所有结点均为铰结点的结构。

2．桁架的分类

（1）根据桁架的外形

①平行弦桁架（图 5-1-1（a））；

②折弦桁架（图 5-1-1（b））；

③三角形桁架（图 5-1-1（c））。

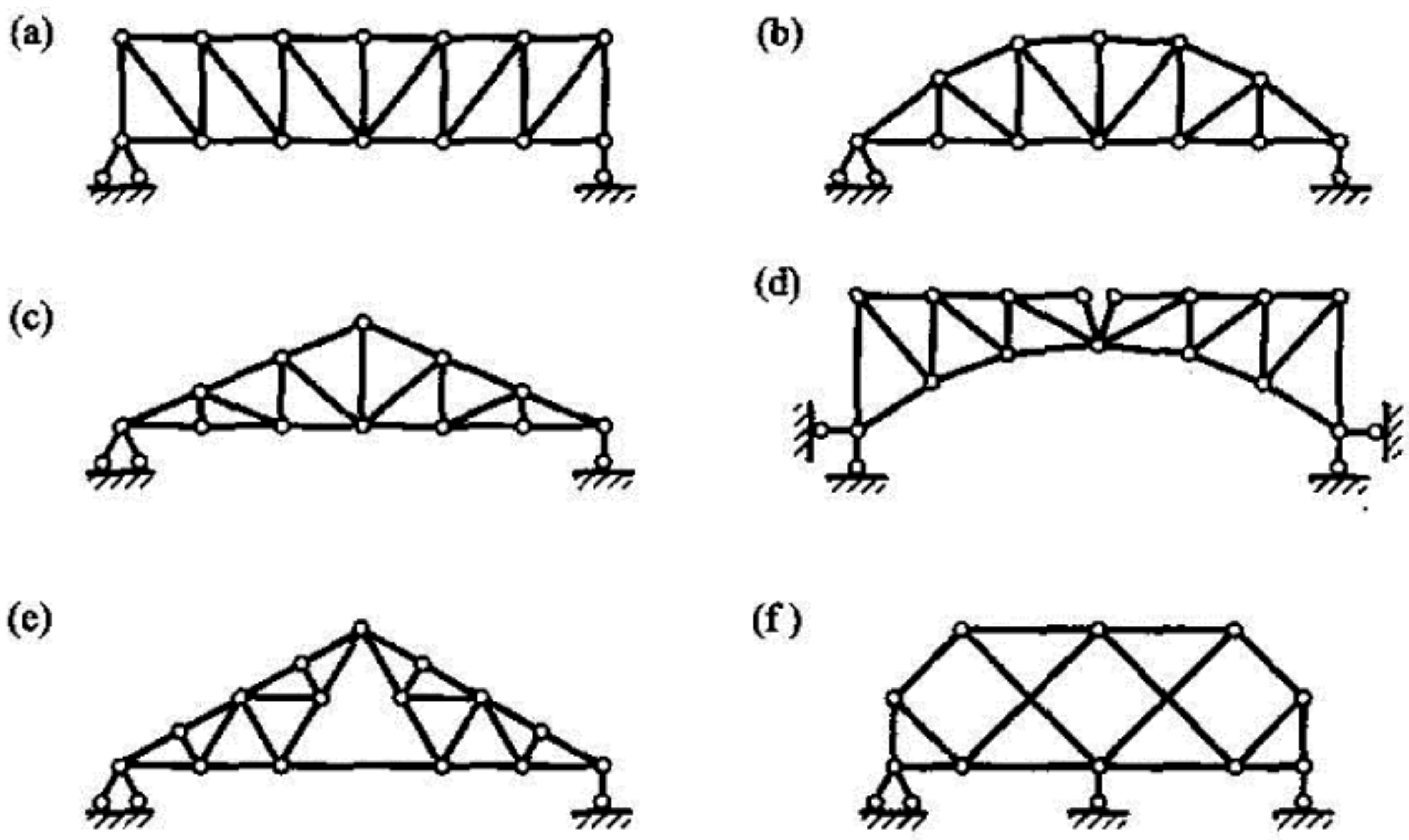


图 5-1-1

（2）按照竖向荷载是否引起水平支座反力

①无推力桁架或梁式桁架（图 5-1-1（a）、（b）和（c））；

②有推力桁架或拱式桁架（图 5-1-1（d））。

（3）静定桁架按几何组成方式可分为：

①简单桁架

由基础或一个基本铰结三角形依次增加二元体而组成的桁架（图 5-1-1（a）、（b）和（c））。

②联合桁架

由几个简单桁架按几何不变体系的基本组成规则而联合组成的桁架（图 5-1-1（d）、（e））。

③复杂桁架

不是按上述两种方式组成的其他静定桁架（图 5-1-1（f））。

3．桁架各部分名称

（1）弦杆

①上弦杆；

②下弦杆。

（2）腹杆

①斜杆；

②竖杆。

（3）节间

节间是指弦杆上相邻两结点间的区间。

（4）节间长度

节间长度是指节间的间距 d。

（5）跨度

跨度是指两支座间的水平距离 l。

（6）桁高

桁高是指支座联线至桁架最高点的距离 h。

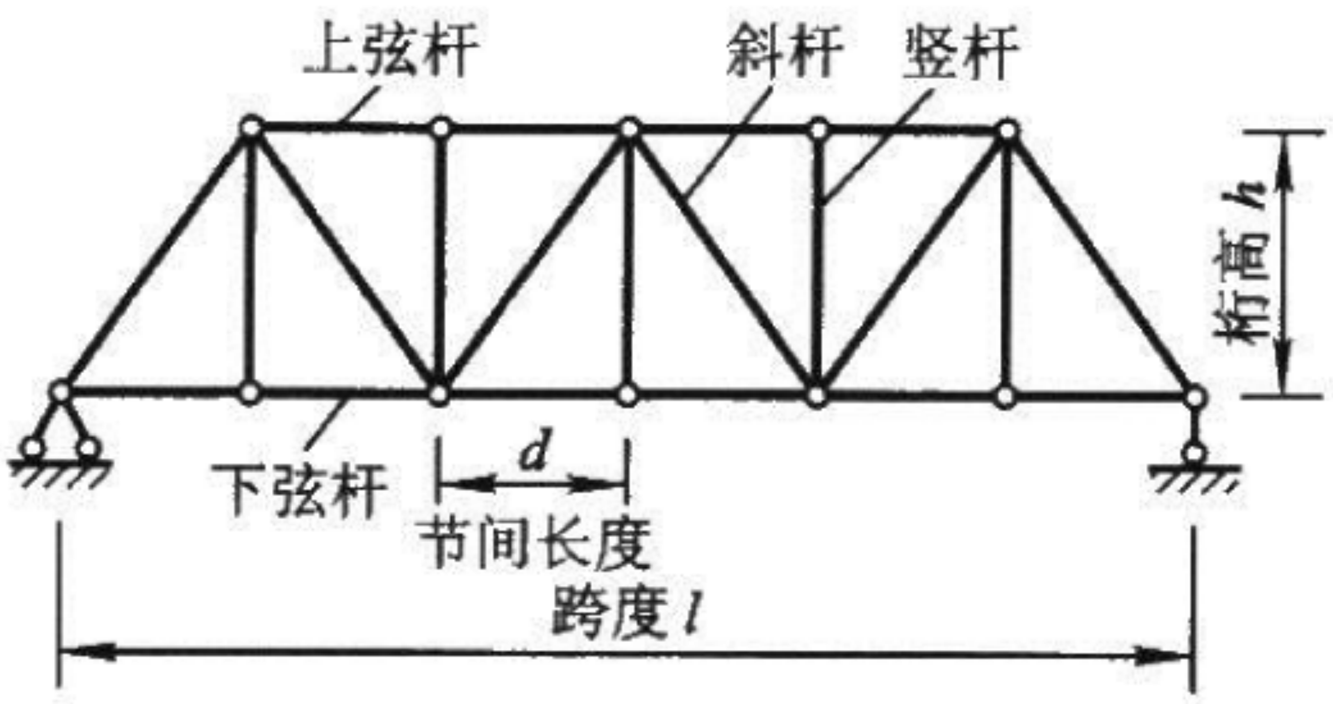


图 5-1-2

二、平面桁架的计算简图

1．平面桁架计算假定

（1）各结点都是无摩擦的理想铰；

（2）各杆轴都是直线，并在同一平面内且通过铰的中心；

（3）荷载只作用在结点上并在桁架的平面内。

2．假定下桁架的受力分析

符合上述理想假定的桁架各杆将只受轴力，截面上的应力是均匀分布的，可同时达到容许值，材料能得到充分利用。因此，与梁相比，桁架的用料较省，并能跨越更大的跨度。

3．计算简图

①实际结构

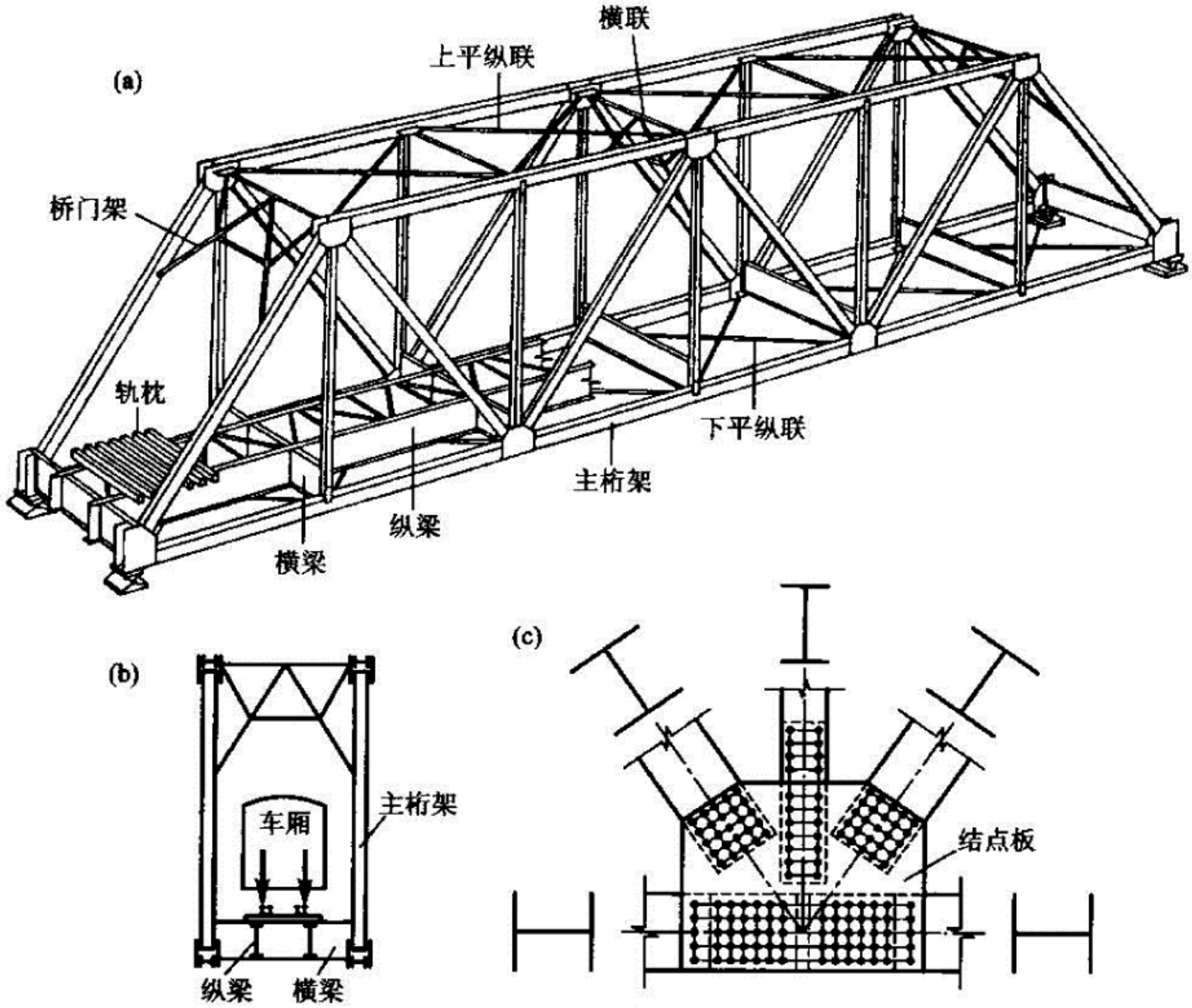


图 5-1-3

②计算简图

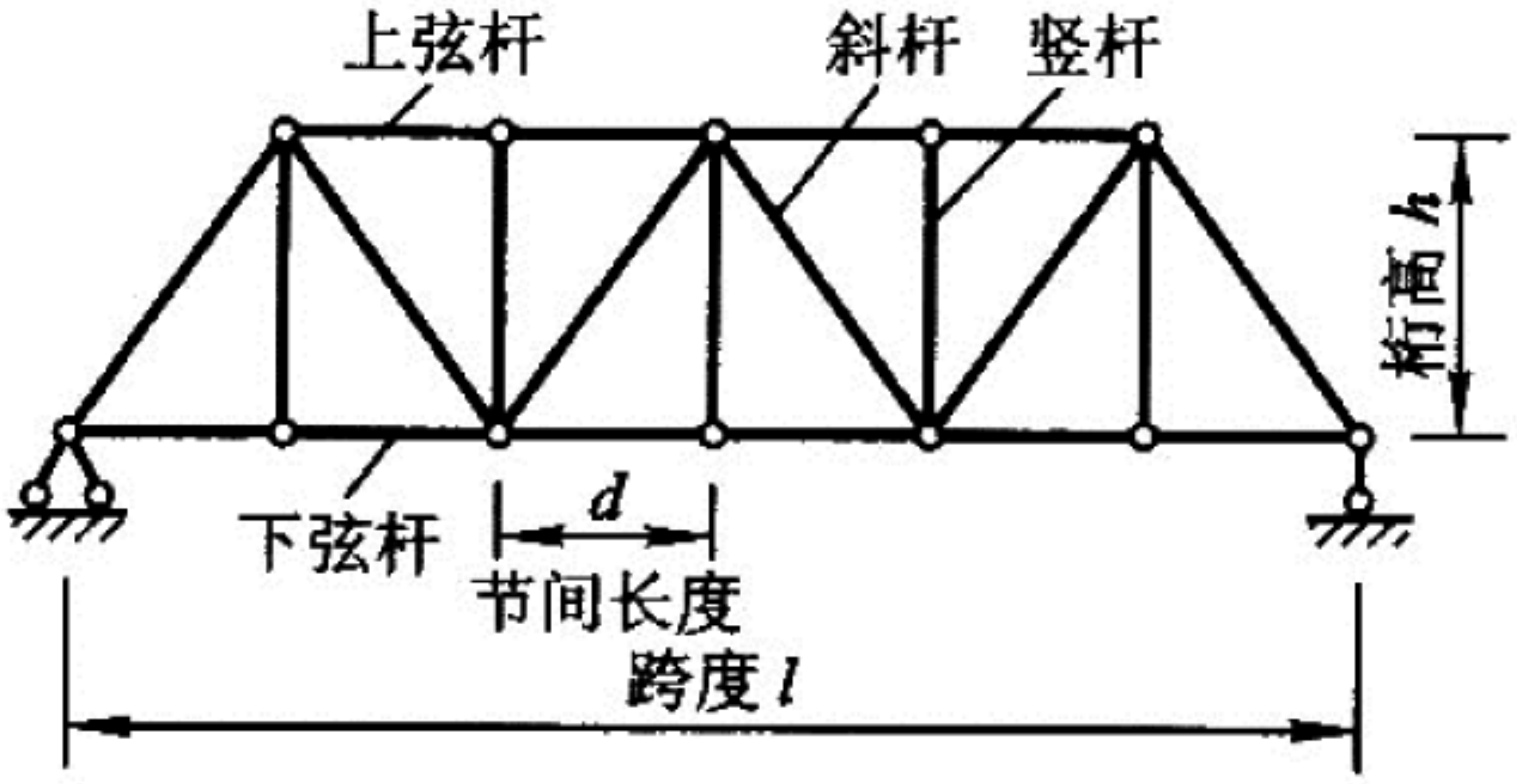


图 5-1-4

4．实际结构与计算简图之间的差别

（1）结点的刚性；
（2）各杆轴线不可能绝对平直，在结点处也不可能准确交于一点；
（3）非结点荷载（例如杆件自重、风荷载等）；
（4）结构的空间作用，等。

5．主应力与次应力

（1）主应力

主应力是指按理想平面桁架算得的应力。

（2）次应力

次应力是指实际一些因素所产生的附加应力。

一般情况下次应力的影响是不大的，可以忽略不计。

三、结点法

1．结点法定义

结点法是指截取桁架只含一个结点的部分为隔离体，由隔离体的平衡条件来计算所求桁架内力的方法。

2．结点法求解规律

（1）一般说来，任何静定桁架的内力和反力都可以用结点法求出。

（2）对于简单桁架（即从一个基本铰接三角形开始，依次增加二元体所组成的），在求出支座反力后，可按与几何组成相反的顺序，从最后的结点开始，依次倒算回去，便能顺利地用结点法求出所有杆件的内力。

3．特殊结点的平衡规律

（1）L 形结点

这是两杆结点（图 5-1-5（a））。当结点上无荷载时两杆内力皆为零。

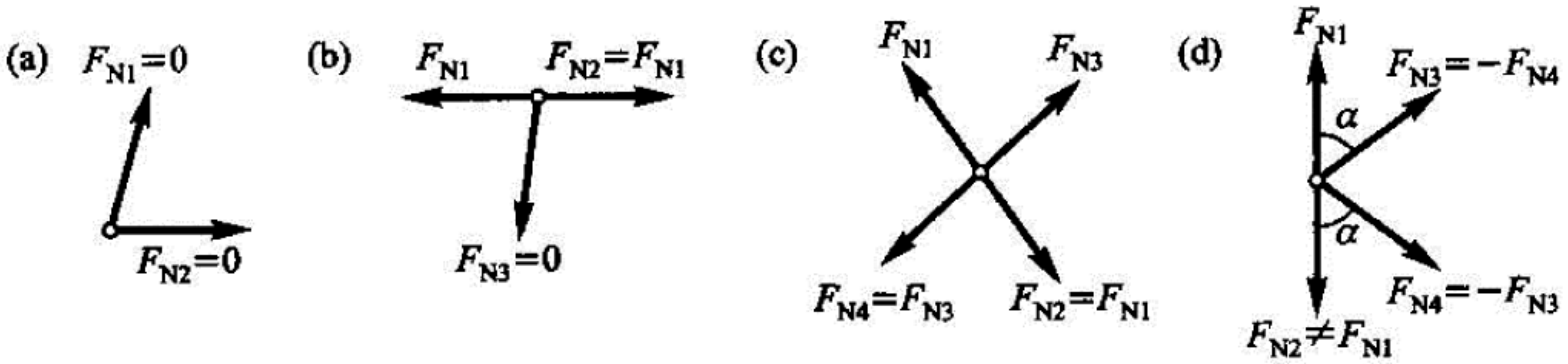


图 5-1-5

（2）T 形结点

这是三杆汇交的结点而其中两杆在一直线上（图 5-1-5（b））。当结点上无荷载时，第三杆内力必为零，而共线两杆内力相等且符号相同（即同为拉力或同为压力）。

（3）X 形结点

这是四杆结点且两两共线（图 5-1-5（c））。当结点上无荷载时，则共线两杆内力相等且符号相同。

（4）K 形结点

这是四杆结点，四杆中两杆共线，而另外两杆在此直线同侧且交角相等（图 5-1-5（d））。结点上如无荷载，则非共线两杆内力大小相等而符号相反（一为拉力，则另一为压力）。

4．零杆

零杆是指内力为零的杆件。

四、截面法

1．截面法的定义

截面法是指截取桁架不止包含一个结点的部分为隔离体，由隔离体的平衡条件来计算所求桁架内力的方法。

2．截面法分类

（1）力矩法

力矩法是指对隔离体某结点列力矩平衡方程而求出杆内力的方法。

（2）投影法

投影法是指对隔离体在某方向上列投影平衡方程而求出杆内力的方法。

3．注意事项

（1）用截面法求桁架内力时，应尽量使所截断的杆件不超过三根。这样所截杆件的内力均可求出。

（2）所作截面虽然截断了三根以上的杆件，但只要在被截各杆中，除一杆外，其余均汇交于一点或均平行，则该杆内力仍可首先求得。

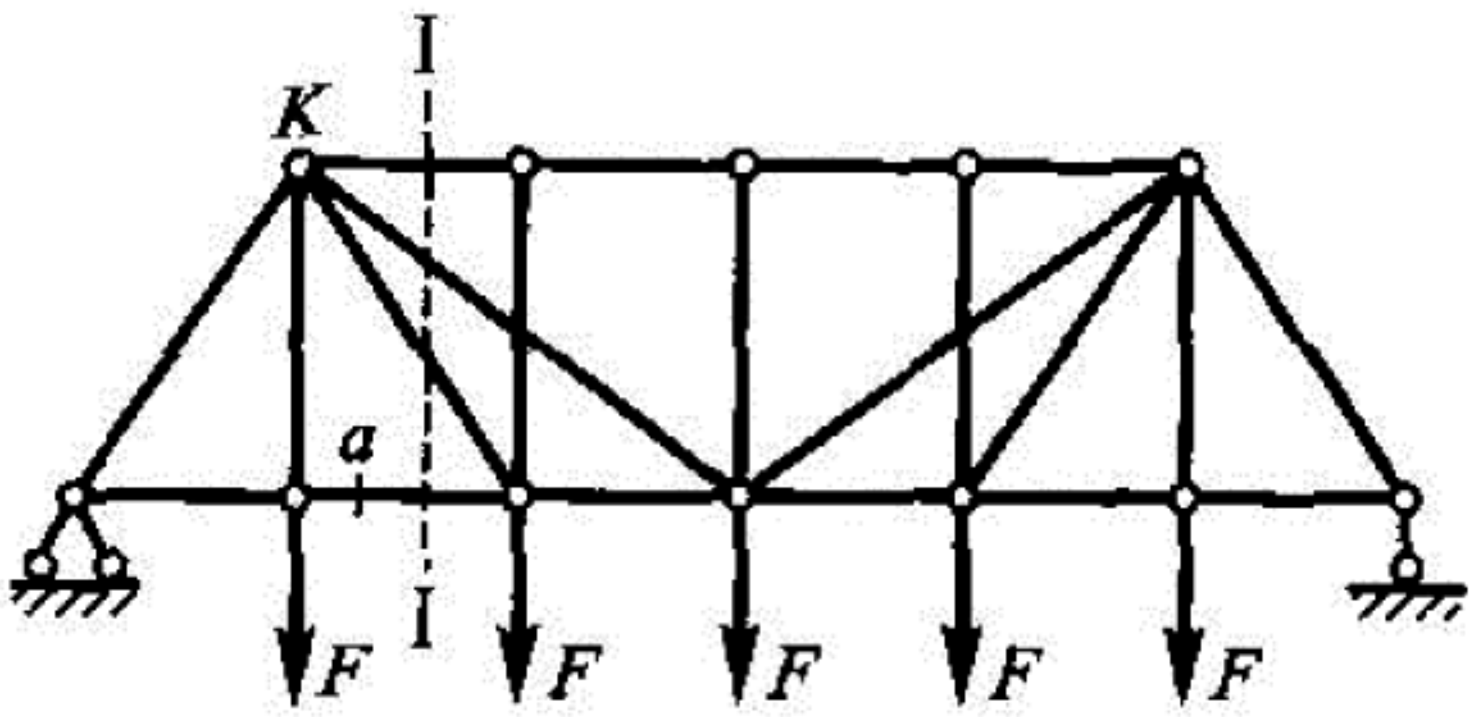


图 5-1-6

4．截面法与结点法的比较

（1）对于简单桁架，当要求全部杆件内力时，用结点法是适宜的；

（2）若只求个别杆件的内力，则往往用截面法较方便；

（3）对于联合桁架，若只用结点法将会遇到未知力超过两个的结点，故宜先用截面法将联合杆件的内力求出。

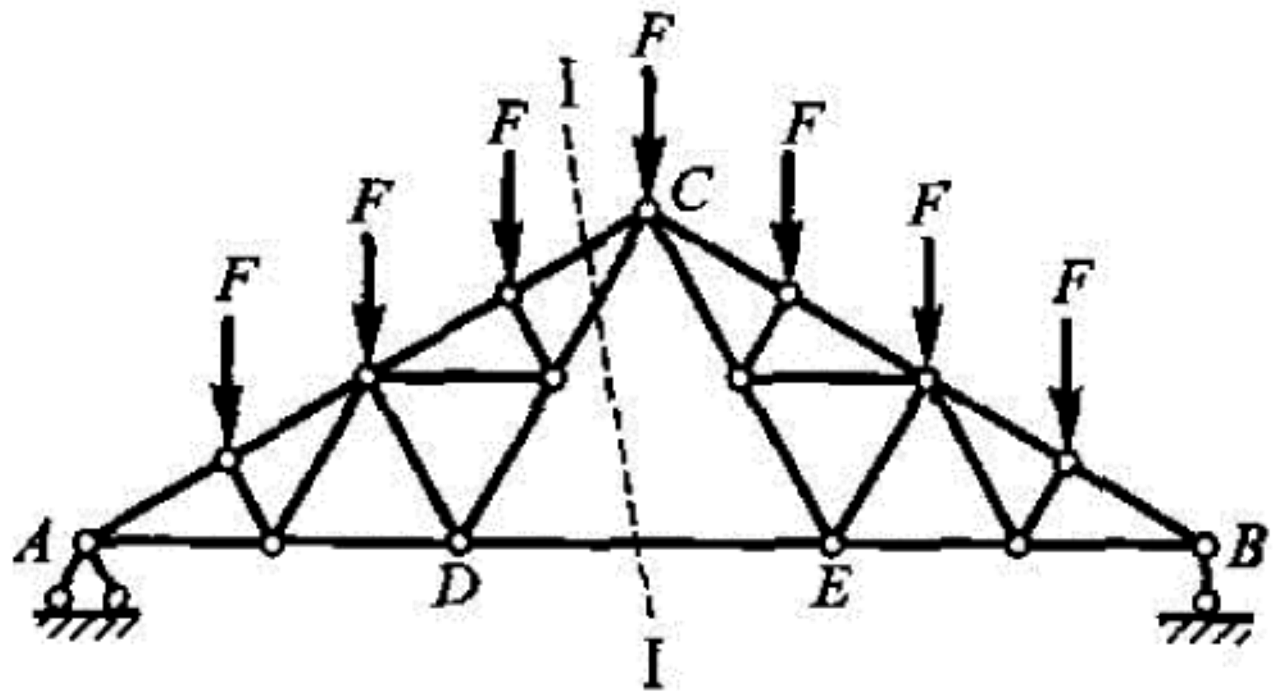


图 5-1-7

五、常用梁式桁架的比较

常用的简支梁式桁架有平行弦桁架、抛物线形桁架和三角形桁架。图 5-1-8（a）、（b）和（c）分别表示这三种桁架在下弦承受均布荷载时各杆的内力（均布荷载已用等效节点荷载代替）。

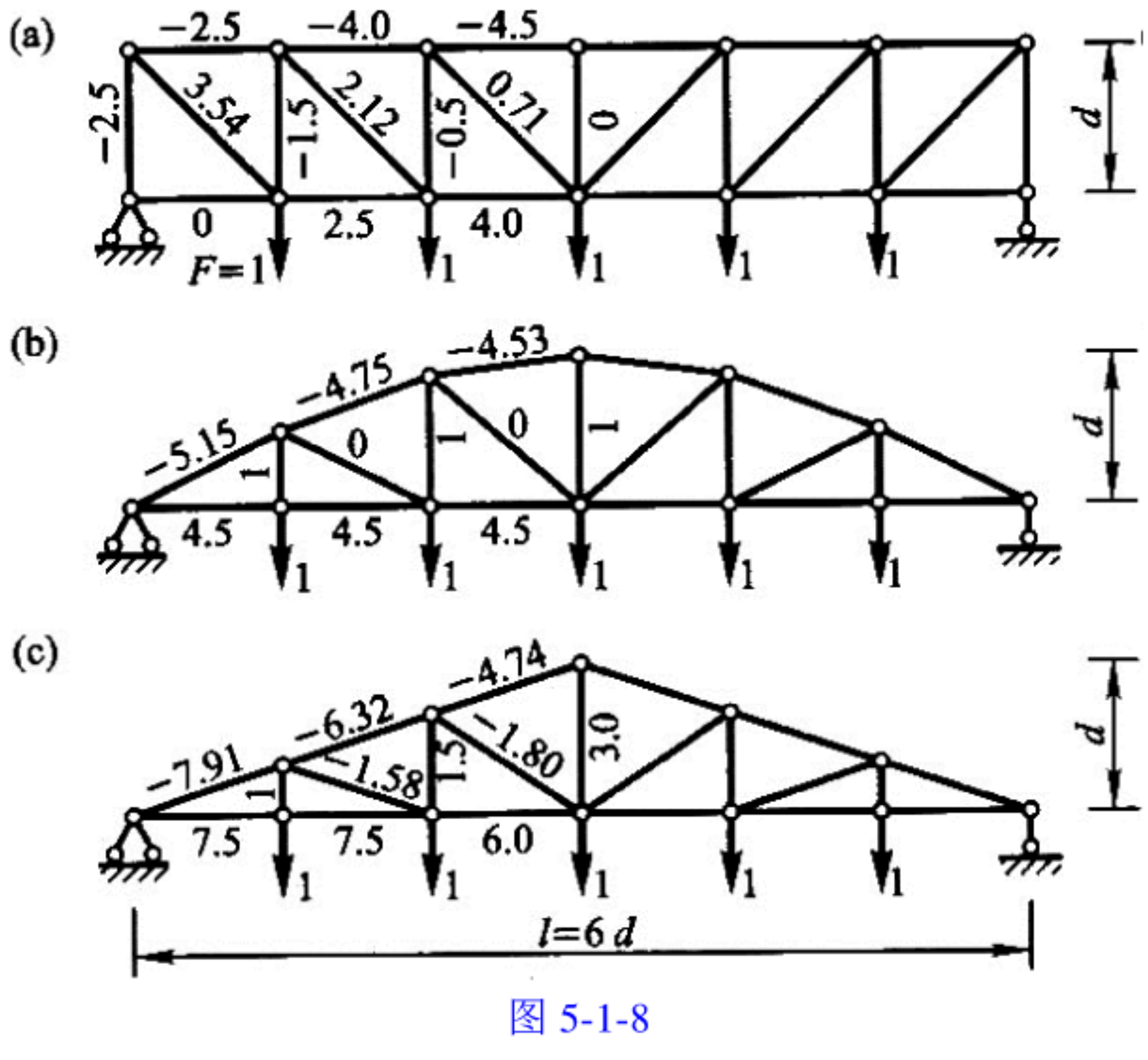


图 5-1-8

1．内力分析

（1）平行弦桁架

弦杆内力两端小中间大，腹杆内力的大小均分别由两端向中间递减。

（2）抛物线形桁架（上弦各结点在抛物线上）

各下弦杆内力与各上弦杆水平分力的大小都相等，各上弦杆的内力也近于相等，各斜杆内力均为零，各竖杆内力均等于相应下弦结点上的荷载。

（3）三角形桁架

弦杆的内力由两端向中间递减，各竖杆及斜杆的内力都是由两端向中间递增的。

2．特点

（1）平行弦桁架

①内力分布不均匀，弦杆内力向跨中递增。

②构造简单，如所有弦杆、斜杆、竖杆长度都分别相同，所有结点处相应各杆交角均相同等，因而利于标准化设计与施工。

③多用于轻型桁架，12 m 以上的吊车梁和铁路桥梁。

（2）抛物线形桁架

①内力分布均匀，因而在材料使用上最为经济。

②构造复杂，上弦杆在每一结点处均转折而需设置接头。

③多用在大跨度桥梁（100～150m）及大跨度屋架（18~30m）中，节省材料意义较大。

（3）三角形桁架

①内力分布不均匀，弦杆内力在两端最大。

②端结点处夹角甚小，构造布置较为困难。

③三角形两斜面符合屋顶构造需要，只在屋架中采用。

六、组合结构的计算

1．组合结构的定义

组合结构是指由链杆和受弯杆件混合组成的结构。

2．组合结构受力分析

（1）链杆

链杆是指两铰直杆且杆身上无荷载作用的杆件，也称为二力杆。链杆只受轴力。

（2）受弯构件

受弯杆件同时受轴力、弯矩和剪力。

3．内力求解步骤

一般先求出反力，然后计算各链杆的轴力，最后再分析受弯杆件的内力。

七、用零载法分析体系的几何构造

1．零载法描述

一个计算自由度 W＝0 的体系，用大小为零的载荷作用体系时：

（1）若结构的所有反力和内力均为零，则体系为几何不变体系

（2）若结构的所有反力和内力不全部为零，则体系为几何可变体系。

2．零载法使用场合

零载法适用于 W＝0（或只就体系本身 W＝3）且基本组成规则无法分析的体系。

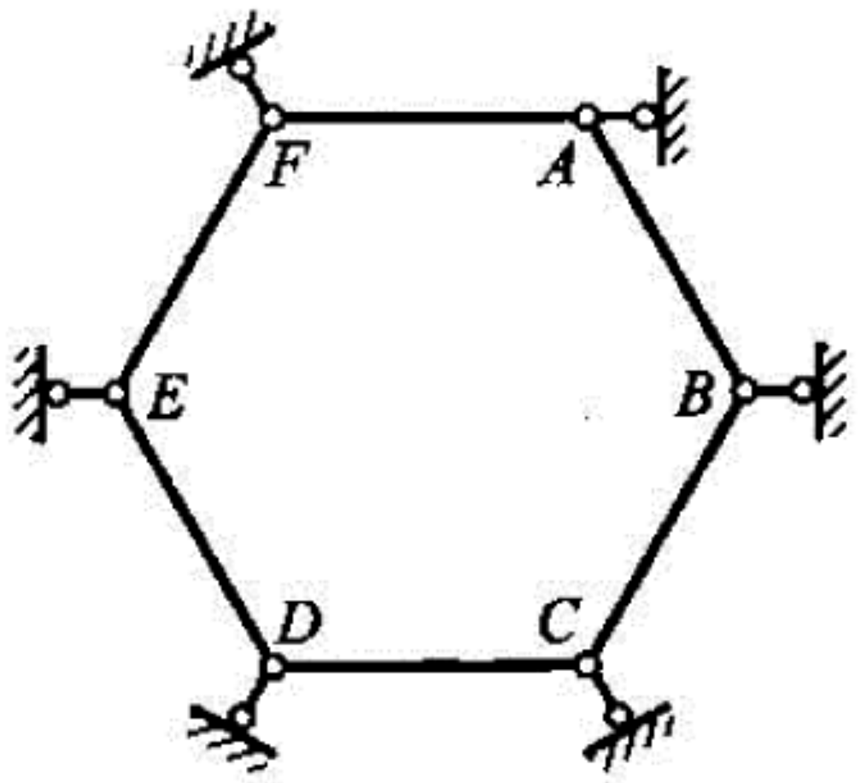


图 5-1-9

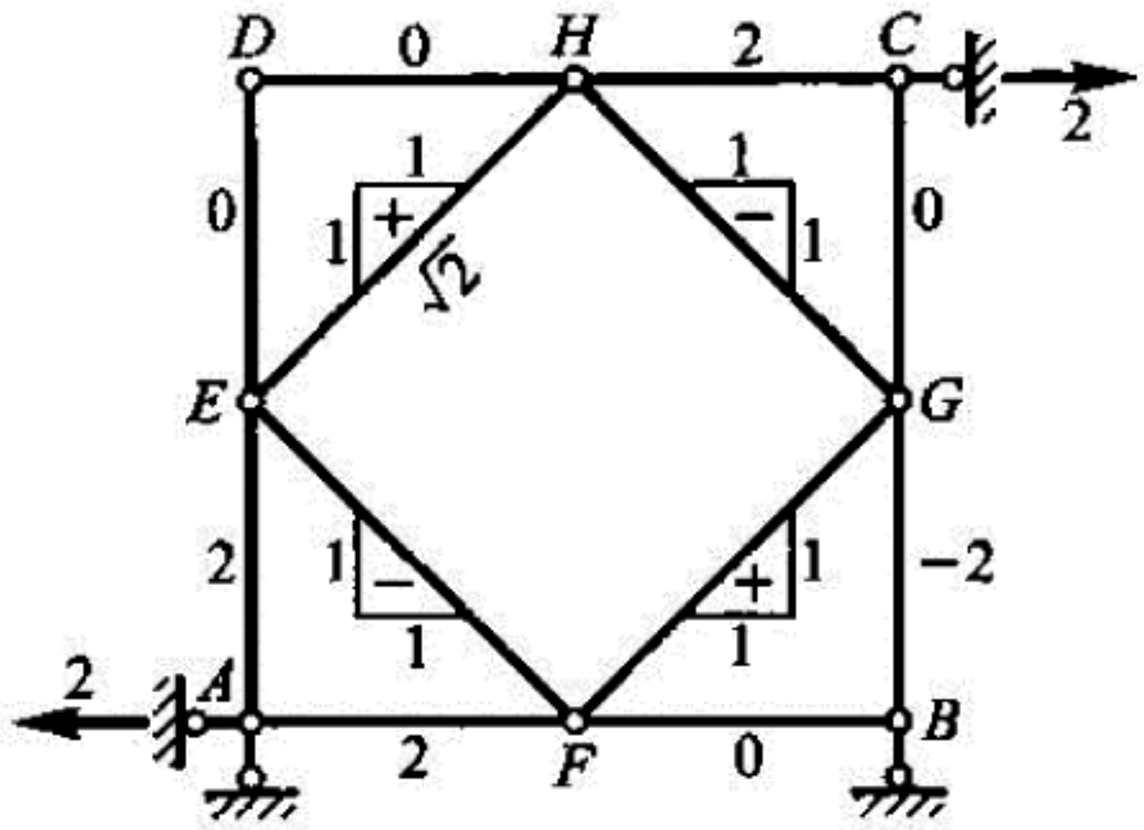


图 5-1-10

5.2　课后习题详解

复习思考题

1．桁架的计算简图作了哪些假设？它与实际的桁架有哪些差别？

答：（1）桁架的计算简图假设

①各结点都是无摩擦的理想铰；

②各杆轴都是直线，并在同一平面内且通过铰的中心；

③荷载只作用在结点上并在桁架的平面内。

（2）桁架的计算简图与实际桁架的差别

①结点的刚性。

②各杆轴线不可能绝对平直，在结点处也不可能准确交于一点。

③非结点荷载（例如杆件自重、风荷载等）。

④结构的空间作用，等等。

2．如何根据桁架的几何构造特点来选择计算顺序？

答：根据桁架的几何构造特点来选择计算顺序的方法

（1）找出零杆

根据节点的几何特征和外部受力特点判断出零杆。

（2）选择合适的方法求解桁架

①用节点法解简单桁架时，在求出支座反力后，可按与几何组成相反的顺序，从最后的结点开始，依次倒算回去，便能顺利地用结点法求出所有杆件的内力。

②求解联合桁架时，用结点法将会遇到未知力超过两个的结点，可以先用截面法将联合杆件的内力求出，再用结点法求解其它杆件的内力。

③求解复杂桁架时，根据桁架的几何构造特点看，可先算出截面单杆的内力，再选择合适的计算方法求解剩余杆的内力。

3．在结点法和截面法中，怎样尽量避免解联立方程？

答：在结点法和截面法中，尽量避免解联立方程的方法：

（1）采用结点法时，为避免解联立方程，可改选投影轴方向或者改用力矩平衡方程（向力的汇交点取矩）。

（2）采用截面法时，使用力矩法的关键在于选取合理的力矩中心，因此应尽量选取多力汇交点作为力矩中心；使用投影法的过程中，应尽量选择多个力所在方向作为力分解的坐标轴。

4．零杆既然不受力，为何在实际结构中不把它去掉？

答：在实际结构中不把零杆去掉的原因：

（1）在实际结构中，工况更复杂，荷载不是一成不变的，荷载改变后，“零杆”可能变为非零杆。因此，为了保证结构的几何形状在任何载荷作用下都不会改变，零杆不能从桁架中除去。

（2）在理想桁架（做了诸多假设）中“零杆”才是零杆，而实际结构中，零杆的内力也不是零，只是较小而已。

5．怎样识别组合结构中的链杆（二力杆）和受弯杆？组合结构的计算与桁架有何不同之处？

答：（1）组合结构中的链杆是指杆身上无荷载、只受轴力作用的两铰直杆；而受弯杆则同时还受弯矩和剪力的作用。

（2）组合结构的计算与桁架不同点

①在用结点法分析时，不能考虑组合结点，因为组合结点两端为受弯杆件，不仅仅有轴力，还有剪力和弯矩。

②在用截面法求解组合结构时时，若截到受弯杆件，则求解时截面上的未知力过多，不易解答，故应尽量避免截断受弯杆件。

6．在图 5-2-1（a）中，能否将 G 视为 T 形结点而判断 GE 为零杆？结点 G 是怎样平衡的？又对于结点 A，既然 F_{AV}＝5kN（↑），为什么 AD 杆的竖向分力不等于 5kN？

答：（1）不能将 G 视为 T 形结点而判断 GE 为零杆，因为 G 点是组合结点而非铰接点。

（2）结点 G 处竖向荷载有 EG 杆的轴力、CG 部分的剪力、GB 部分的剪力。

（3）对于结点 A，AC 杆为受弯杆件，所以在 AC 杆的 A 端要考虑剪力的作用，故在 A 结点处，竖向力包括 F_{AV}、链杆 AD 的竖向分量、受弯杆 AC 在 A 端剪力，故 AD 杆的竖向分力不等于 F_{AV}＝5kN。

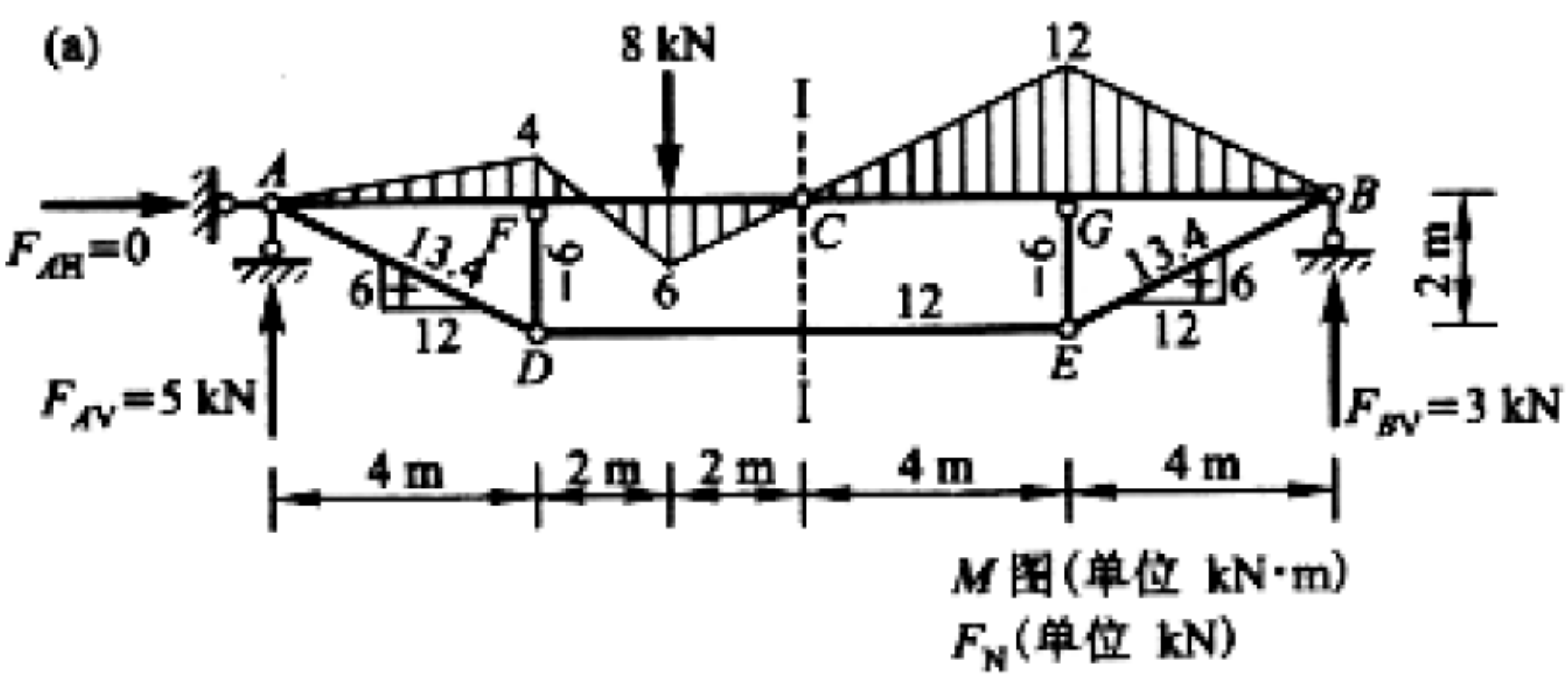


图 5-2-1

习题

5-1～5-2　试用结点法计算图示桁架各杆的内力。

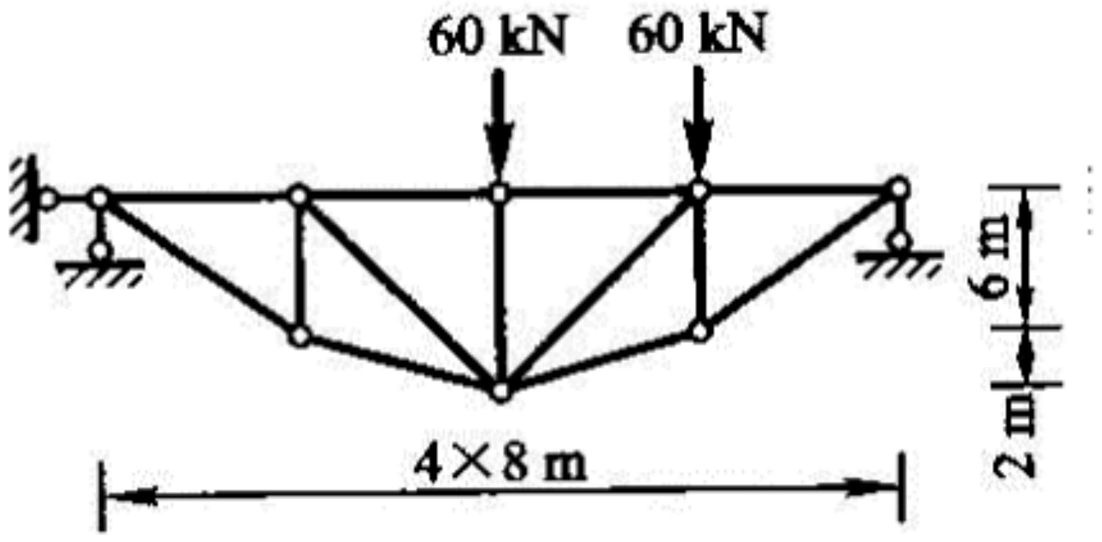


图 5-2-2（题 5-1）

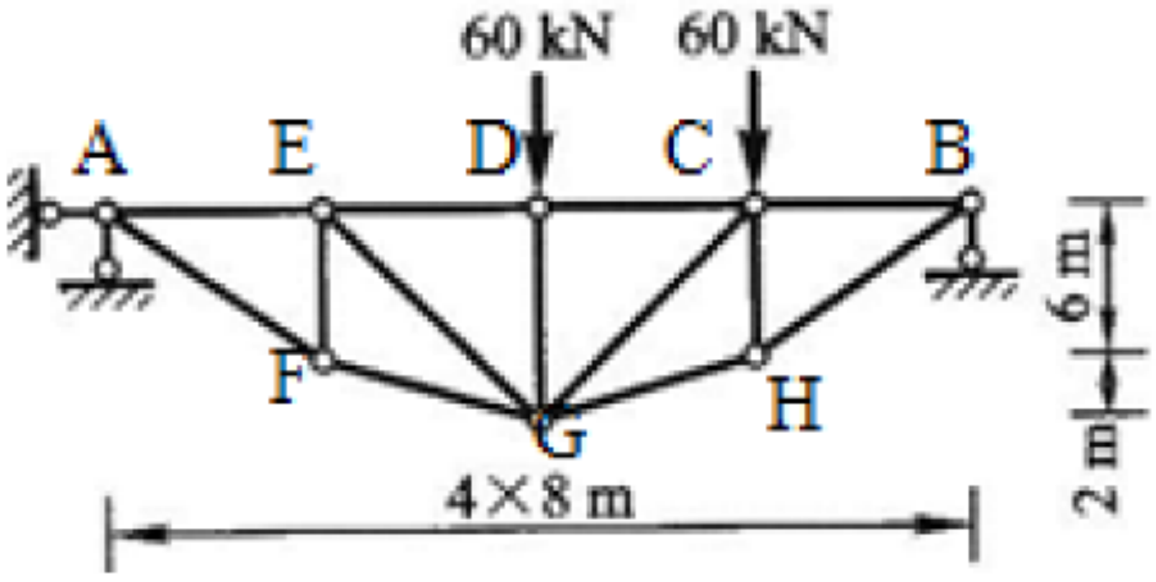


图 5-2-3（题 5-1 解图）

5-1　解：结点法计算图示各杆内力。

由$\sum M_A=0$，则

$$F_B\cdot 32-60\times 24-60\times 16=0$$

算得

$$F_B=75\text{kN}$$

由$\sum F_y=0$，得

$$F_{Ay}=120-75=45\text{kN}。$$

对 B 结点进行受力分析，如图 5-2-3 所示。

由比例关系可以求得

$$F_{yBH}=75\text{kN}$$

$$F_{NBH}=75\times\frac{5}{3}=125\ \text{kN}$$

同理

由$\Sigma F_x=0$，可得

$$F_{NBC}=F_{xBH}=-100\text{kN}$$

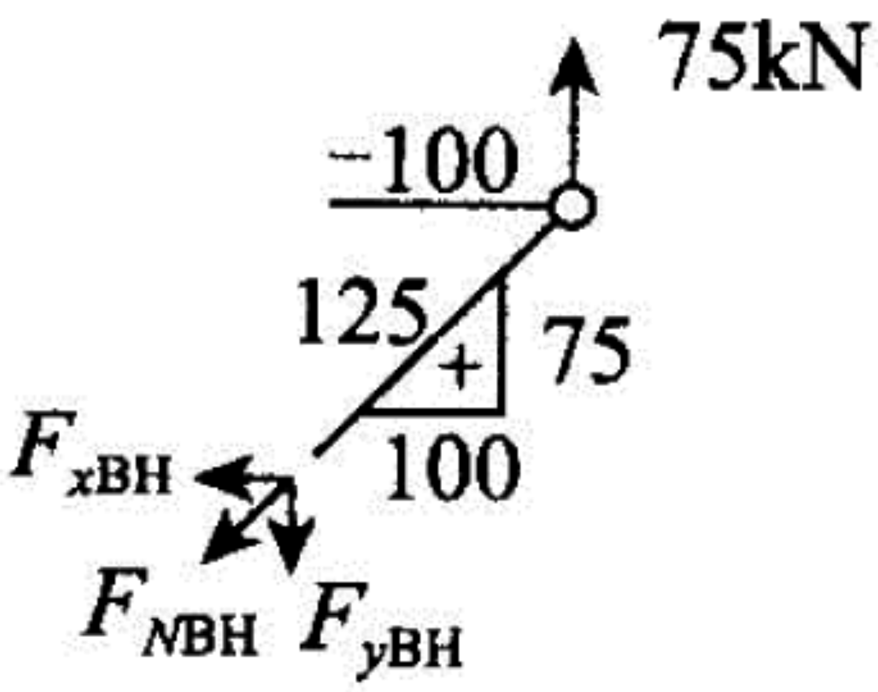


图 5-2-4

然后，依次取结点 H、C、D、G、E、F、A，每次只有两个未知力，故不难求解。而计算到结点 A 时，各杆轴力均可求出，故 A 结点可作为平衡是否满足的校核条件。各杆轴力如图 5-2-5 所示。

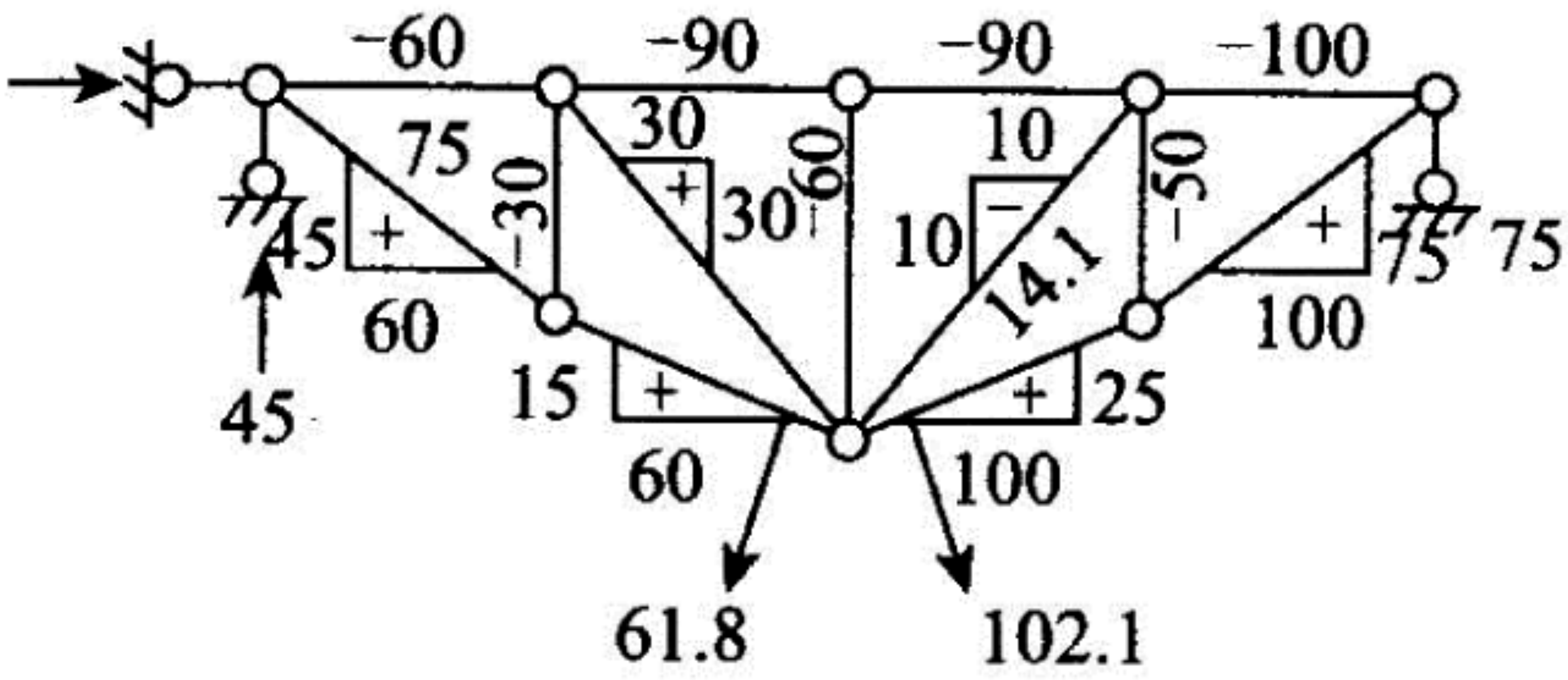


图 5-2-5

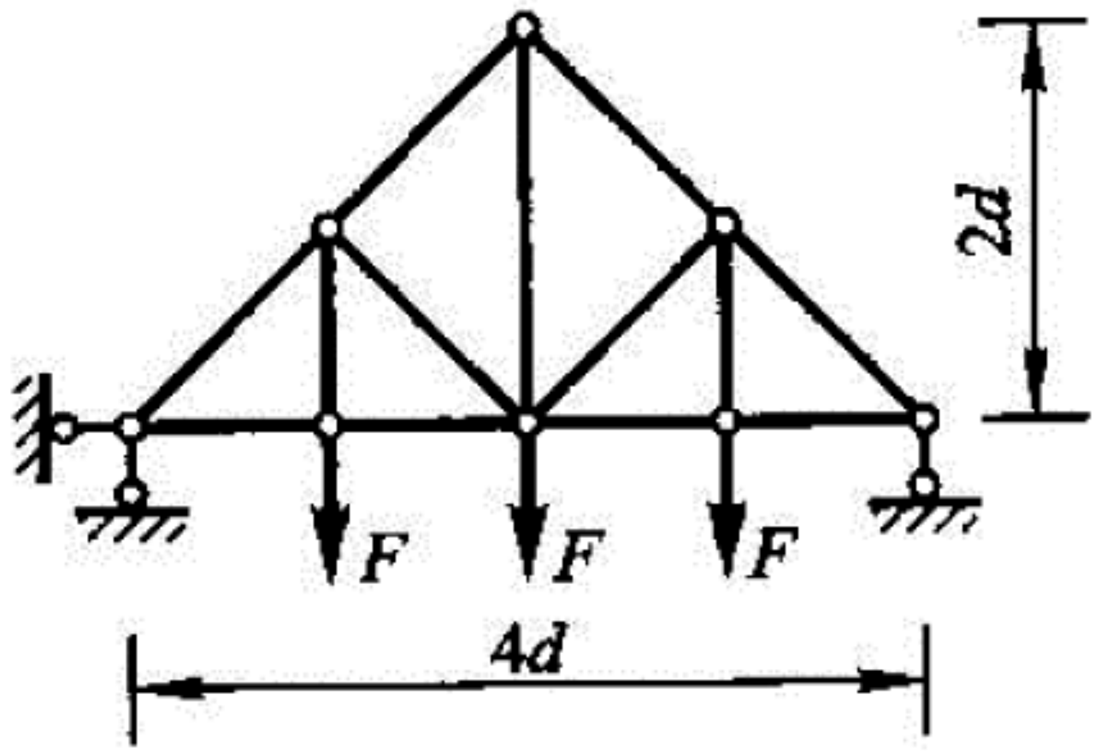


图 5-2-6（题 5-2）

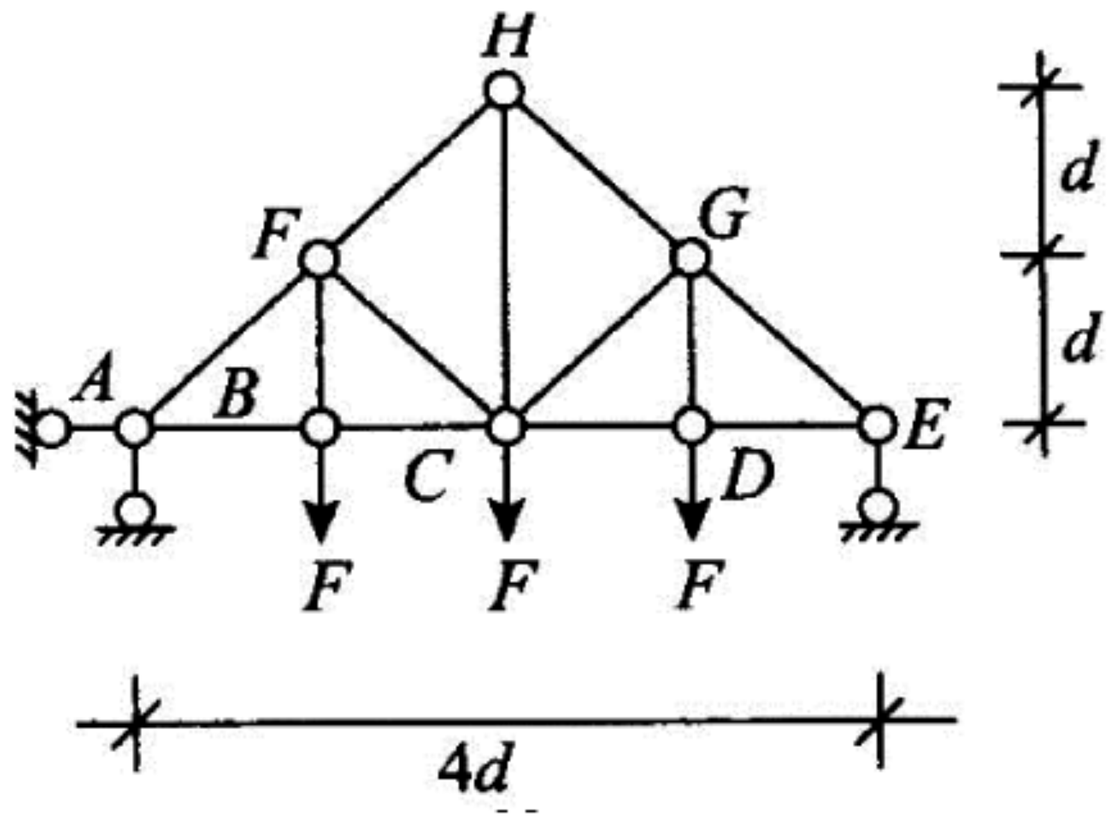


图 5-2-7（题 5-2 解图）

5-2　解：应用结点法计算各杆内力

由ΣM_A＝0，则

$$F_E \cdot 4d - F \cdot 3d - F \cdot 2d - F \cdot d = 0$$

解得

$$F_E = \frac{3}{2}F$$

由ΣF_y＝0，得

$$F_{Ay} = \frac{3}{2}F$$

对结点 E 进行分析，如图 5-2-8 所示，并由比例关系可以求得

$$F_{yEG} = -\frac{3}{2}F, F_{NEG} = \frac{3}{2}\sqrt{2}F = 1.5\sqrt{2}F$$

$$F_{NEF} = -F_{xEG} = \frac{3}{2}F = 1.5F$$

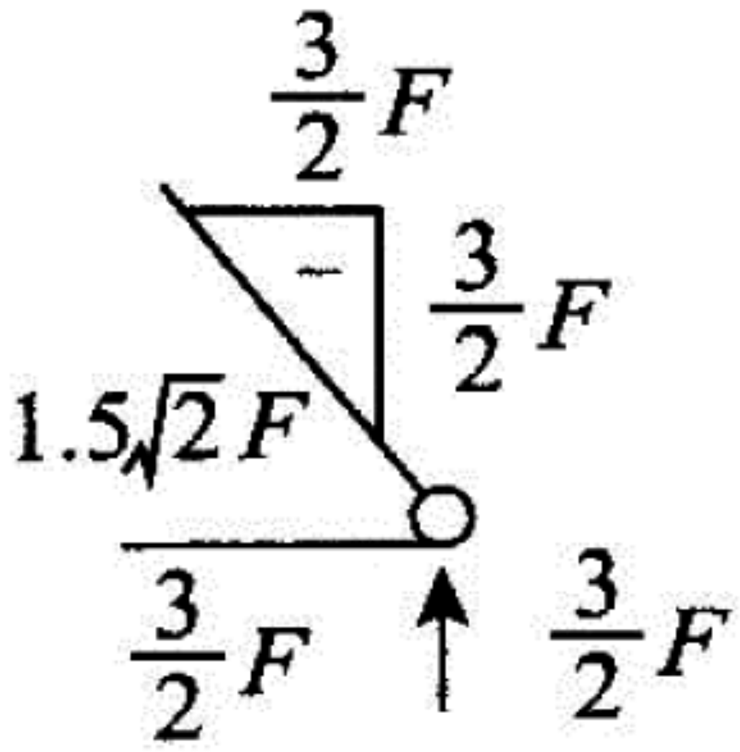


图 5-2-8

然后，依次取点 D、G、H、C、B、F、A，每个结点只有两个未知力，故不难求解，而计算到结点 A 时，各力均已求出，故 A 结点可作为平衡是否满足的校核。各杆轴力如图 5-2-9 所示。

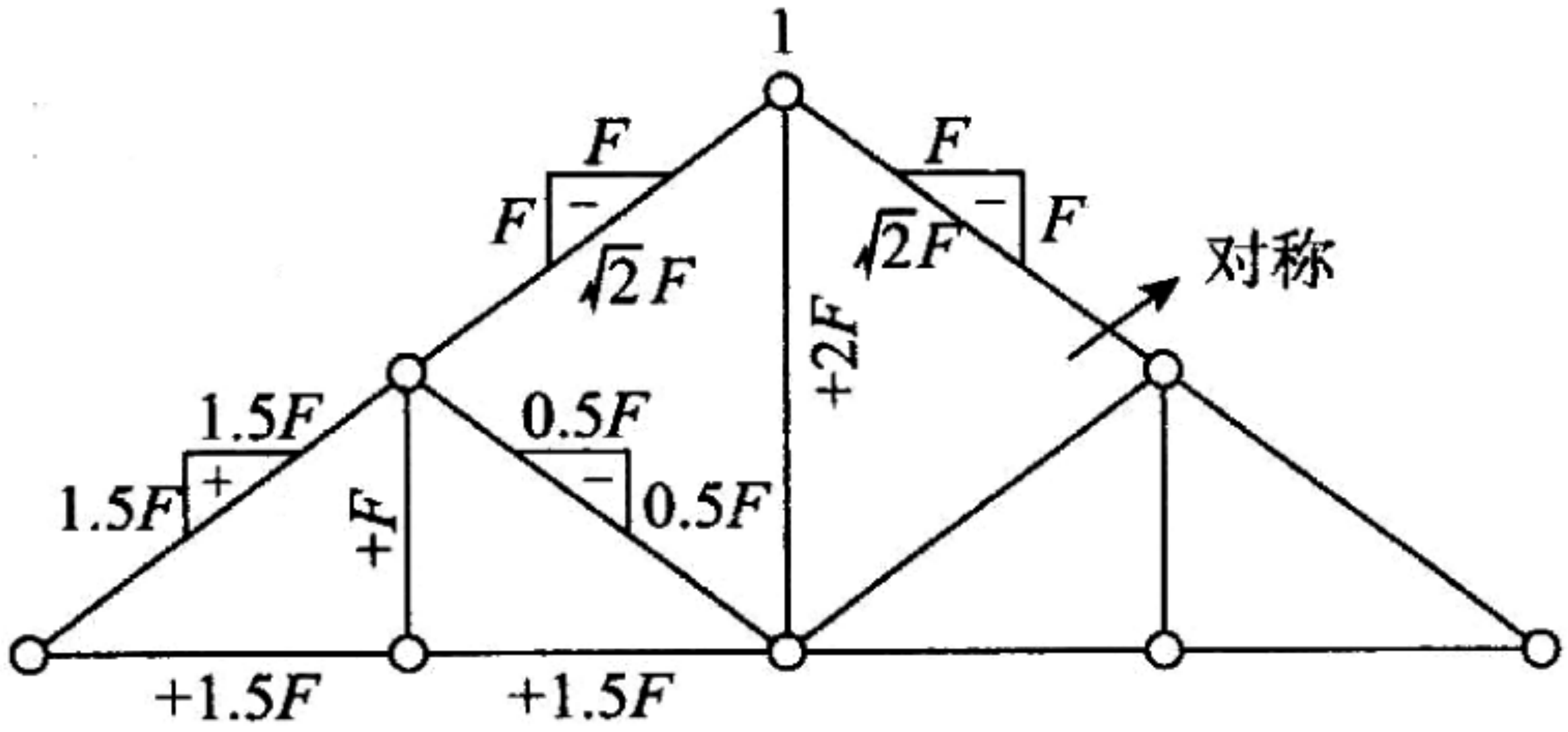


图 5-2-9

5-3～5-4　试判断图示桁架中的零杆。

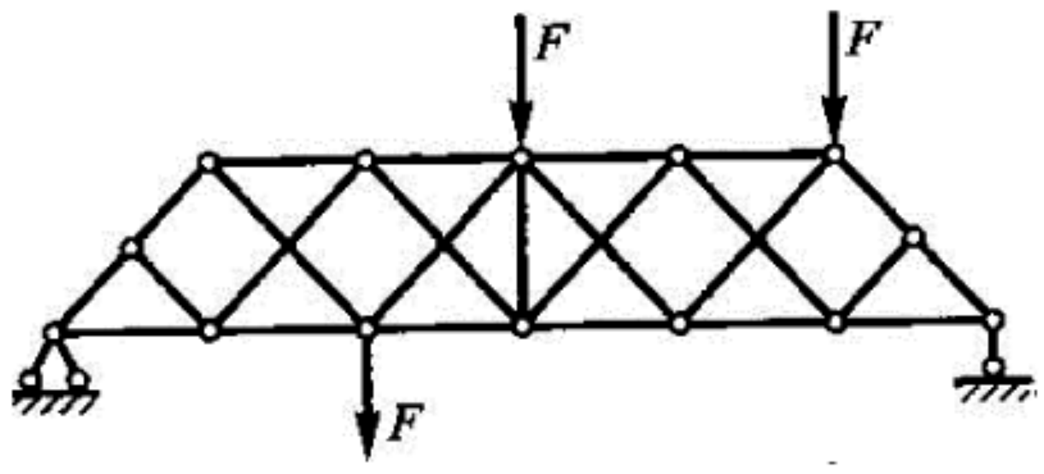


图 5-2-10（题 5-3）

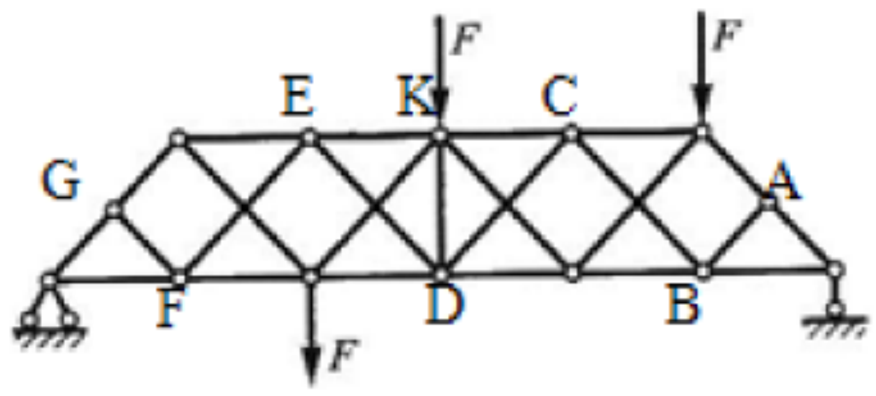


图 5-2-11（题 5-3 解图）

5-3　答：由 A 点为 T 形结点且无载荷，故 AB 为零杆；同理 BC、CD 也为零杆。由结点 G 为 T 形结点且无载荷，故 GF、FE、ED 为零杆。此时杆 DK 也为 T 形杆，故为零杆。

所以零杆有 AB、BC、CD、GF、FE、ED、DK，共 7 根。

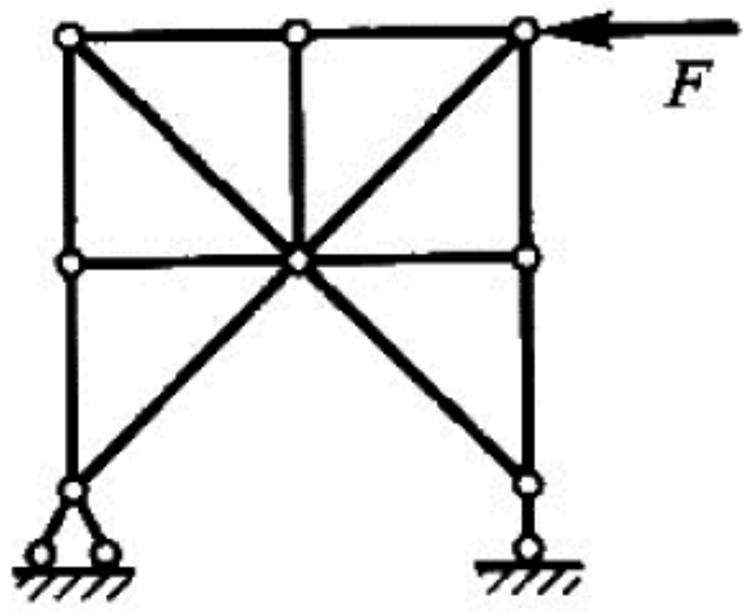


图 5-2-12（题 5-4）

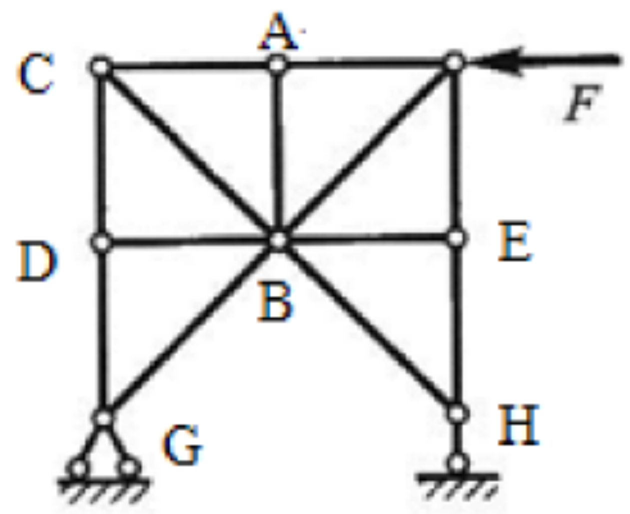


图 5-2-13（题 5-4 解图）

5-4　答：由桁架图形易知，BE、AB、BD、BH 均为 T 形连结，故均为零杆；判别之后，BC 杆也为 T 形连接，此时 AC、BD、DG、AF 均可判别为零杆。

所以零杆有 BE、AB、BD、BH、BC、AC、BD、DG、AF，共 9 根。

5-5～5-6　试用截面法计算图示桁架中指定杆件的内力。

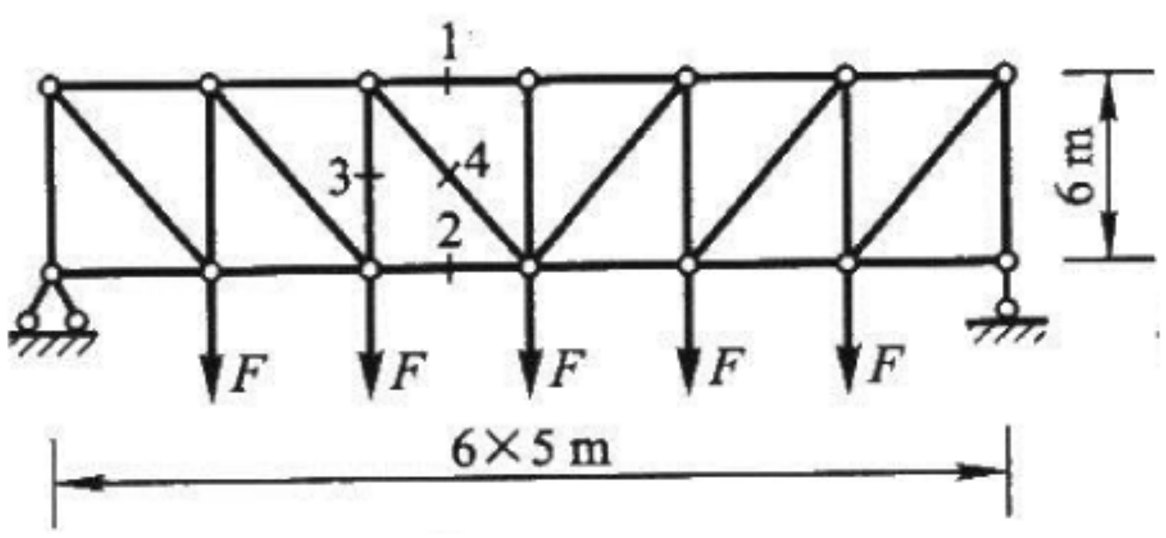


图 5-2-14（题 5-5）

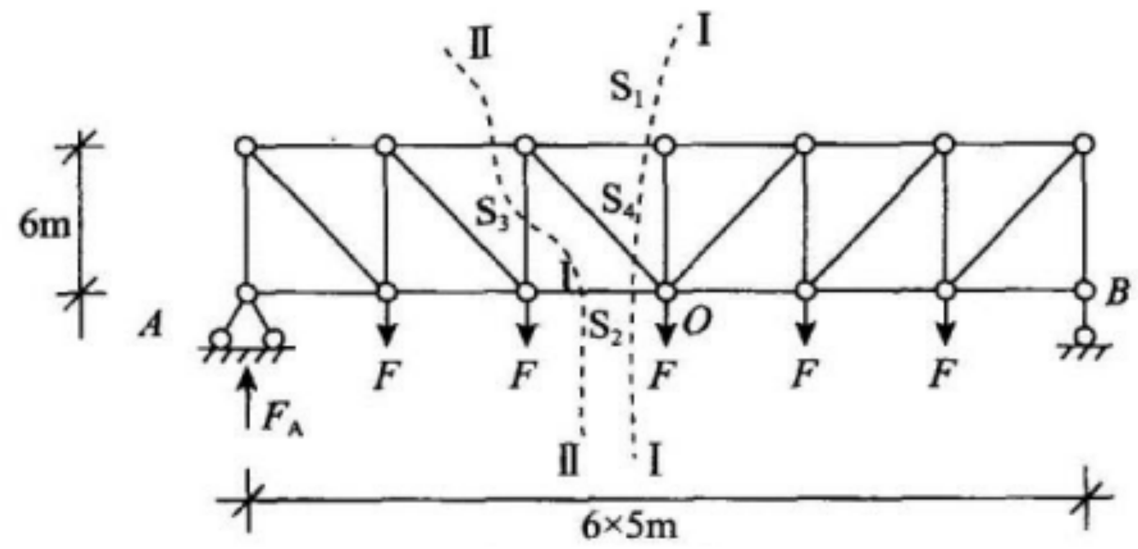


图 5-2-15（题 5-5 解图）

5-5　解：作截面 I——I，取右侧部分为研究对象，由平衡条件知

$$\Sigma M_B = 0$$

即

$$F_A \times 30 - F \times 25 - F \times 20 - F \times 15 - F \times 10 - F \times 5 = 0$$

解得

$$F_A = 2.5F$$

由 $\Sigma F_y = 0$，得 $F_B = 2.5F$。

对 O 点取矩，可得

$$S_1=-\frac{2.5\times15-1\times10-1\times5}{6}F=-3.75F$$

$$S_4=\frac{\sqrt{61}}{6}(2.5F-F-F)=0.65F$$

$$S_2=-\frac{2.5\times10-1\times5}{6}F=3.33F$$

作截面Ⅱ——Ⅱ，取左侧部分为研究对象，由平衡条件知

$$S_3=-(2.5F-F-F)=-0.5F$$

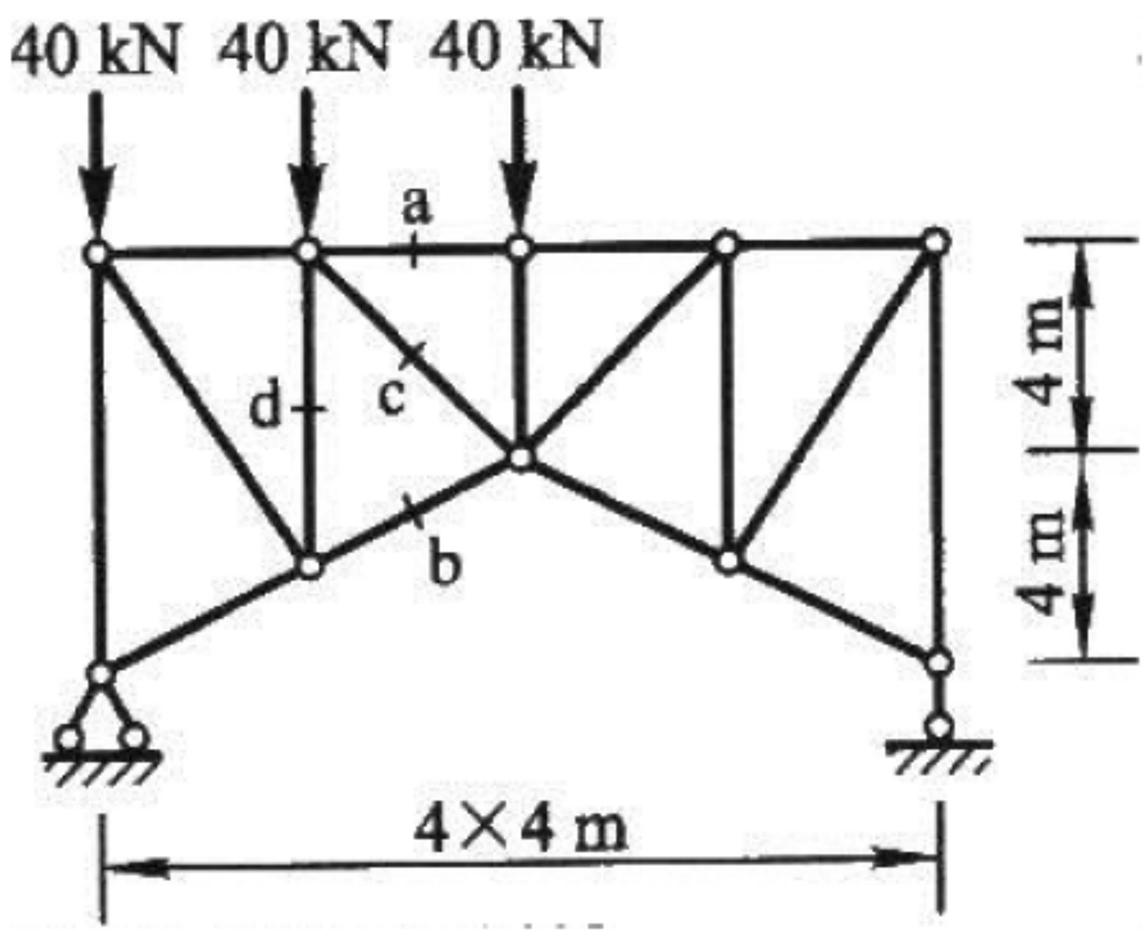


图 5-2-16（题 5-6）

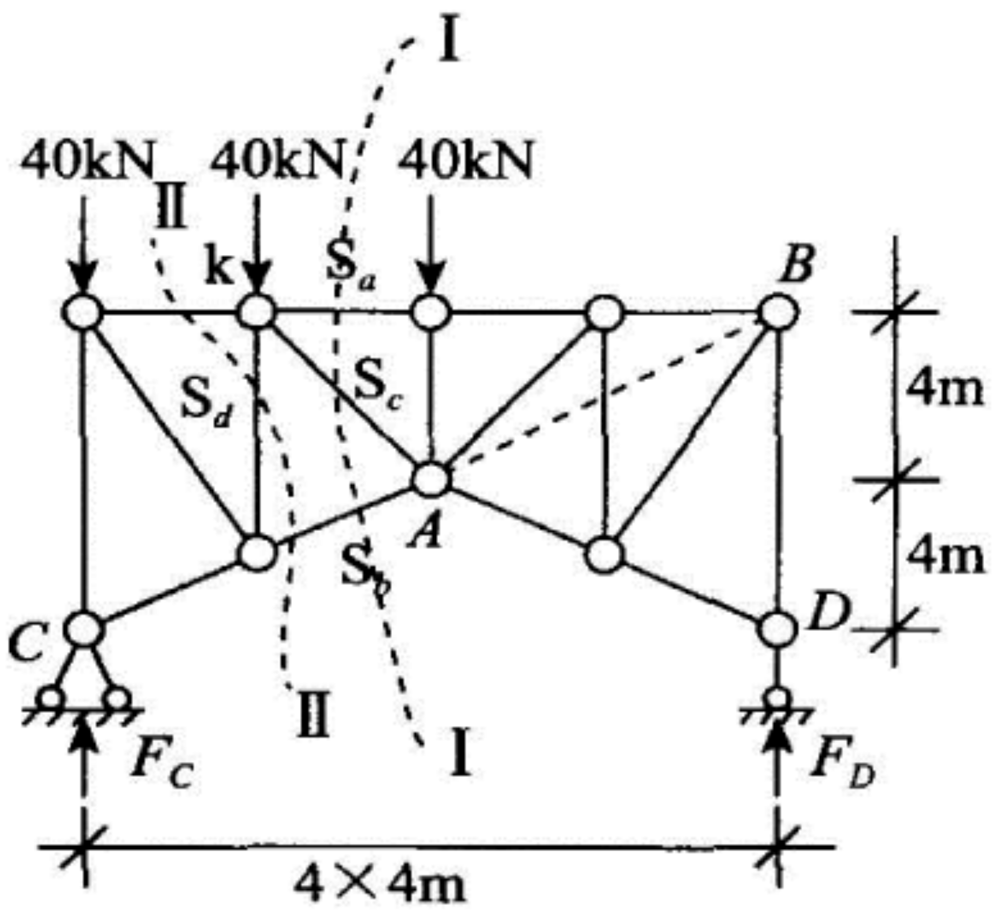


图 5-2-17（题 5-6 解图）

5-6　解：以整体为研究对象，由平衡条件可知

$$\sum M_C=0$$

即

$$F_D\times16-40\times8-40\times2=0$$

求解得

$$F_D=30\text{kN}$$

由$\sum F_y=0$，求解得 $F_C=90\text{kN}$。

以截面 I——I 右半部分为隔离体，对 A 点取矩得 S_a

$$S_a=-\frac{30\times8}{4}=-60\ \text{kN}$$

对 AC 延长线交点 B 取矩得 S_c

$$S_C=\sqrt{2}\left(\frac{40\times8}{12}\right)=26.67\sqrt{2}=37.71\ \text{kN}$$

对 K 取矩得 S_b

$$S_b=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{30\times12-40\times4}{6}\right)=37.27\ \text{kN}$$

同理,可求得 S_d

$$S_d=-\frac{(90-40)\times16}{12}=-66.67\ \text{kN}$$

5-7～5-14 试用较简便方法求图示桁架中指定杆件的内力。

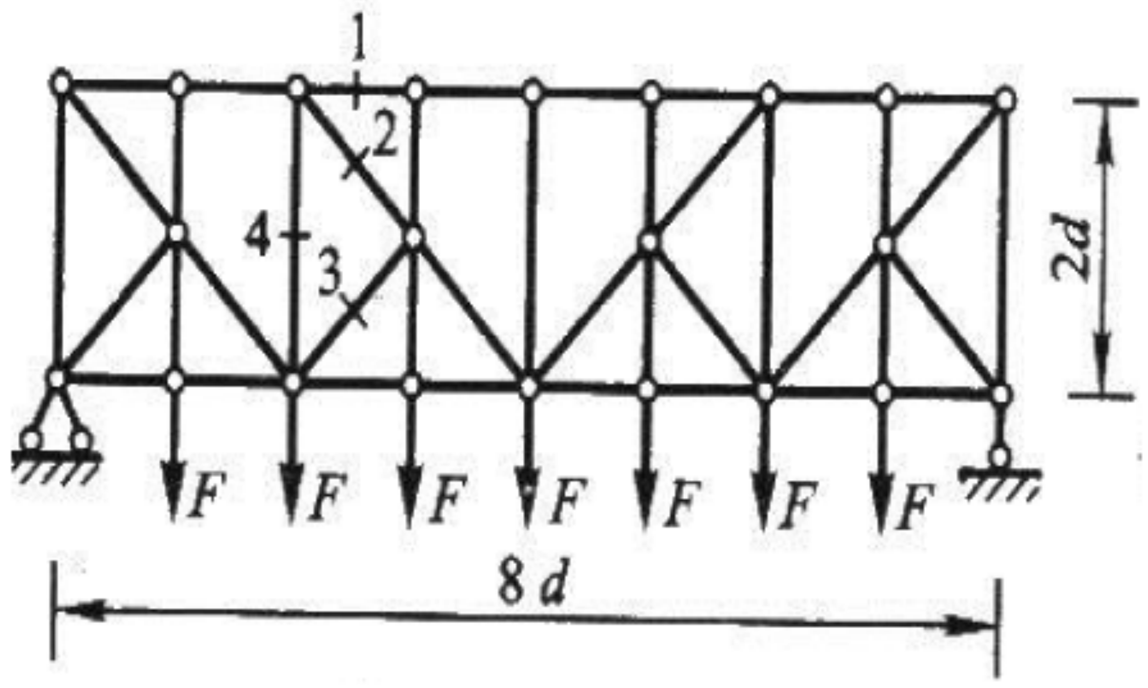


图 5-2-18（题 5-7）

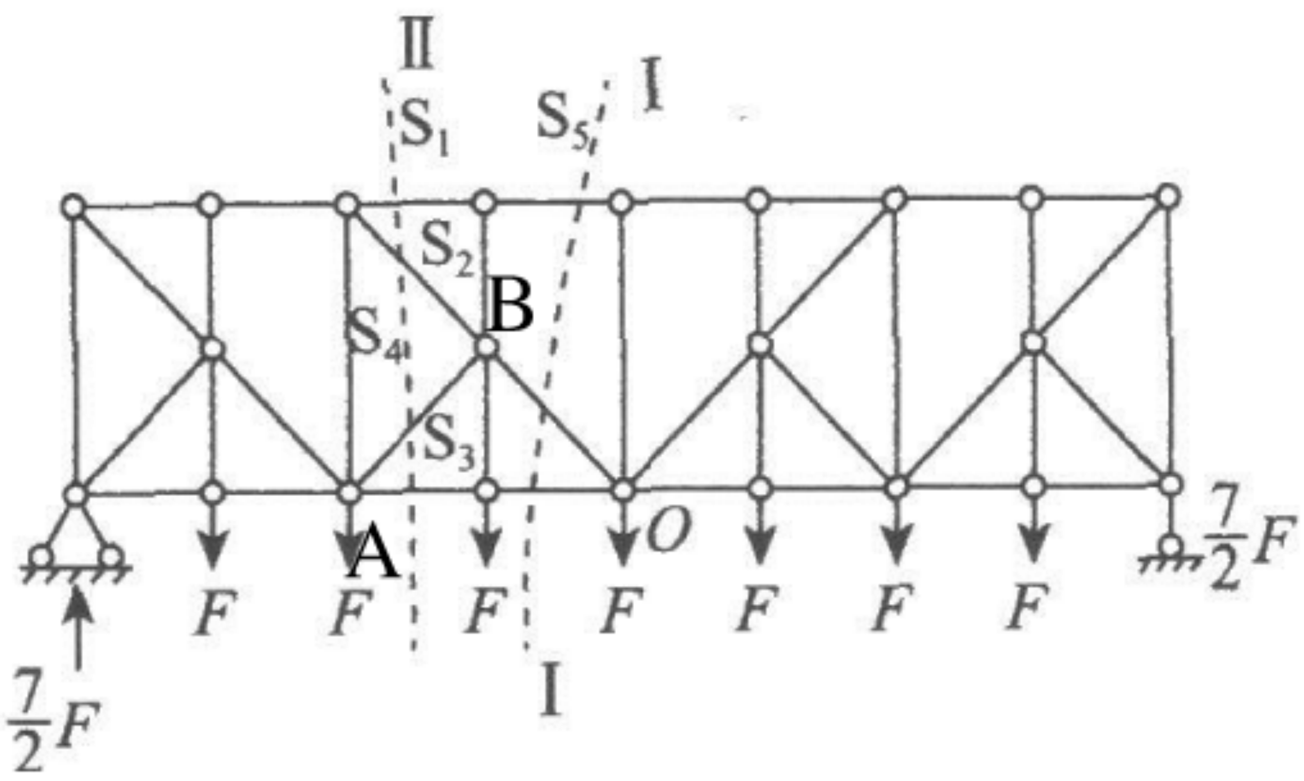


图 5-2-19（题 5-7 解图）

5-7　解：由于体系为对称结构，所以两支座的支座反力 $F_y=\frac{7}{2}F$。

作截面 I——I，取右半部分为研究对象，对 O 点取矩得 S_1

$$S_1=S_5=-\frac{\frac{7}{2}\times4-1\times3-1\times2-1\times1}{2}F=-4F$$

作截面 II——II，取右半部分为研究对象，对 A 点取矩得 S_2

$$S_2=-\frac{\left(\frac{7}{2}\times2-1\times1-4\times2\right)F}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}F$$

用结点法易求得：$S_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}F,S_4=-F$ 。

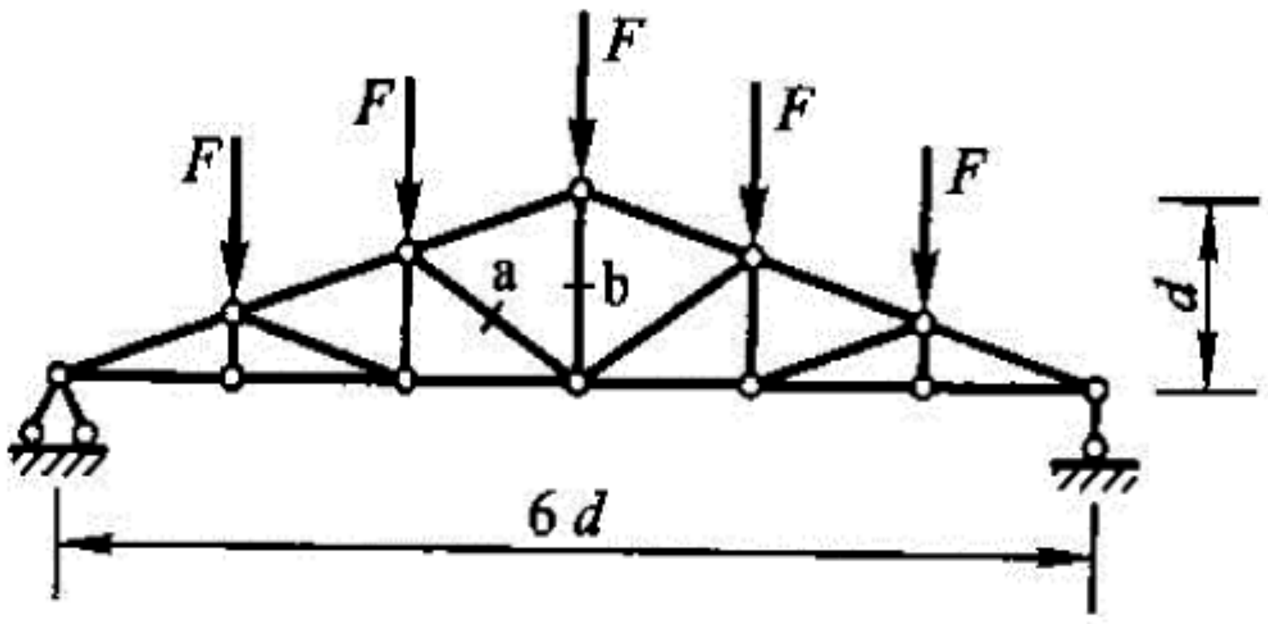


图 5-2-20（题 5-8）

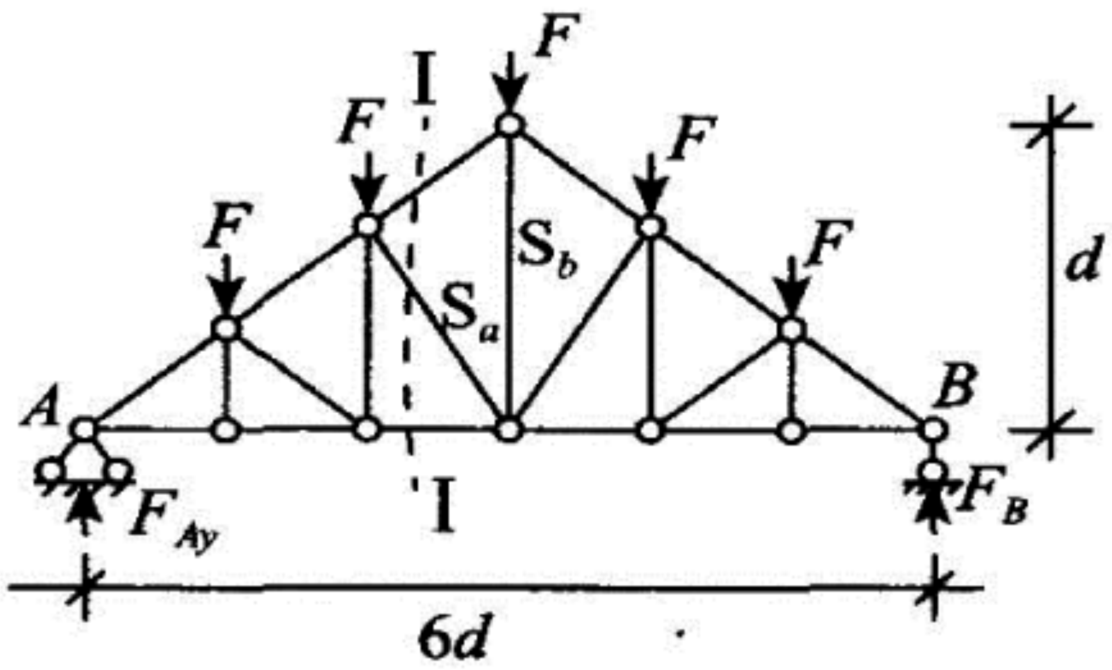


图 5-2-21（题 5-8 解图）

5-8　解：显然，此体系为对称结构，故 $F_{Ay}=F_B=2.5F$。

作 I——I 截面，取左半部分为研究对象，对结点 A 取矩得 S_a的竖向分量 Y_a

$$Y_a=-\frac{F\cdot d+F\cdot 2d}{3d}=-F$$

进一步可推得

$$S_a=-\frac{\sqrt{13}}{2}F=-1.803F$$

由结点平衡可推得

$$S_b=-2Y_a=2F\text{（拉力）}$$

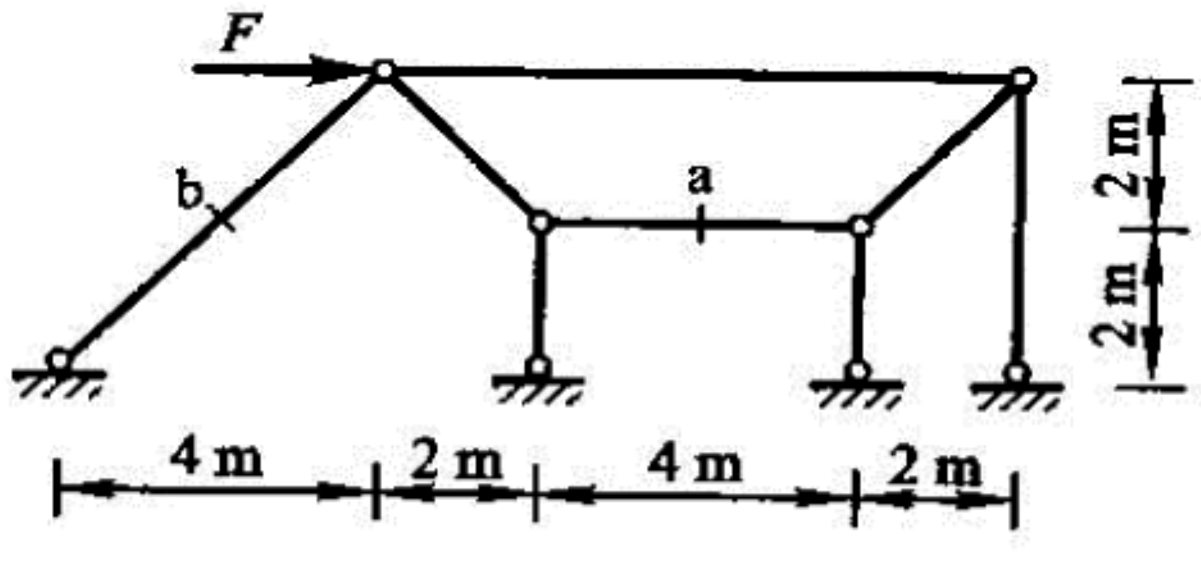


图 5-2-22（题 5-9）

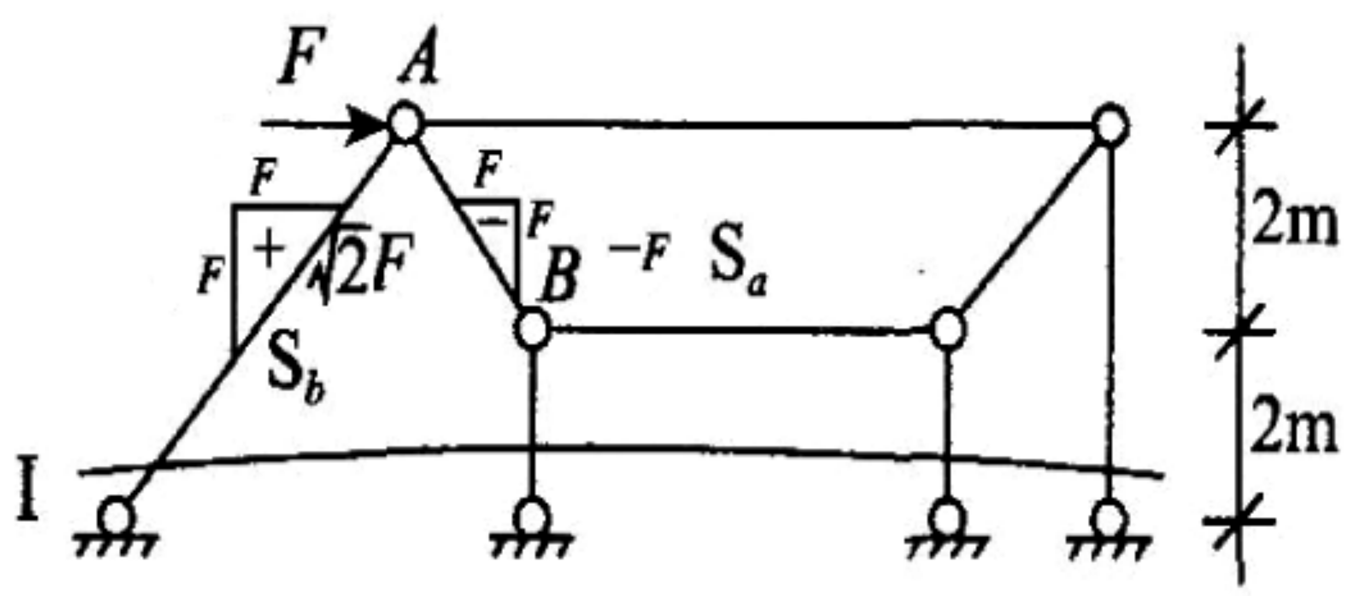


图 5-2-23（题 5-9 解图）

5-9　解：如图 5-2-23 所示作截面 I——I，取上部分为研究对象。

根据平衡条件，由$\sum F_x=0$，得 $F_{XAC}=F$，立即可知 $S_b=\sqrt{2}F$

再由结点法依次对 A、B 两点作受力分析，故可求出 $S_\alpha=-F$。

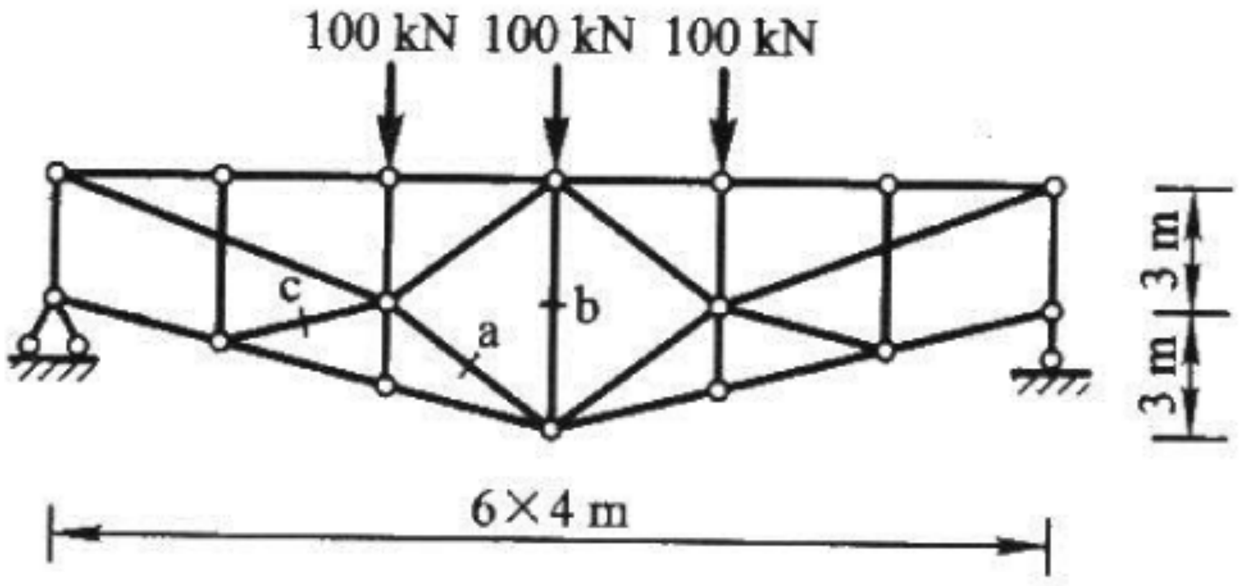


图 5-2-24（题 5-10）

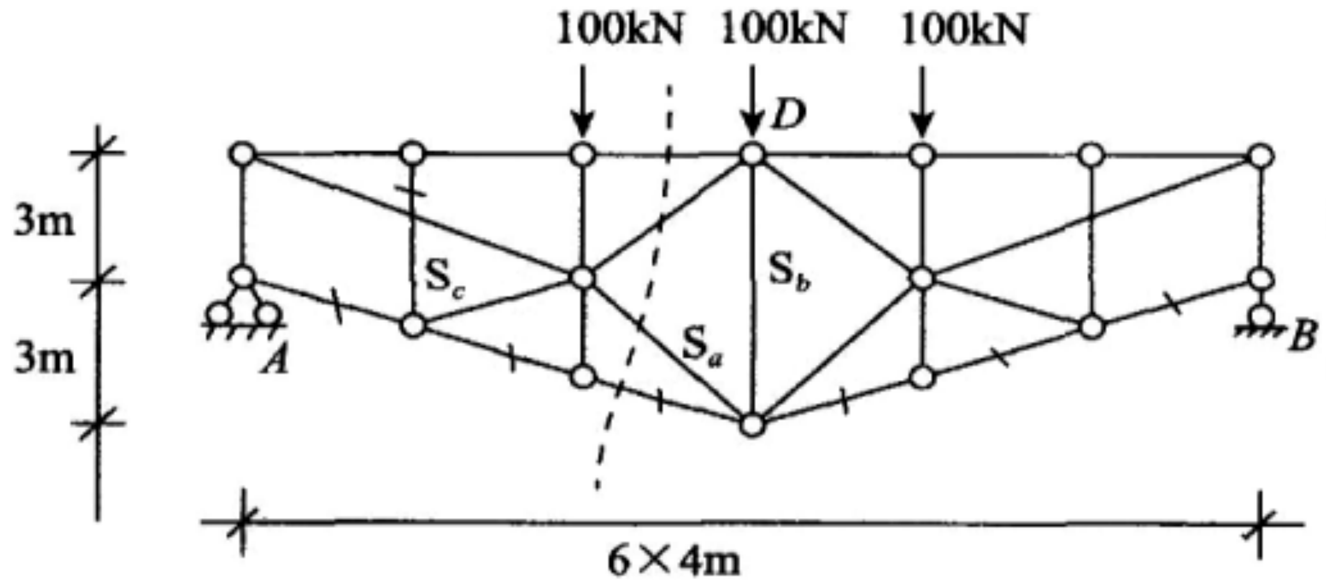


图 5-2-25（题 5-10 解图）

5-10 解：根据零杆判定准则，可知 $S_c=0$，并将体系中所有零杆均标于图 5-2-25 中。
由于体系为对称体系，故 $F_{Ay}=F_B=150kN$。
作截面 I——I，取右半部分为研究对象并对 D 点取矩，可求解得到 S_a 的水平反力 X_a

$$X_a=\frac{150\times12-100\times4}{6}=233.33\ \text{kN}$$

$$S_a=X_a\cdot\frac{5}{4}=291.67\ \text{kN}$$

求 S_B，由结点 B 的受力平衡可得

$$S_b=-2Y_a=-2\times233.33\times\frac{3}{4}=-350\ \text{kN}$$

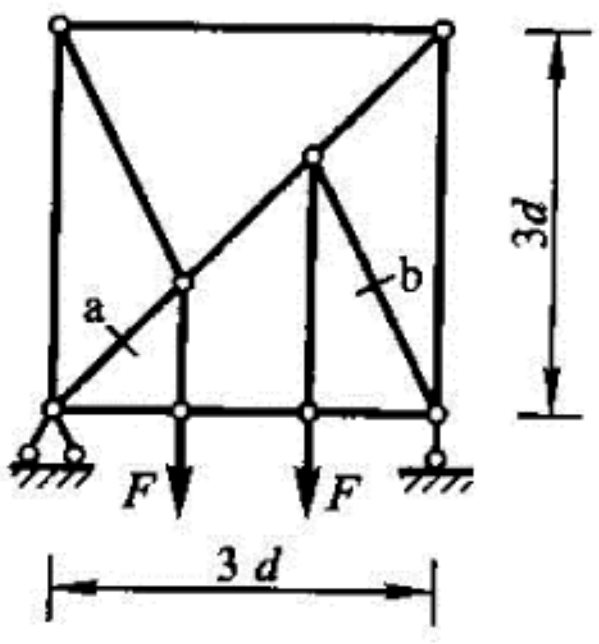


图 5-2-26（题 5-11）

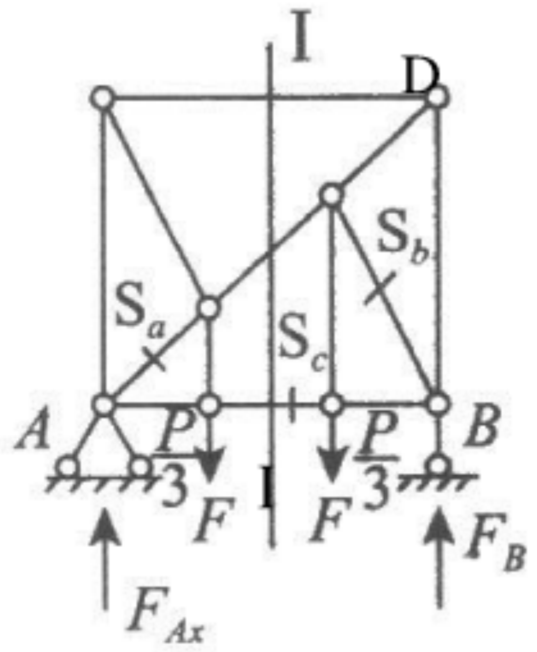


图 5-2-27（题 5-11 解图）

5-11　解：以整体为研究对象，对 A 点取矩可求得 $F_{Ay}=F_B=F$。

作截面 I——I，取截面右侧部分为隔离体，根据平衡条件$\sum M_D=0$

可算得

$$S_c=\frac{Fd}{3d}=\frac{F}{3}$$

取结点 A 用结点法，易知

$$S_a=-\frac{\sqrt{2}F}{3}$$

取结点 B 用结点法，易知

$$S_b=-\frac{F}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{1}=-\frac{\sqrt{5}}{3}F$$

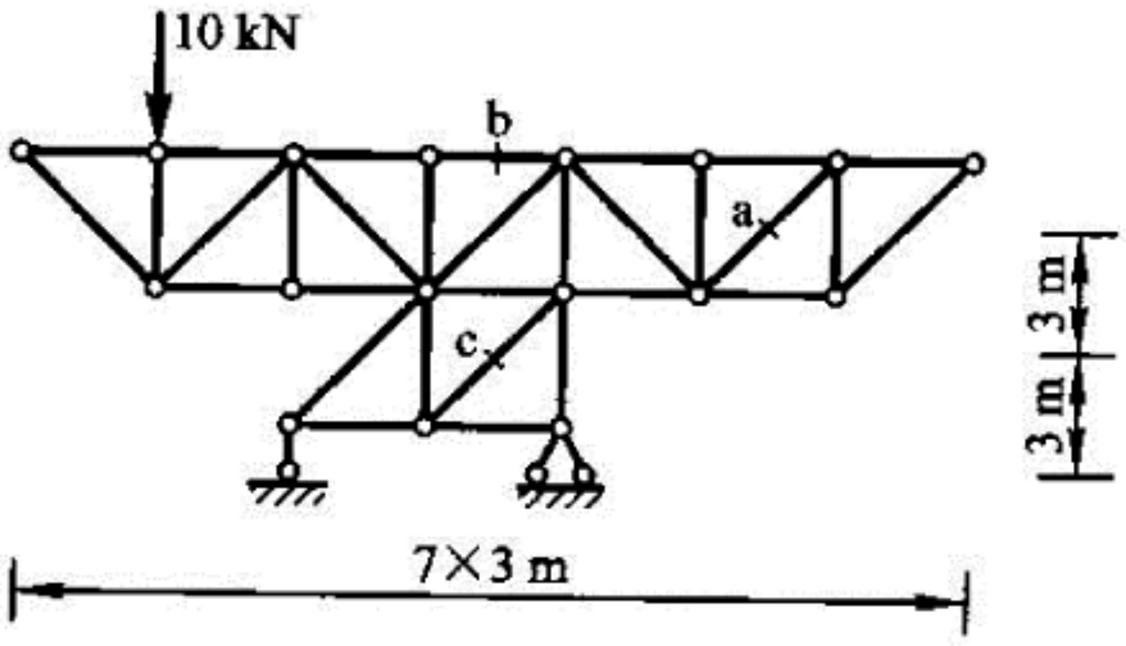


图 5-2-28（题 5-12）

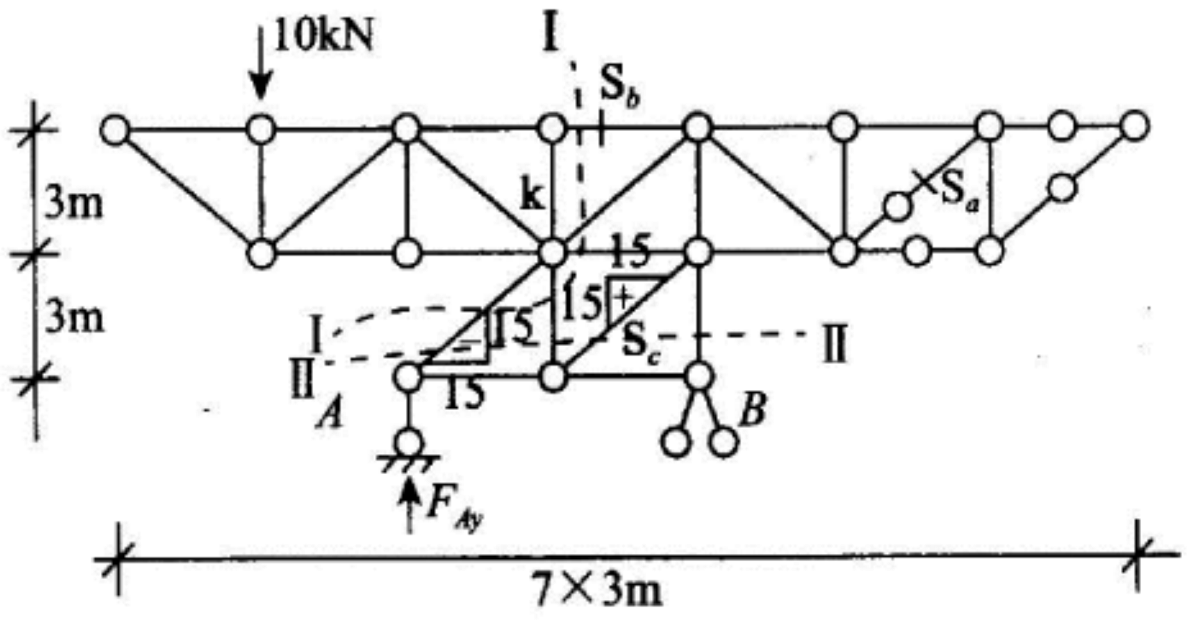


图 5-2-29（题 5-12 解图）

5-12　解：根据零杆判别准则易知 $S_a=0$，且体系的其余零杆均标于图 5-2-28 中。

整体分析，根据平衡条件$\Sigma M_B=0$

$$F_{Ay}\times 6-10\times 9=0$$

可算得

$$F_{Ay}=15\text{kN}$$

对 A 结点用结点法，可求得 A 结点水平杆和斜杆的内力。

作截面 II——II，取下侧部分为隔离体，由 $F_X=0$，易知$S_c=15\sqrt{2}$。

作截面 I——I，取左侧部分为隔离体，对 K 取矩，可求得 $S_b=\frac{10\times 2d}{d}=20$ kN 。

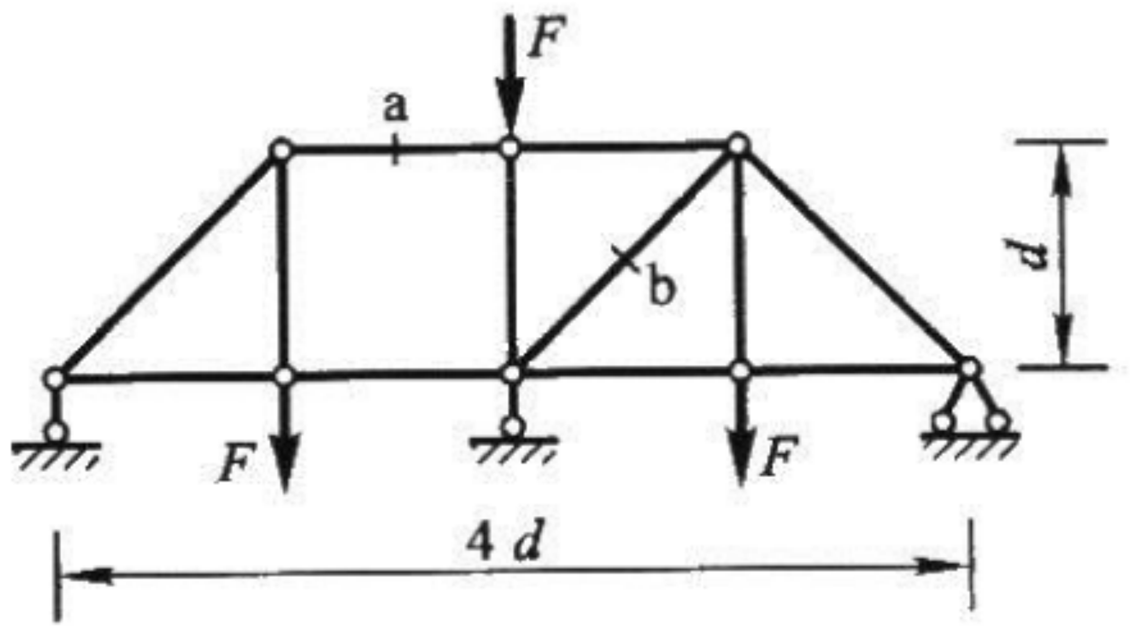


图 5-2-30（题 5-13）

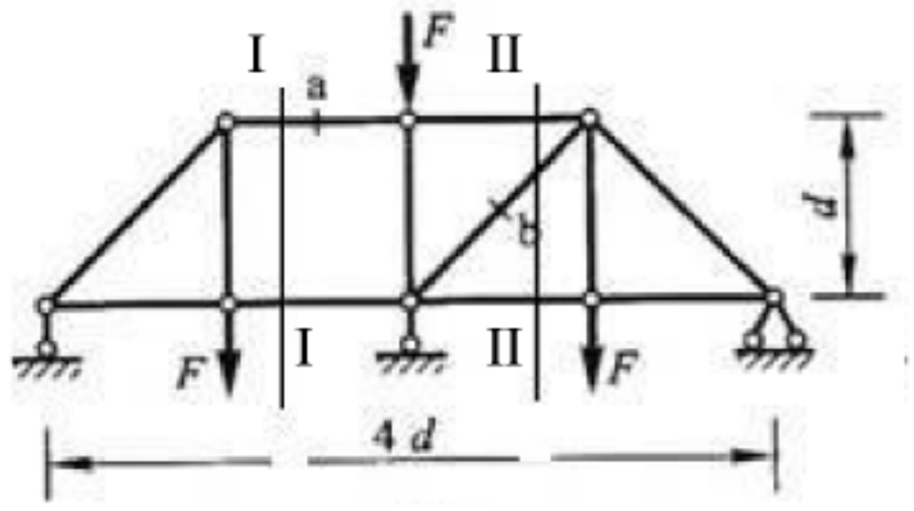


图 5-2-31（题 5-13 解图）

5-13 解：以整体为研究对象进行受力分析，易知水平反力为 0。
作截面 I——I，以左侧部分为隔离体，可知 a 杆轴力 $S_a=-F$。
作截面 II——II，以右侧为隔离体，可知 b 杆轴力 S_b 的水平分量 $Y_b=2F-2F=0$，推知 $S_b=0$。

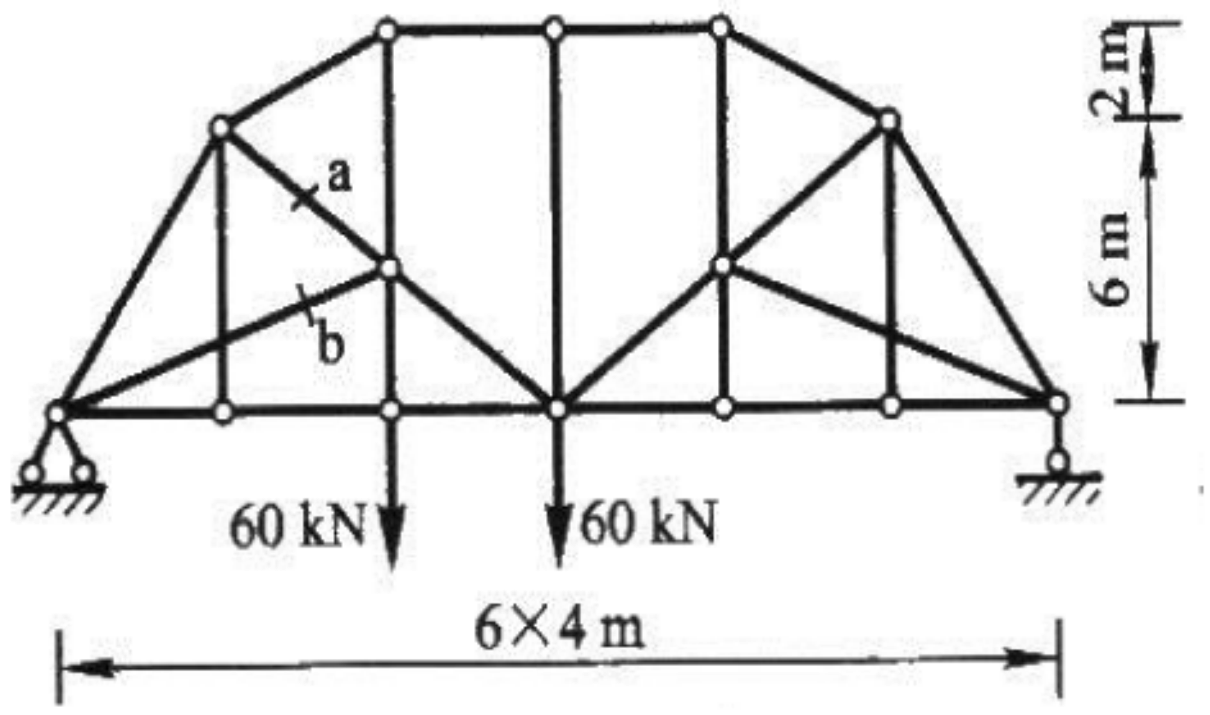


图 5-2-32（题 5-14）

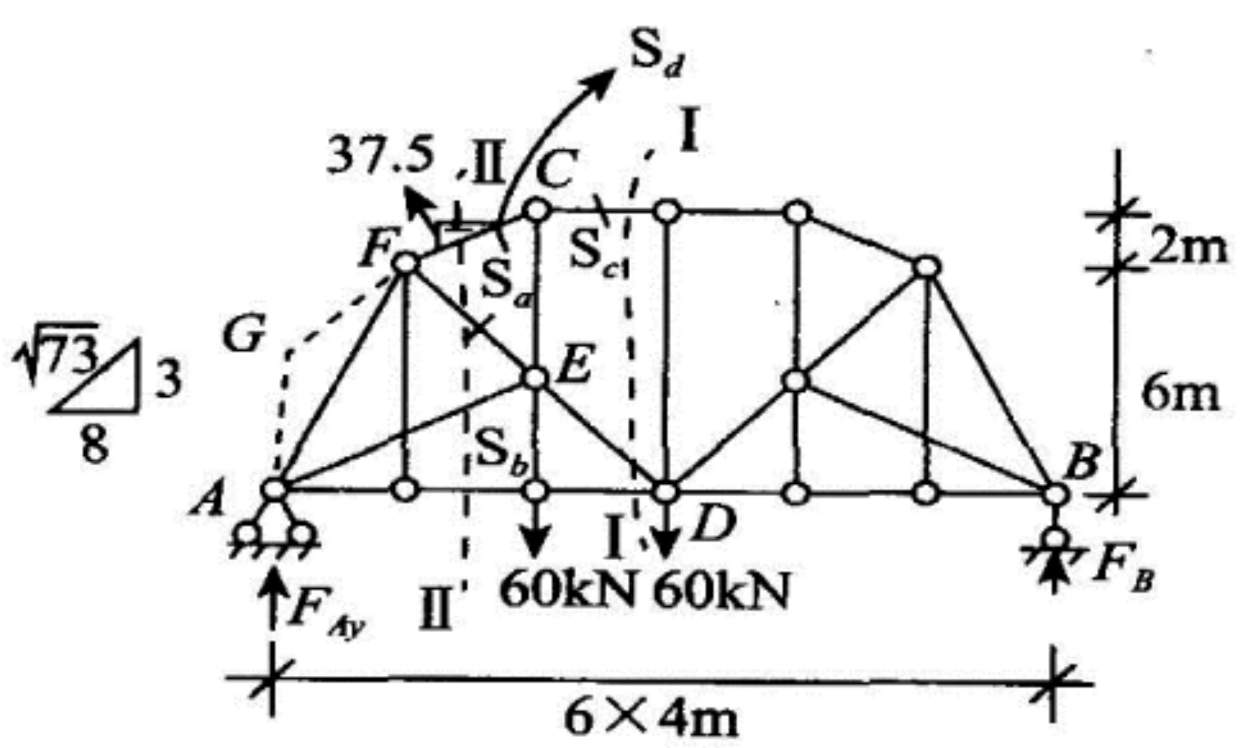


图 5-2-33（题 5-14 解图）

5-14 解：先进行整体分析，对 A 点取矩，有$\sum M_A=0$
即

$$F_B\times24-60\times8-60\times12=0$$

可算得

$$F_B=50\text{kN}$$

由$\sum F_y=0$，得 $F_{Ay}=70\text{kN}$。
作截面 I——I，取左侧部分为研究对象，根据$\sum M_D=0$ 得

$$S_C = -\frac{(70\times12-60\times4)}{8} = -75KN$$

对于结点 C 有

$$X_d = -75KN$$

取截面 II——II 左侧部分，平衡条件$\Sigma M_A=0$且S_α在 D 点分解，S_D在 G 点分解，有

$$Y_a = \frac{75\times4}{12} = 25\ \text{kN}$$

$$S_a = 25\times\frac{5}{3} = 41.67\ \text{kN}$$

取截面 II——II 左侧部分，平衡条件$\Sigma Y=0$，得

$$Y_b = -（70-37.5-25）= -7.5kN$$

进而计算求得

$$S_b = -7.5\times\frac{\sqrt{73}}{3} = -21.36\ \text{kN}$$

5-15～5-16　试求图示拱式桁架中指定杆件的内力。

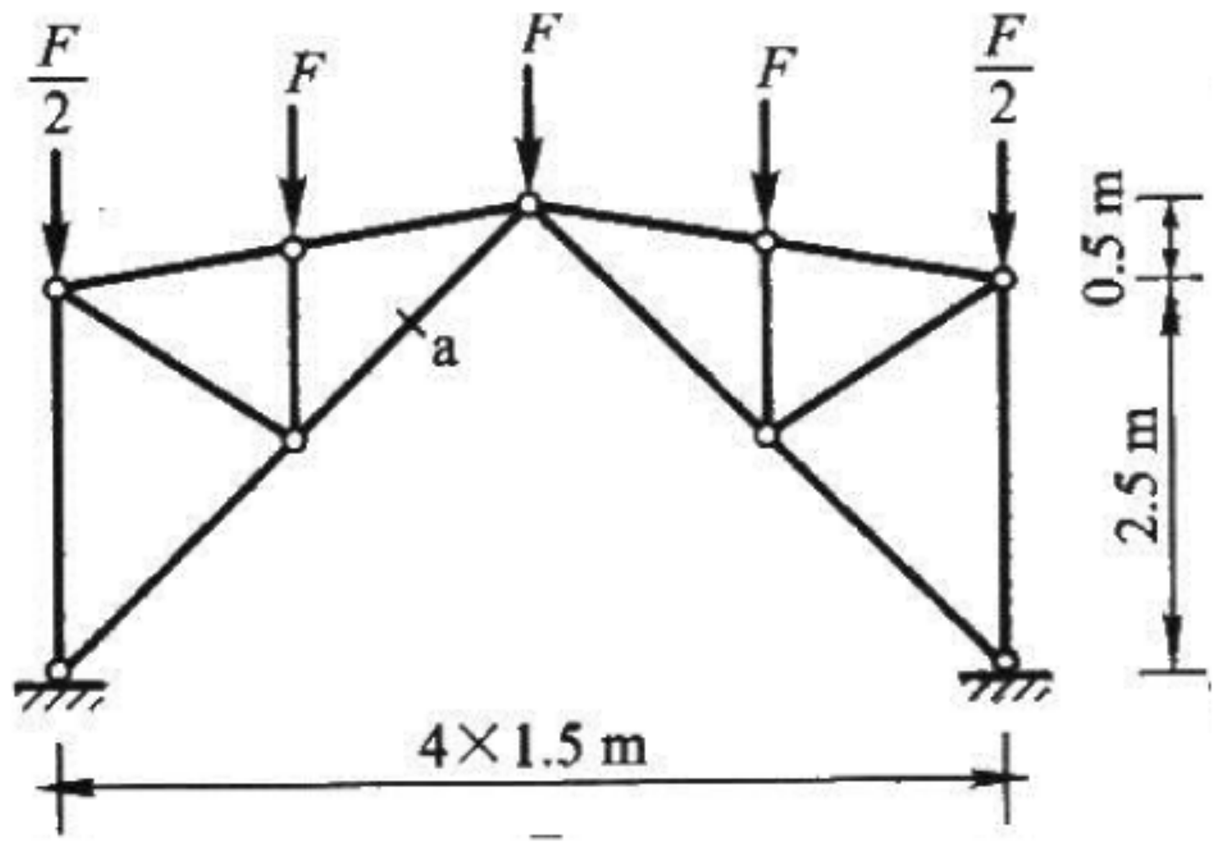


图 5-2-34（题 5-15）

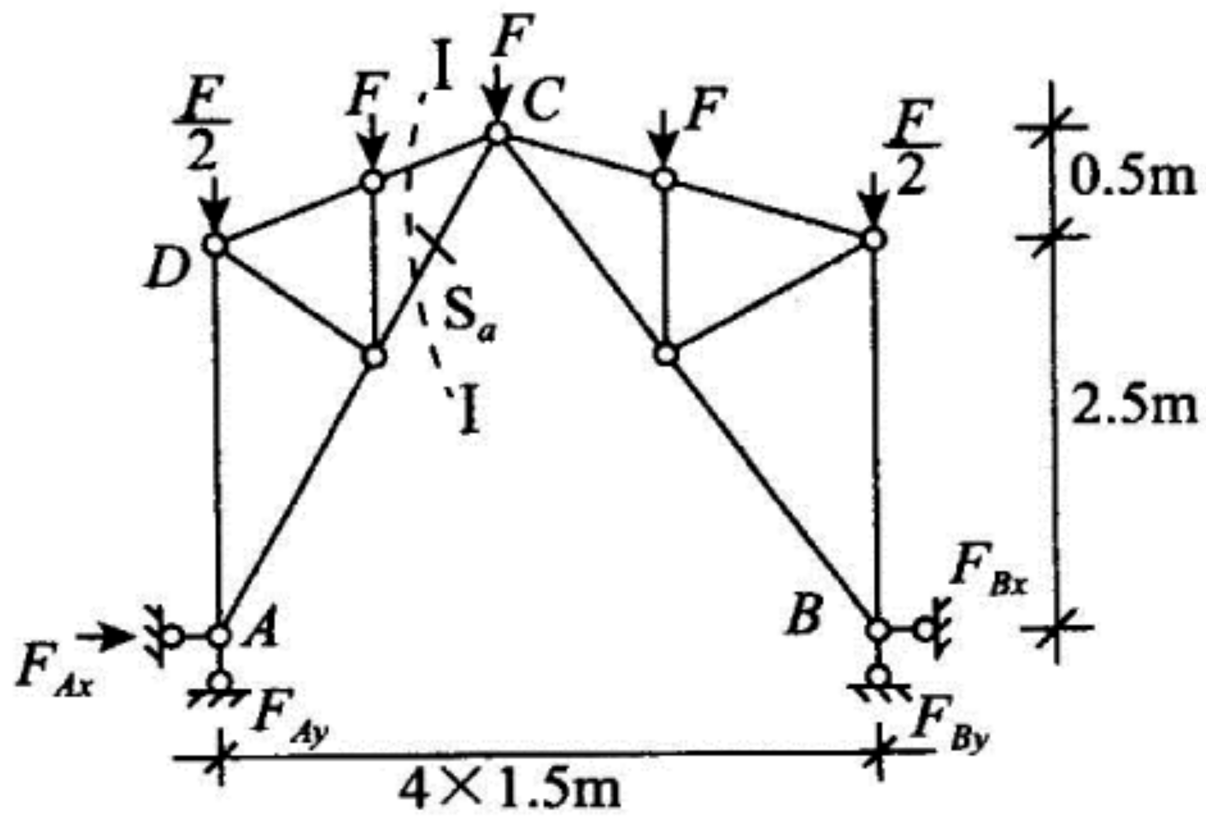


图 5-2-35（题 5-15 解图）

5-15　解：由于体系为对称体系，故

$$F_{Ay} = F_{By} = 2F$$

取左半部分，由$\sum M_C=0$，求得

$$F_{Ay}\cdot3 - F_{Ax}\cdot3 - \frac{F}{2} - F\times1.5 = 0$$

$$F_{Ax} = F$$

作截面 I——I，并取左侧部分进行分析，由$\sum M_D=0$，可求得

$$X_a=\frac{-F\times2.5-F\times1.5}{2.5}=-0.4F$$

$$S_a=-0.4\sqrt{2}F=-0.5657F$$

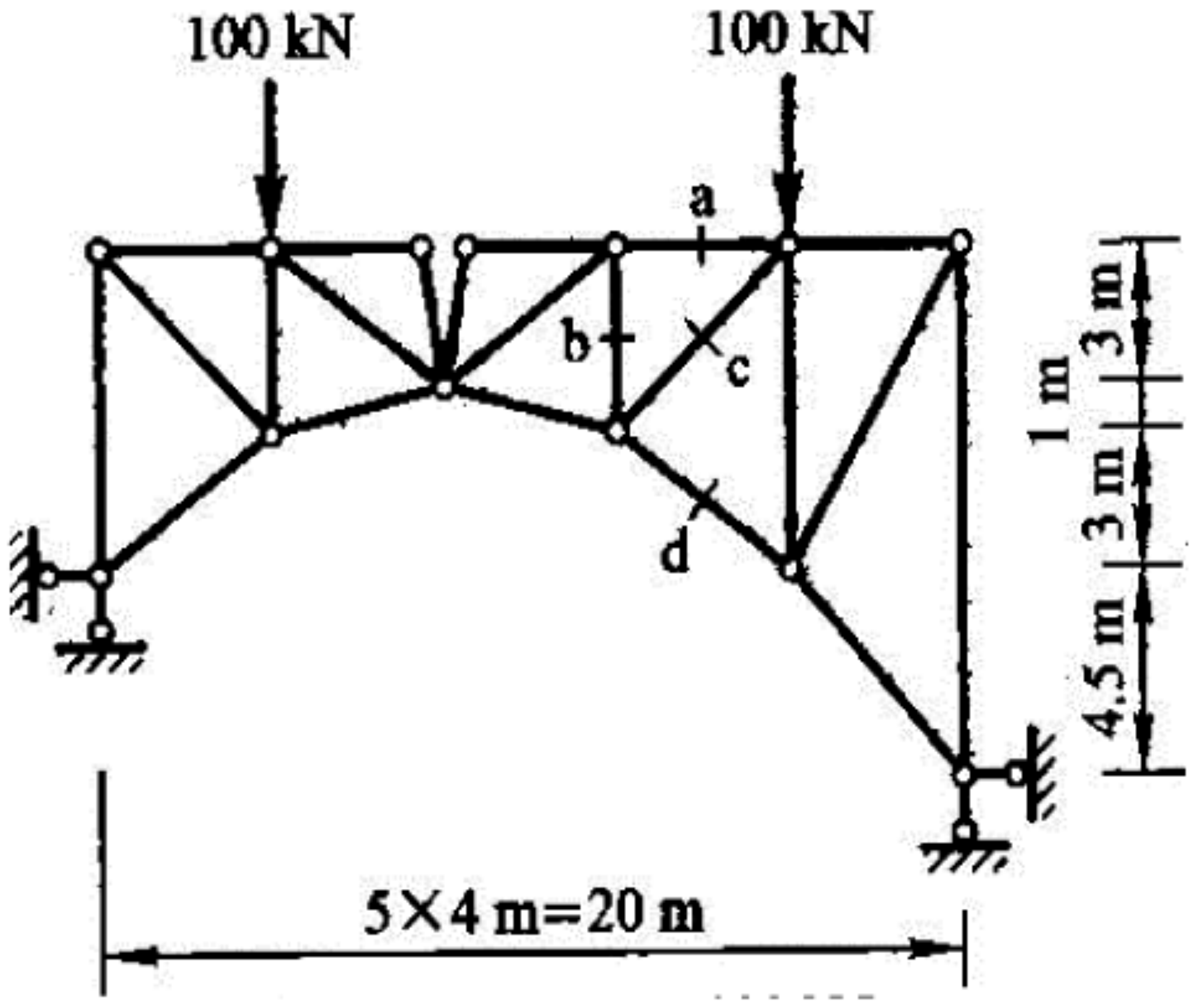


图 5-2-36（题 5-16）

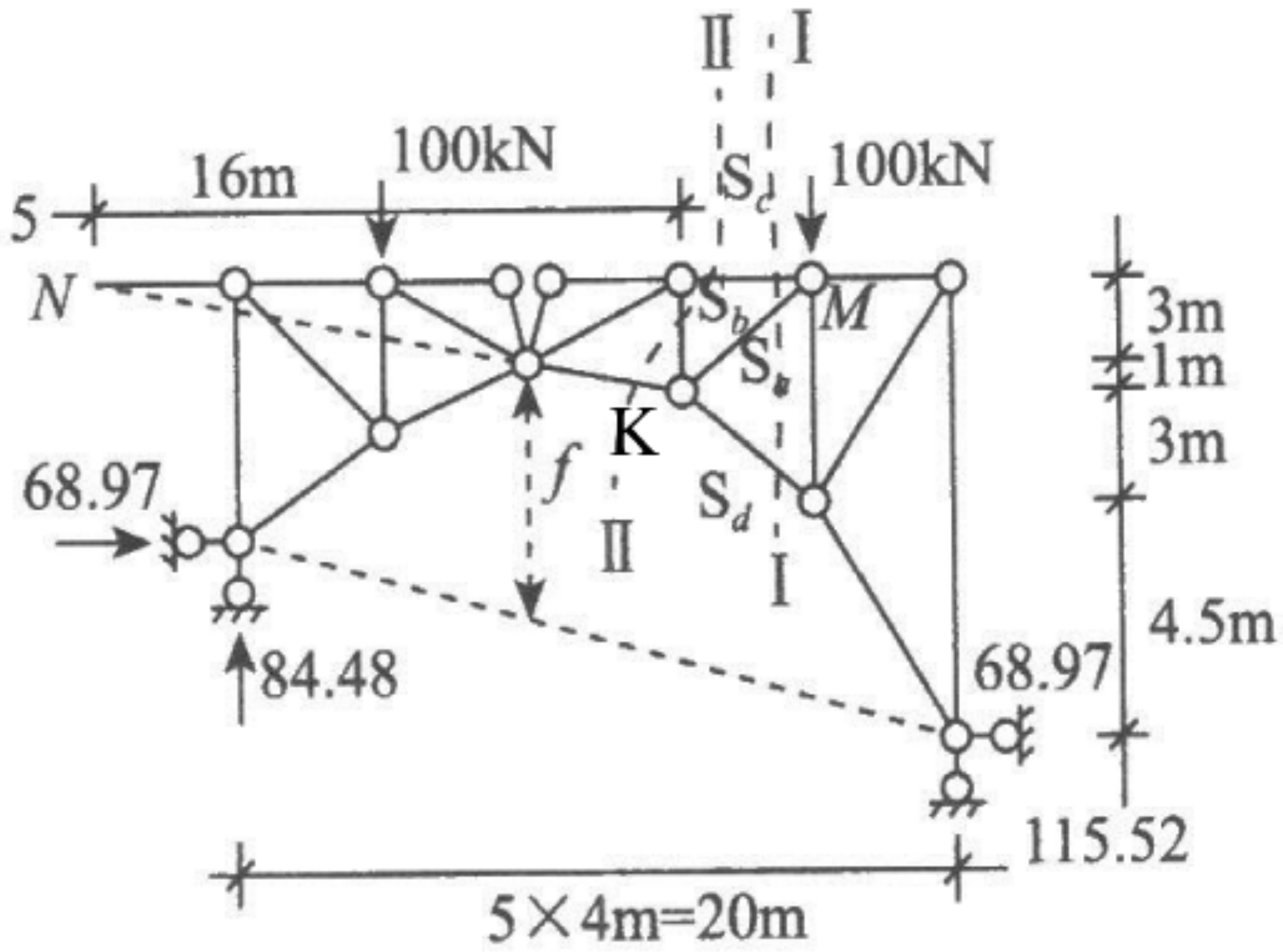


图 5-2-37（题 5-16 解图）

5-16　解：此结构可以看作静定拱结构，根据拱结构的相关结论

$$H=\frac{M_c^{\circ}}{f}=\frac{100\times4}{4+4.5\times8/20}=\frac{400}{5.8}=68.97\ \text{kN}$$

$$V_A=100-\frac{4.5}{20}H=84.48$$

$$V_B=100+\frac{4.5}{20}H=115.52$$

作截面 I——I，取右侧截面分析，对 K 点取矩，可求得 S_a

$$S_a=\frac{-115.52\times8+68.97\times7.5+100\times4}{4}=-1.72\ \text{kN}$$

再对 M 点取矩，可算得 d 杆轴力的水平分量 X_d

$$X_d=\frac{115.52\times4-68.97\times11.5}{7}=-47.29$$

由水平分量和竖直分量的比例关系，可推知

$$Y_d=-35.47kN$$

$$S_d=-59.11kN$$

对结点 M 进行受力分析，可算得

$$Y_c=115.52-100-35.47=-19.95$$

$$S_c=-28.21kN$$

作截面 II——II，取右侧部分为隔离体，对延长点 N 取矩，可求得 b 杆的轴力 S_b

$$S_b=\frac{84.48\times4+68.97\times7-100\times8}{16}=1.29\ kN$$

5-17～5-20　试求图示组合结构中各链杆的轴力并作受弯杆件的内力图。

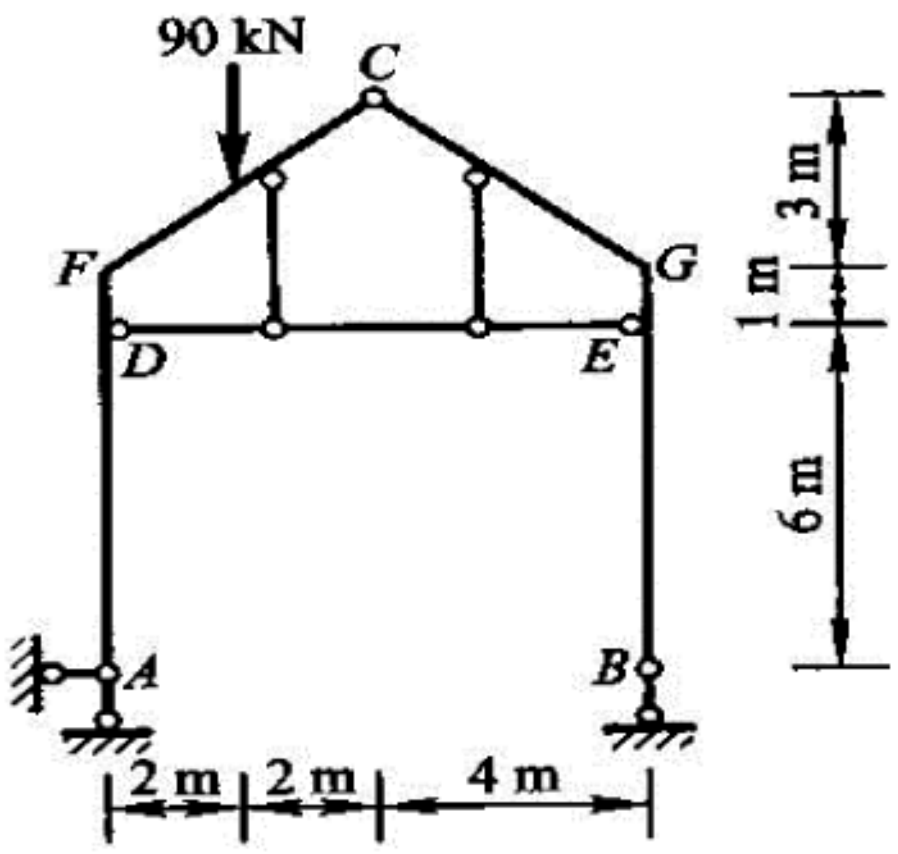


图 5-2-38（题 5-17）

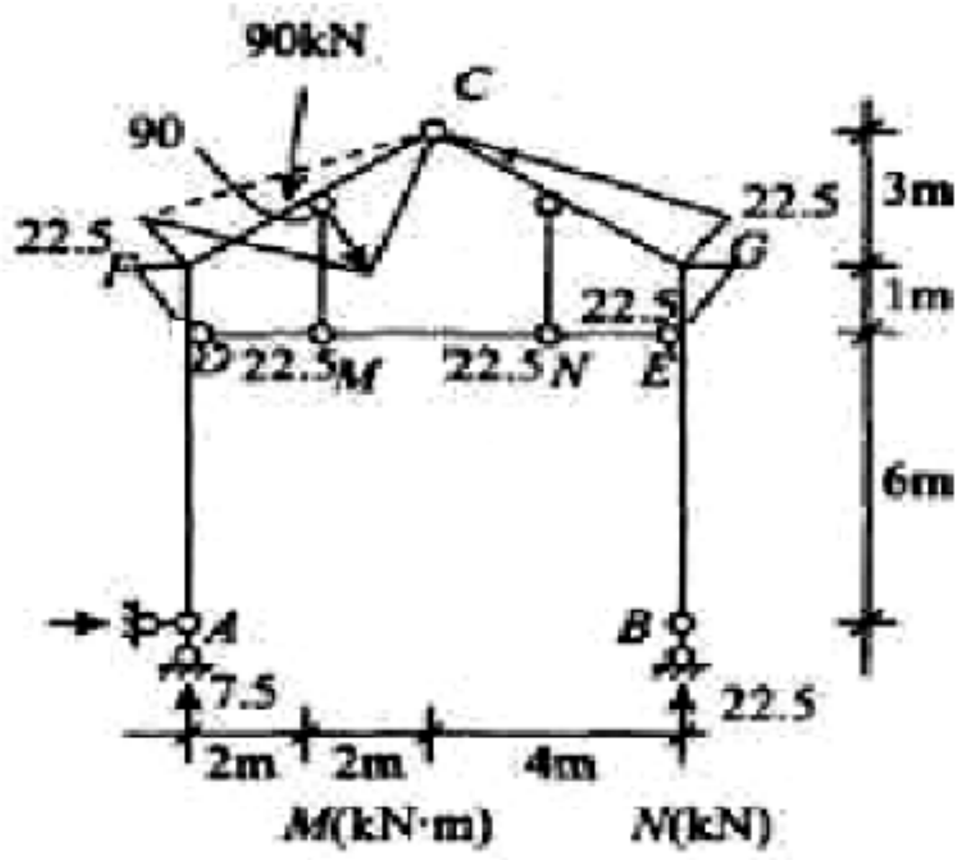


图 5-2-39（题 5-17 解图）

5-17　解：以整体为研究对象求解支座反力，由$\sum M_A=0$，则

$$F_B\times8-90\times2=0$$

解得

$$F_B=22.5kN$$

由$\sum F_y=0$，求得

$$F_A=67.5kN$$

根据零杆的特征（T 型），易判断两竖直链杆为零杆。在 C 点处沿竖向将结构分成左右两半部分，取右半部分为隔离体，受力分析，由$\Sigma M_C=0$，则

$$F_{MN}\times4-22.5\times4=0$$

算得

$$F_N=22.4kN$$

易知 $M_{GE}=F_N\times1=22.5kN\cdot m$，同理可得 $M_{FD}=22.5kN\cdot m$。

由弯矩叠加法可以画出结构的弯矩图如图 5-2-40 所示。

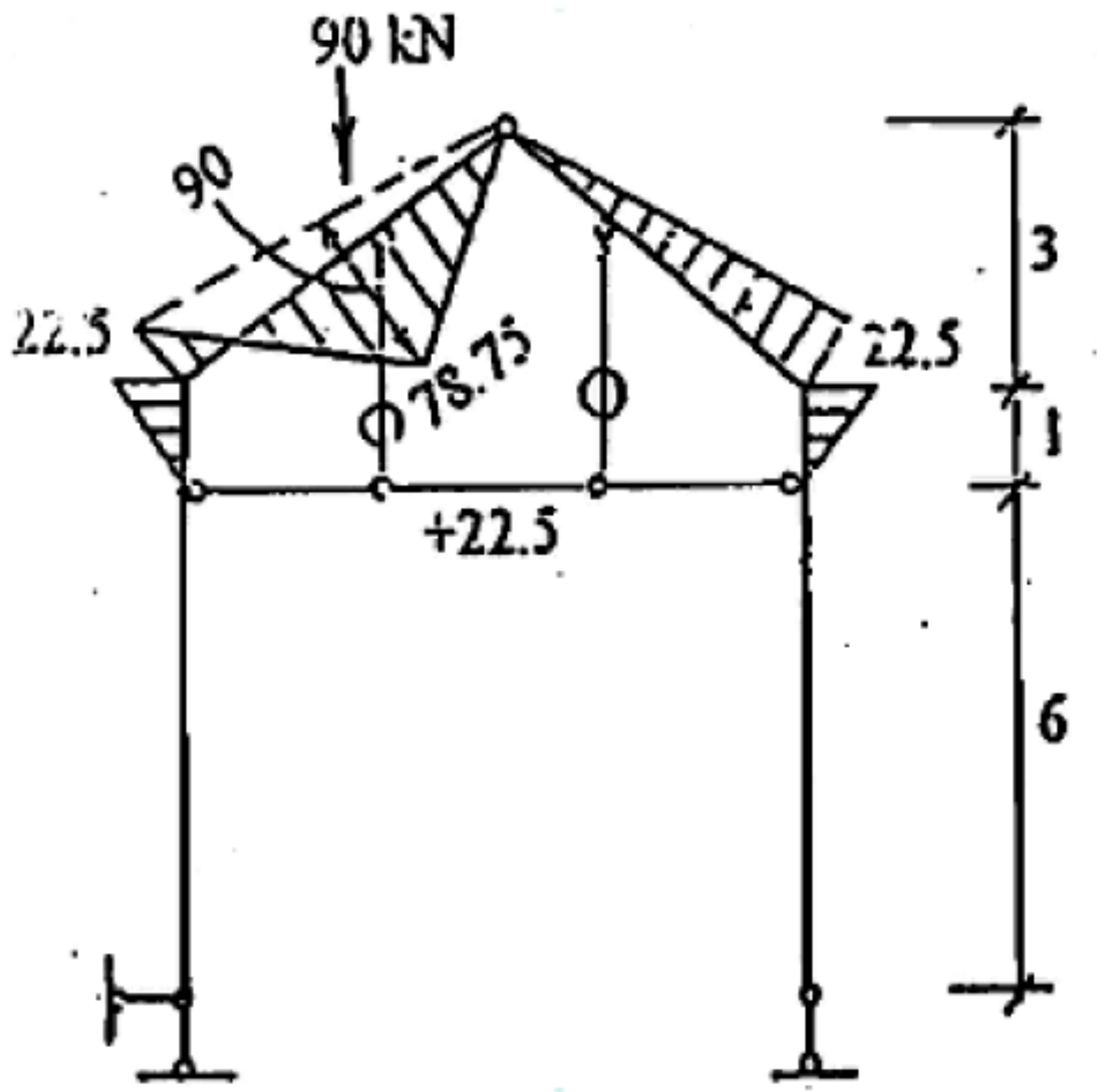


图 5-2-40

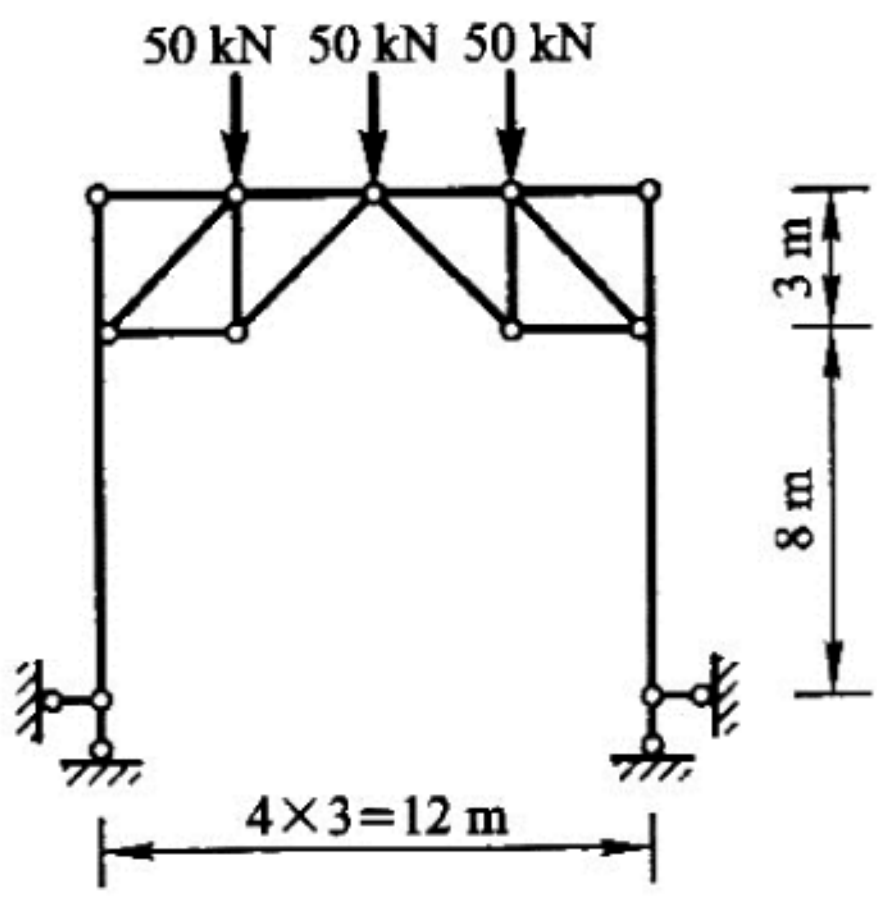


图 5-2-41（题 5-18）

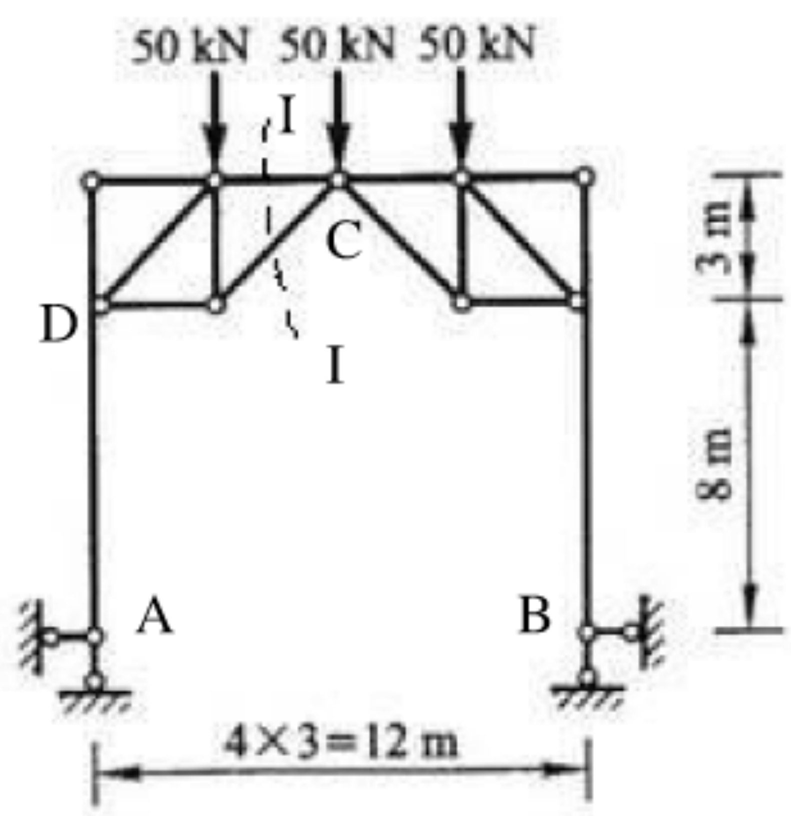


图 5-2-42（题 5-18 解图）

5-18　解：此体系为对称体系。

由平衡条件易知，$F_{Ay}=F_{By}=75kN$。

取 C 点左半部分为研究对象，由$\sum M_C=0$，则

$$F_{Ay}\times 6-50\times 3-F_{Ax}\times 11=0$$

算得

$$F_{Ax}=27.27kN$$

作截面 I——I，取右半部分为隔离体，由截面法$\sum F_y=0$，$\sum F_X=0$ 来计算出链杆内力，再依次用结点法计算

其余链杆内力，并标注在链杆上。

$$M_{DA}=F_A\times 8=27.27\times 8=218.16\text{kN·m}$$

由弯矩叠加法，画出弯矩图如图 5-2-43 所示。

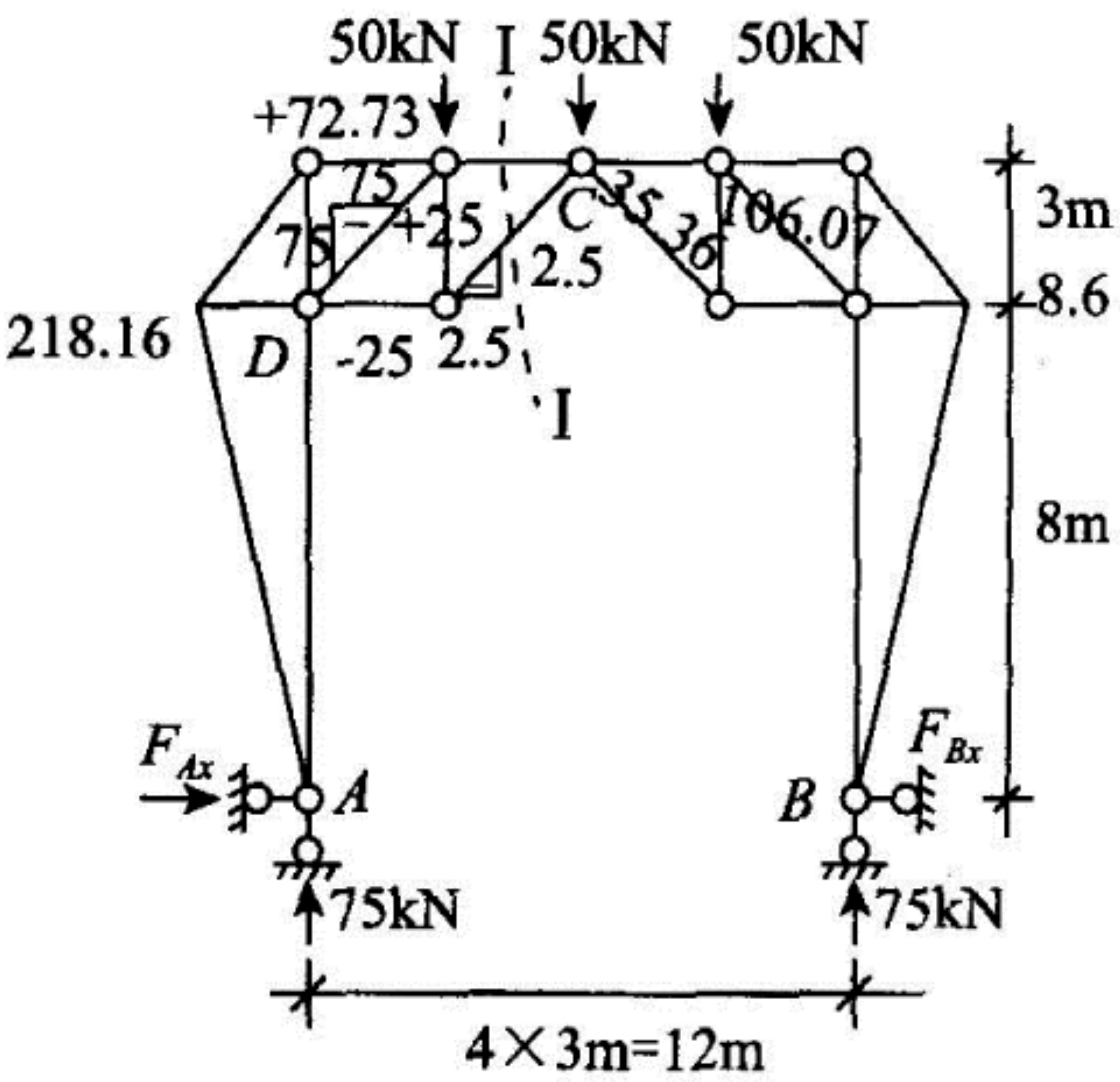


图 5-2-43

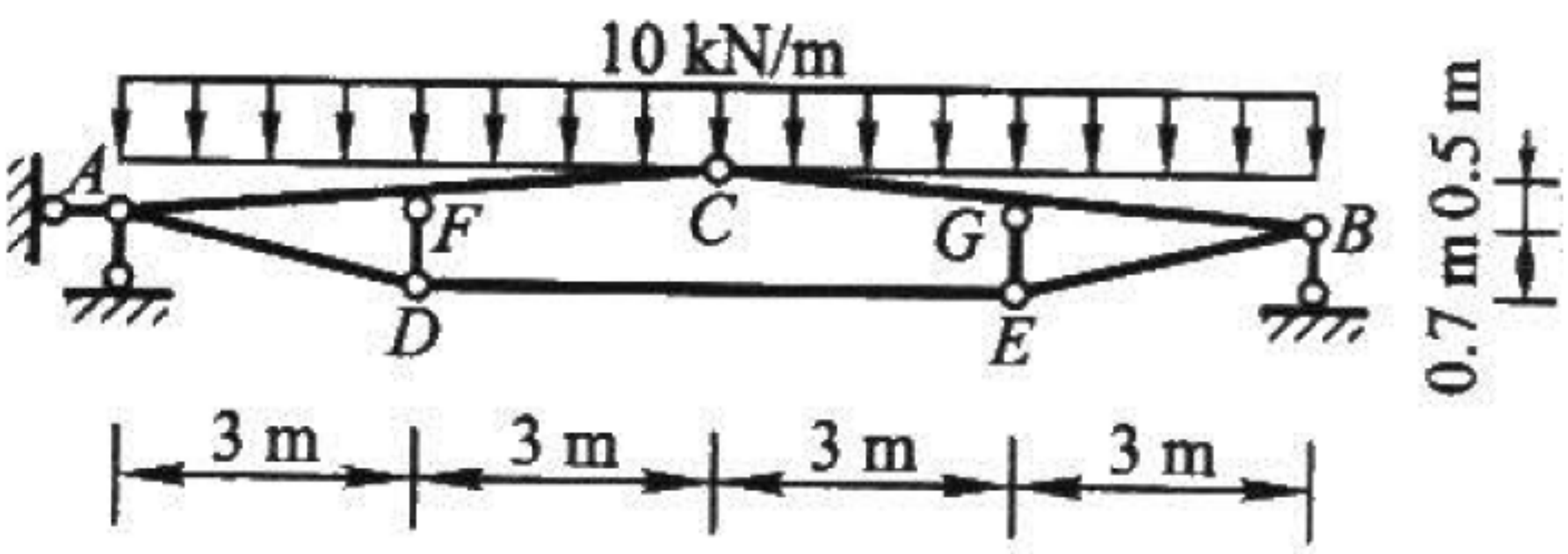


图 5-2-44（题 5-19）

5-19　解：此体系为对称体系。

由平衡条件易知，$F_{Ay}=F_{By}=60\text{kN}$。

取 C 点左半部分为研究对象，由 $\Sigma M_C=0$，则

$$F_{NDE}\times 1.2-60\times 6+10\times 6\times 3=0$$

算得

$$F_{NDE}=150\text{kN}$$

对 E 点、D 点分别用结点法计算，算出各链杆内力，将力标在各链杆上。取隔离体分析，可算得 F 点处的弯矩

$$M_F=M_G=60\times 3-150\times(0.7+0.5-0.25)-10\times 3\times 1.5=-7.5\text{kN·m}$$

故可由弯矩叠加法画出弯矩图如图 5-2-45 所示。这时将力分解在 N、V 方向，可作出梁的轴力剪力图（如图 5-2-46 所示）和轴力图（如图 5-2-47 所示）。

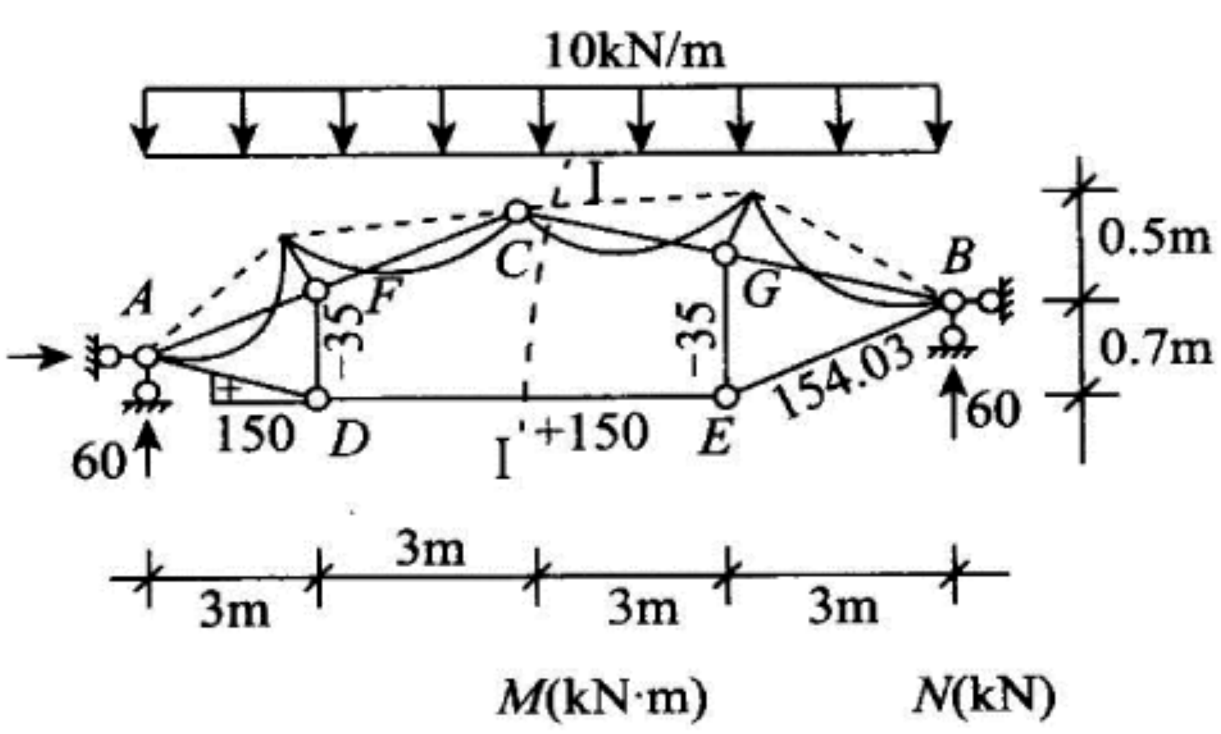


图 5-2-45

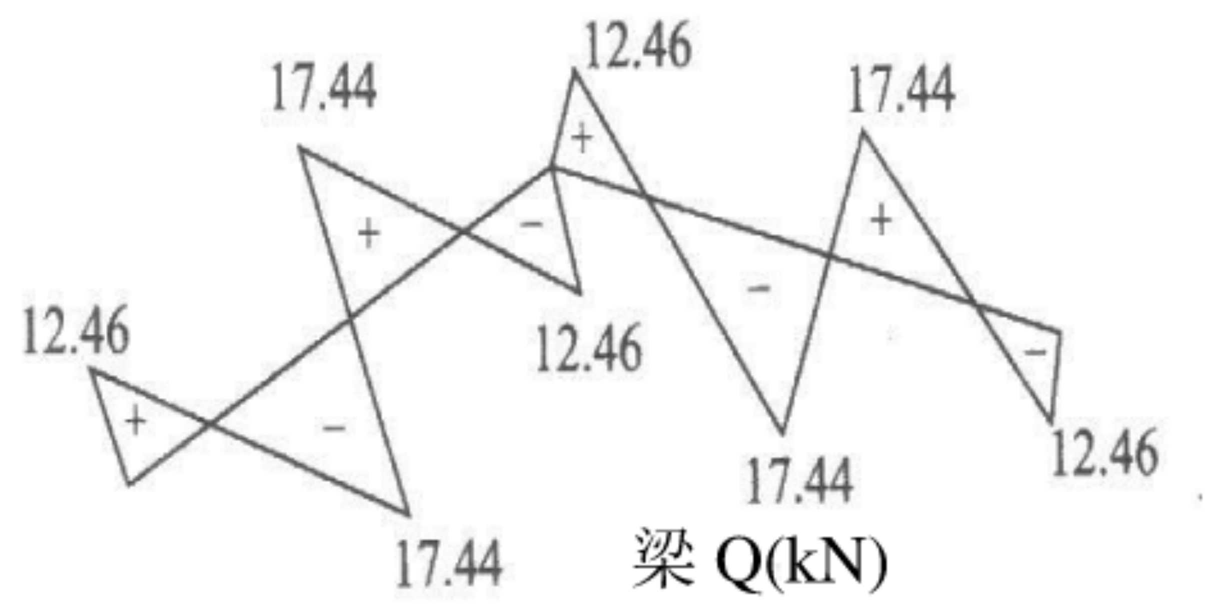
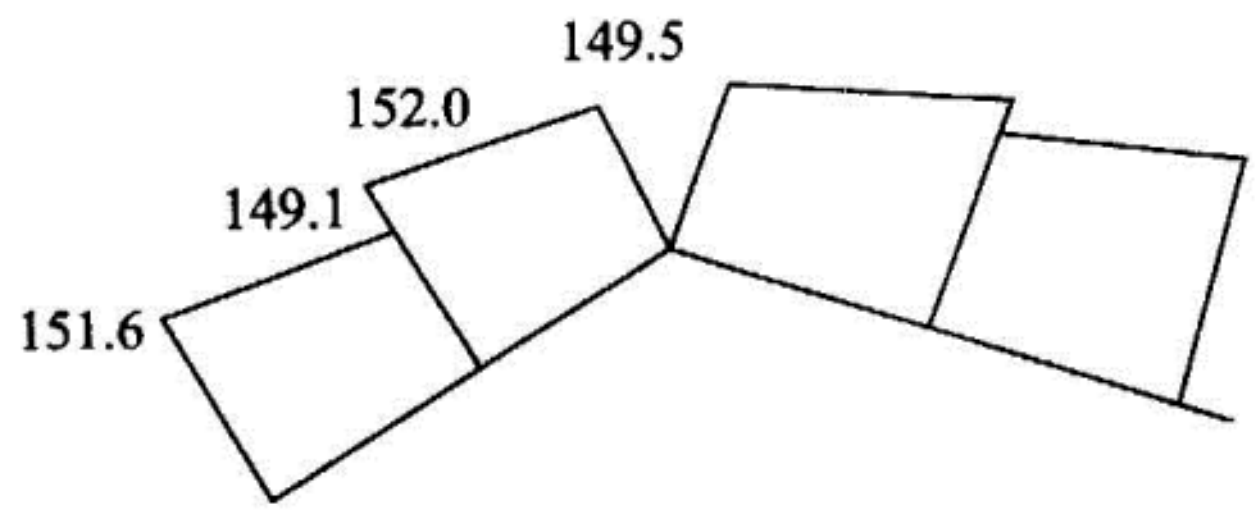


图 5-2-46



梁N(kN)

图 5-2-47

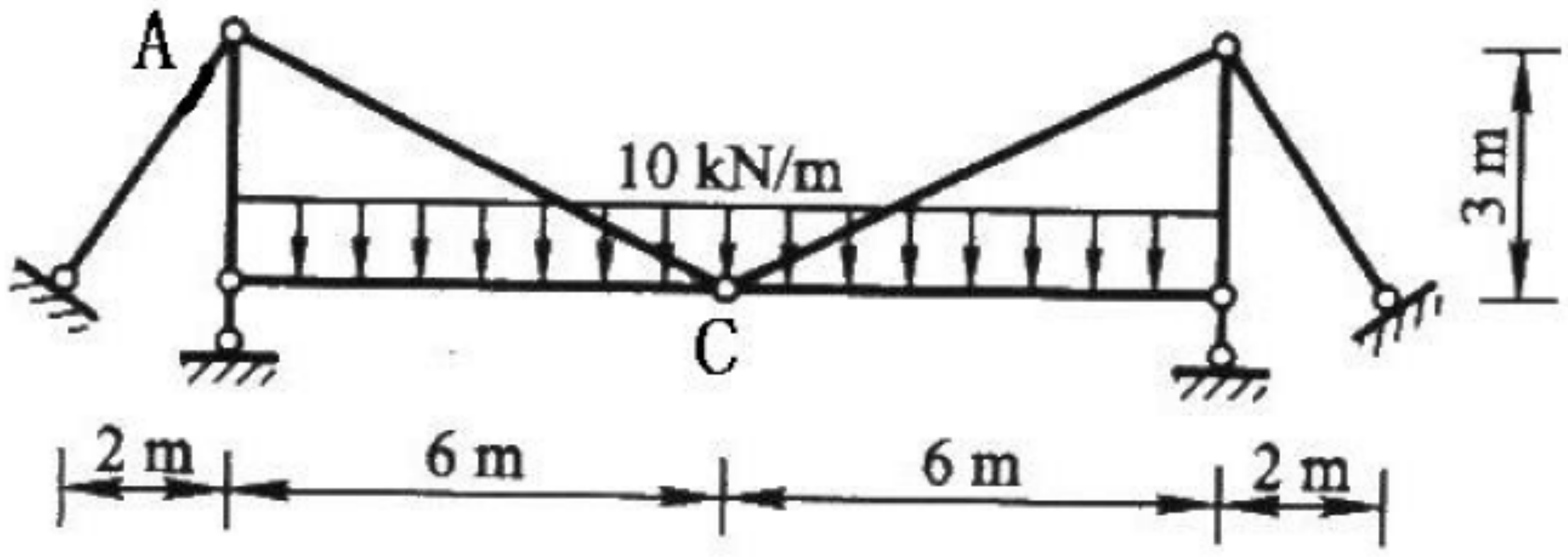


图 5-2-48（题 5-20）

5-20　解：此体系可等效看作静定拱结构，根据结论得水平约束反力 H

$$H=\frac{M_c^\circ}{f}=\frac{10\times12^2}{8\times3}=60\ \text{kN}$$

此时取结点 A 分析，由平衡条件可得各杆轴力并标在图中，取下部结构为隔离体进行受力分析如图 5-2-49 所示。

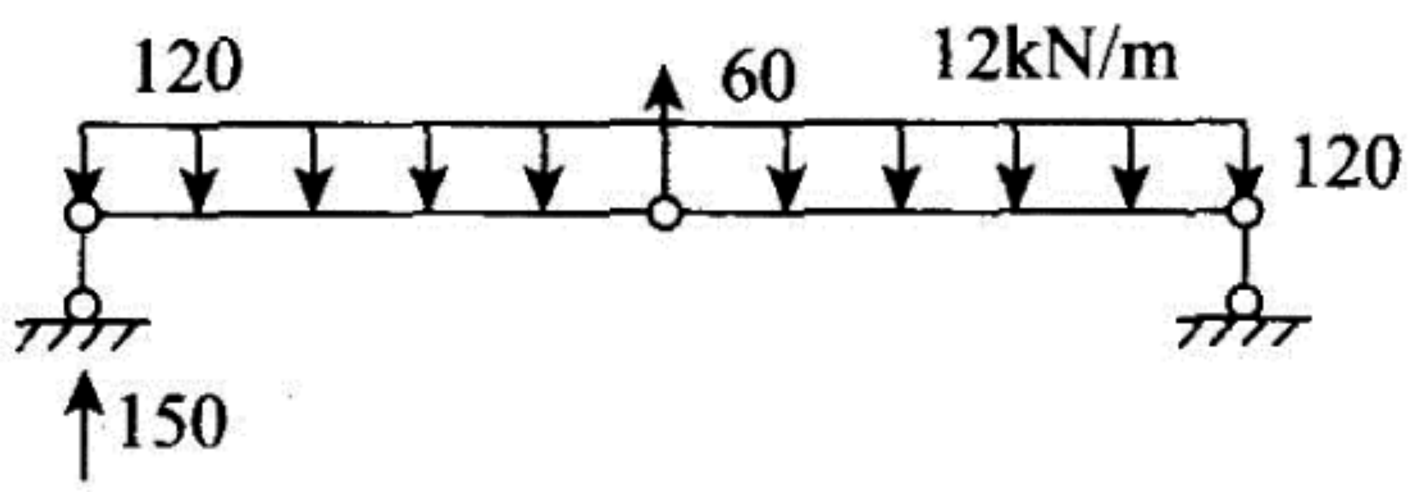


图 5-2-49

可求得跨中弯矩

$$M_{中}=6\times6\times10\div8=45\text{kN}\cdot\text{m}$$

将弯矩图和各杆轴力标于图 5-2-50 所示。

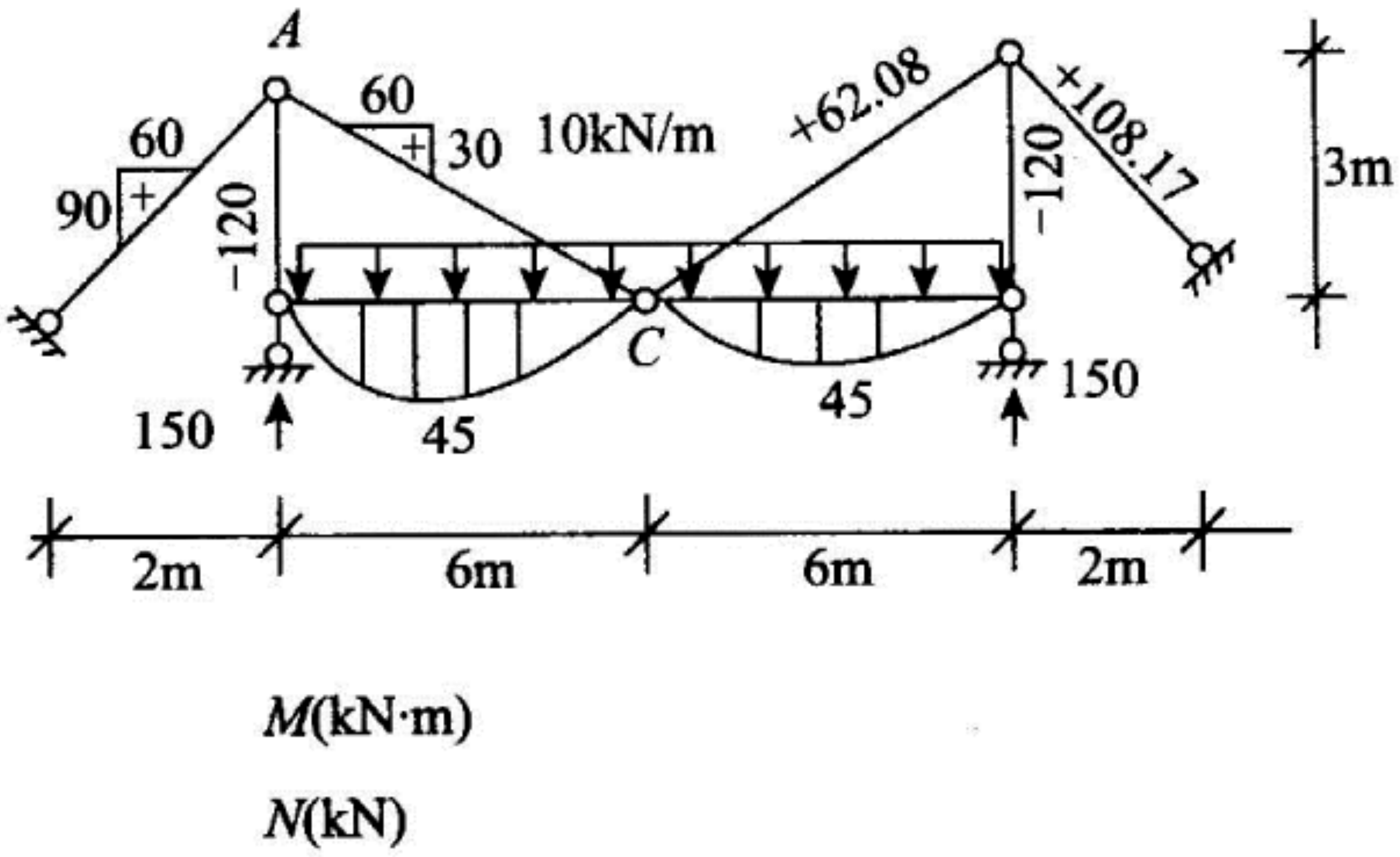


图 5-2-50

*5-21～*5-24　试用零载法分析图示体系的几何构造性质。

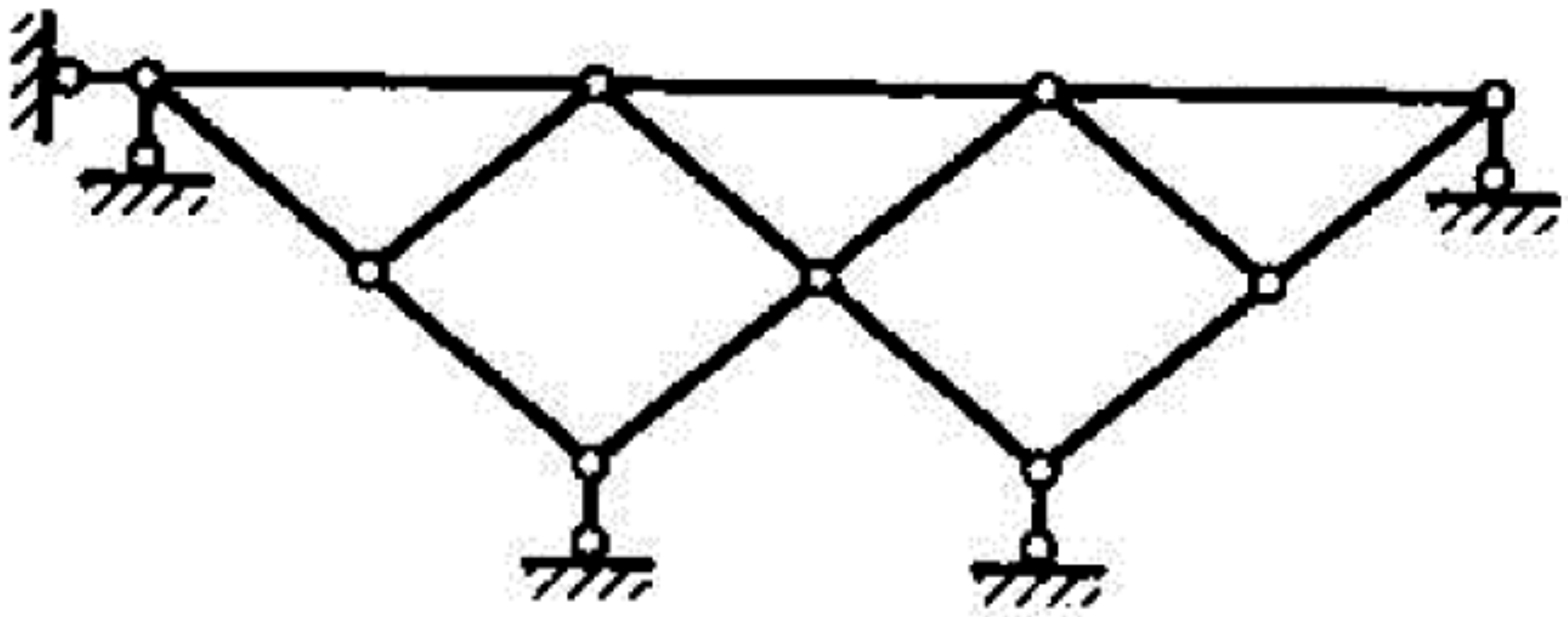


图 5-2-51（题*5-21）

5-21　解：此体系计算自由度

$$W=2\times 9-(13+5)=0$$

零载时，必全为零杆，几何不变。

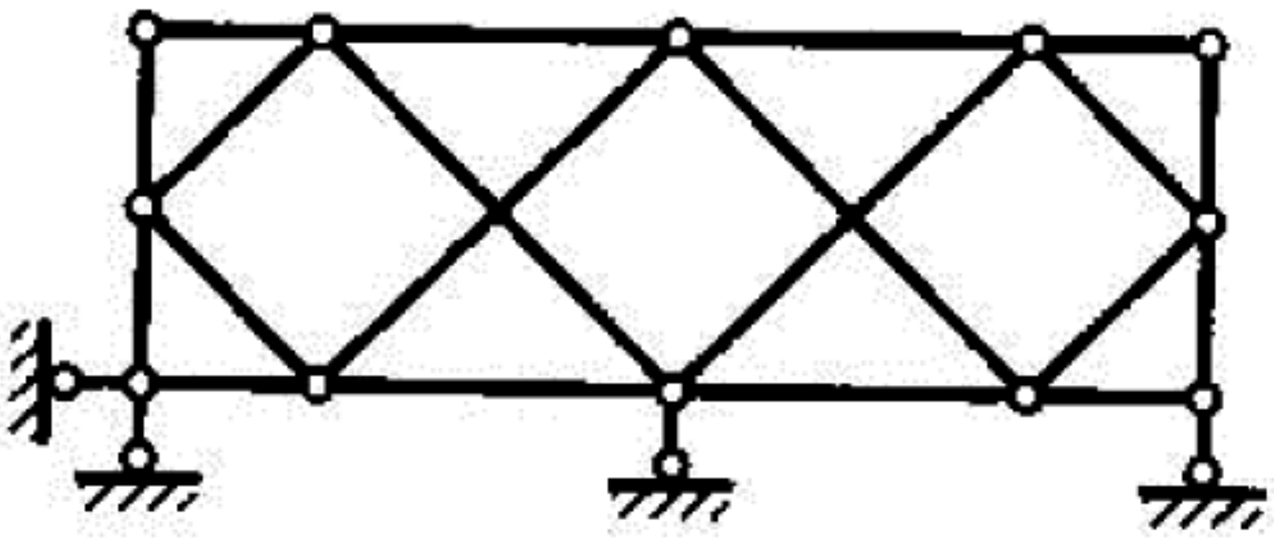


图 5-2-52（题*5-22）

5-22　解：计算自由度

$$W=2\times 12-(20+4)=0$$

零载时，设有图 5-2-53 所示非零内力，得两端竖向反力方向相反，已不满足$\sum M=0$，故只能全为零杆，几何不变。

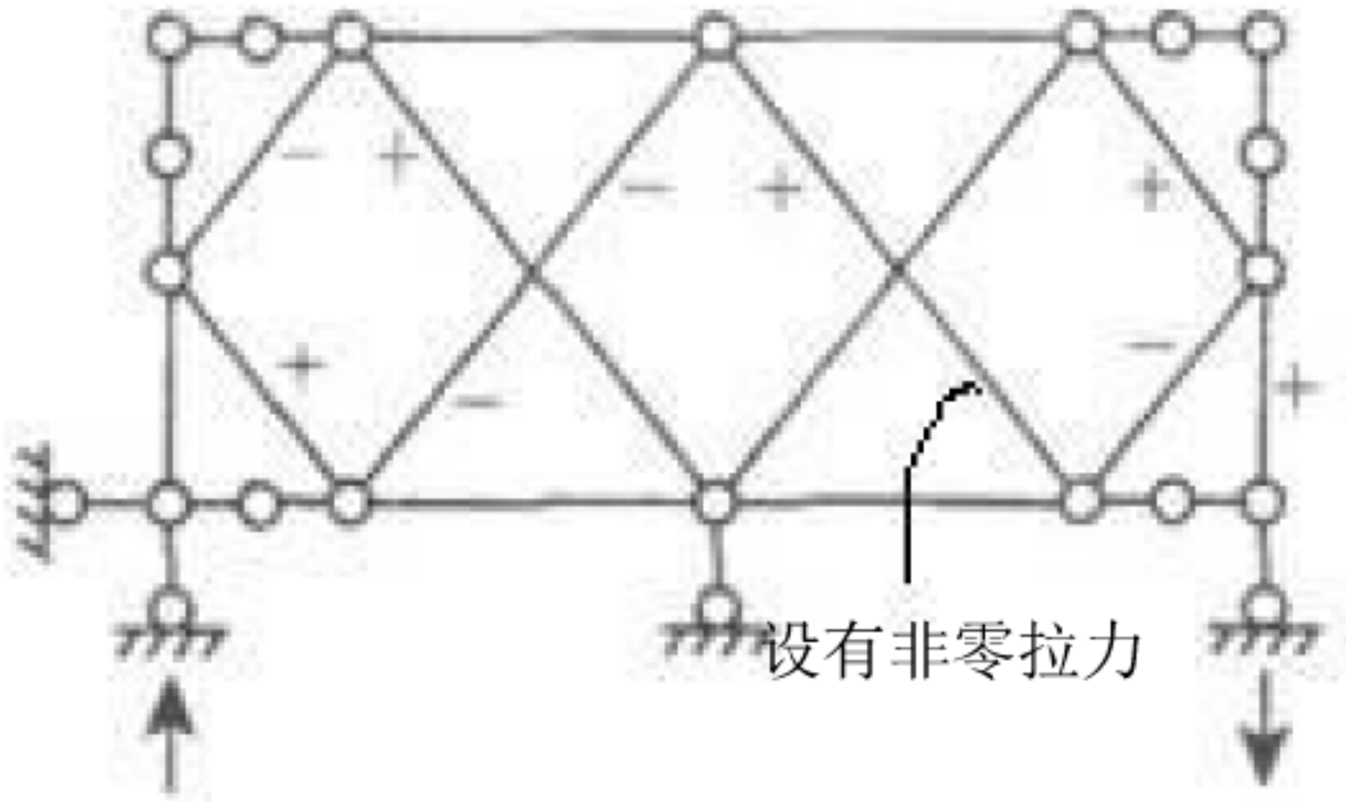


图 5-2-53

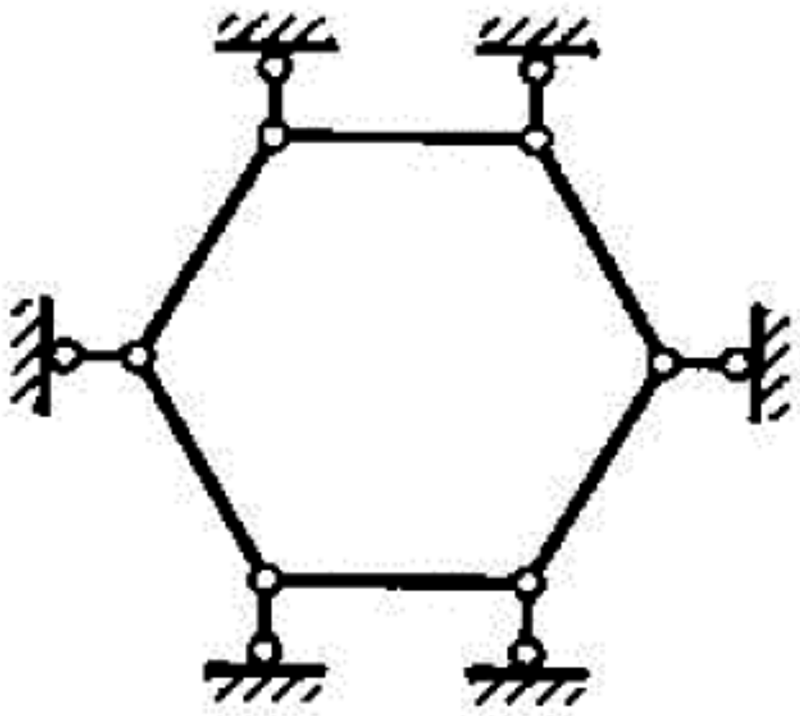


图 5-2-54（题*5-23）

5-23　解：计算自由度

$$W=2\times6-(6+6)=0$$

零载时，施加图 5-2-55 所示的非零内力 X，非零内力可平衡，故为几何可变。

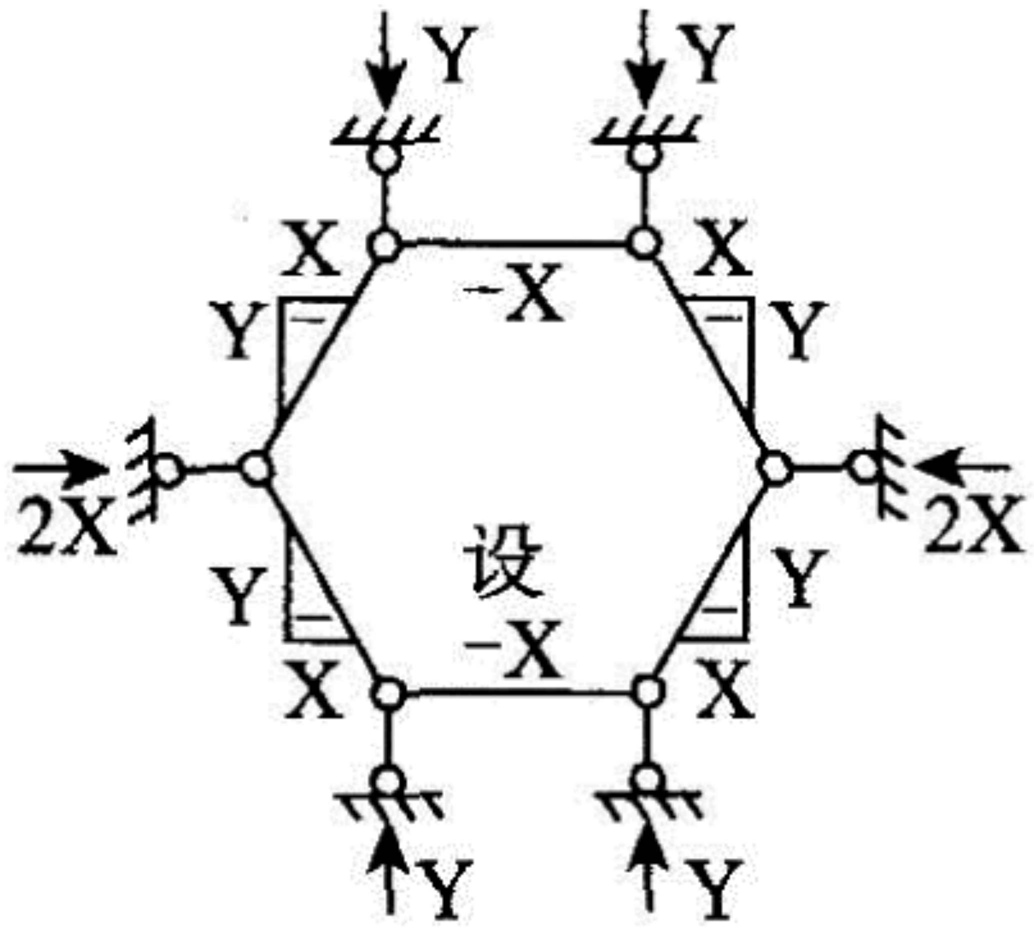


图 5-2-55

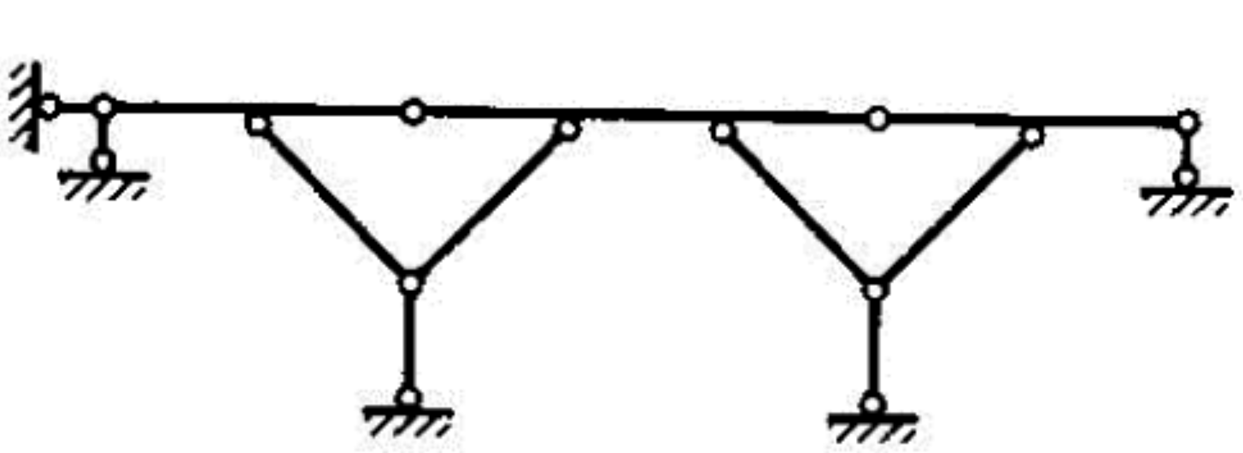


图 5-2-56（题*5-24）

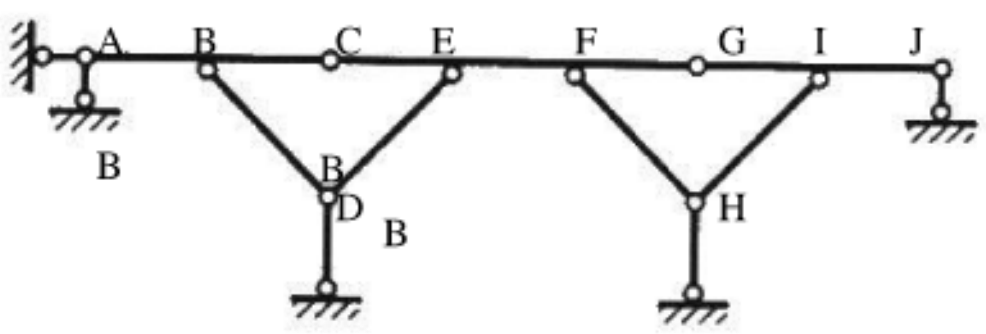


图 5-2-57（题*5-24 解图）

5-24　解：计算自由度

$$W=3\times7-(2\times8+5)=0$$

零载时，设 A 处有向上的非零反力，自左至右依次取隔离体判断各力所需方向（打√者为已判方向）如图 5-2-58 所示。

最后取 GJ 杆时，已无法满足$\sum M_J=0$，故 A 反力只能为零，从而所有杆反力均为零，体系为几何不变。



图 5-2-58

*5-25　试用零载法检查图 5-2-59（a）所示组合结构的几何不变性。

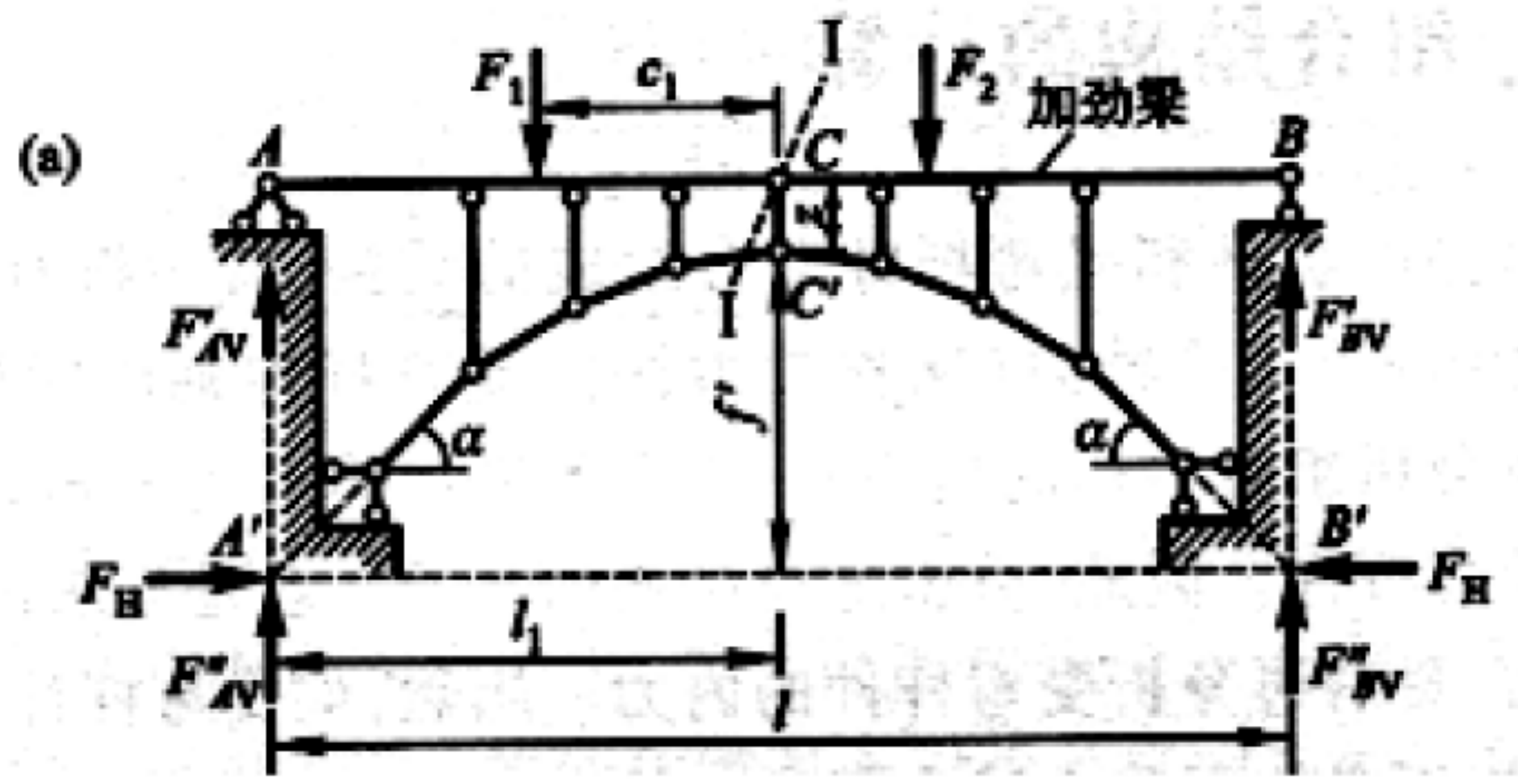


图 5-2-59

解：计算自由度

$$W=3\times17-(2\times22+7)=0$$

零载时，设拱部有非零压力，如图 5-2-60 所示，由结点平衡可知所有竖杆均有压力。

若从铰 C 右侧断开，取 AC $_右$为隔离体如图 5-2-61 所示，由$\sum M_A=0$，知 Q 必向下；再取 C $_右$B 为隔离体，Q 则向上，这时已不满足$\sum M_B=0$，因此只能是所有内力均为零，体系几何不变。

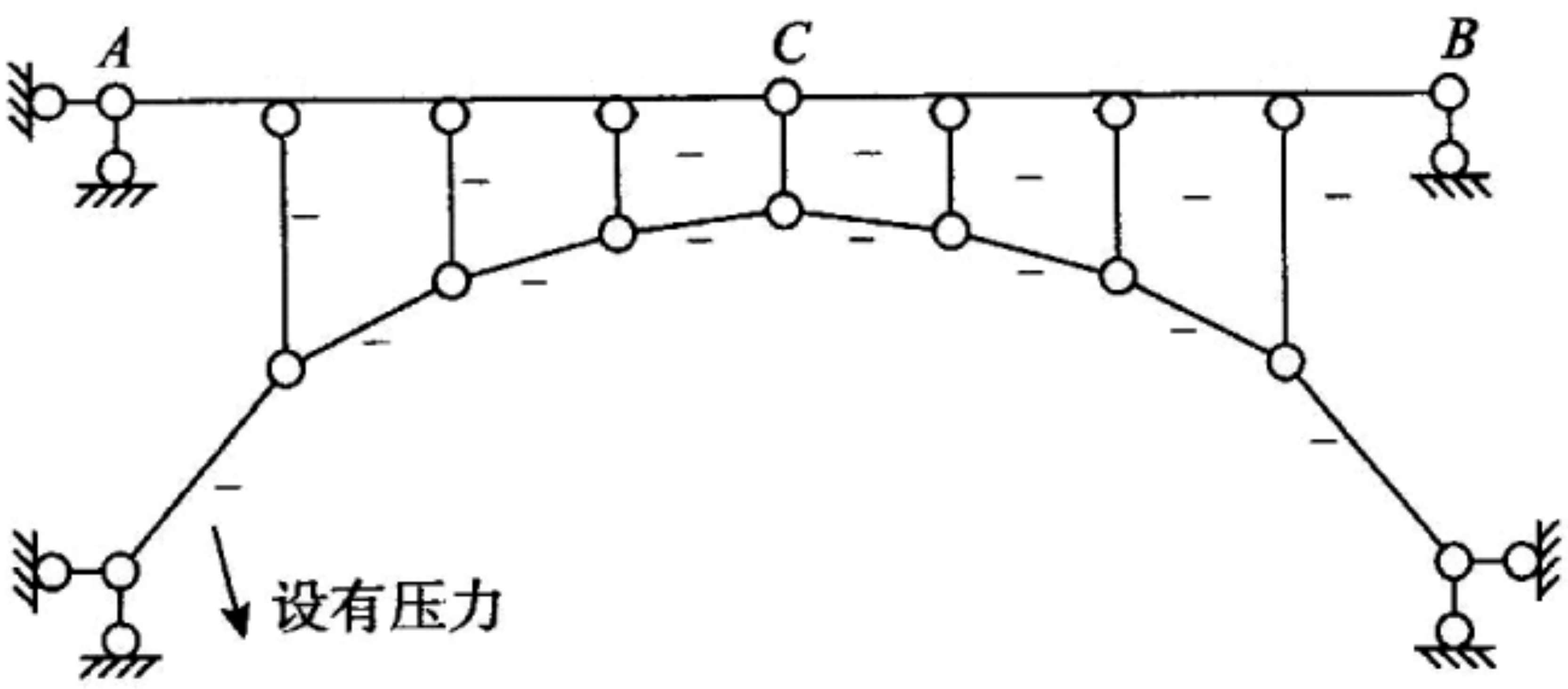


图 5-2-60

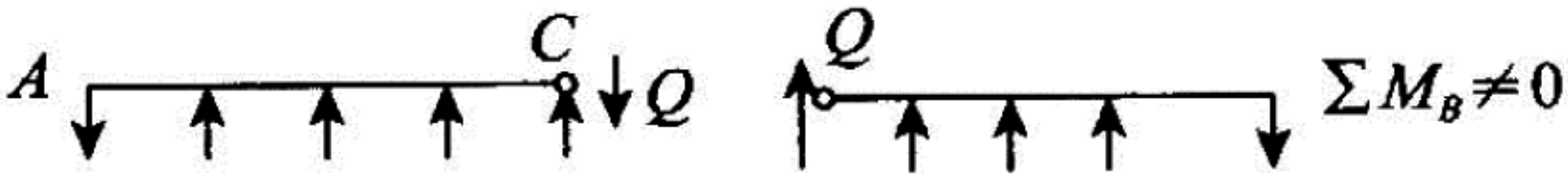


图 5-2-61

5.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 5-3-1 所示结构 K 截面的 M 值为____，____侧受拉。[西南交通大学 2007 研]

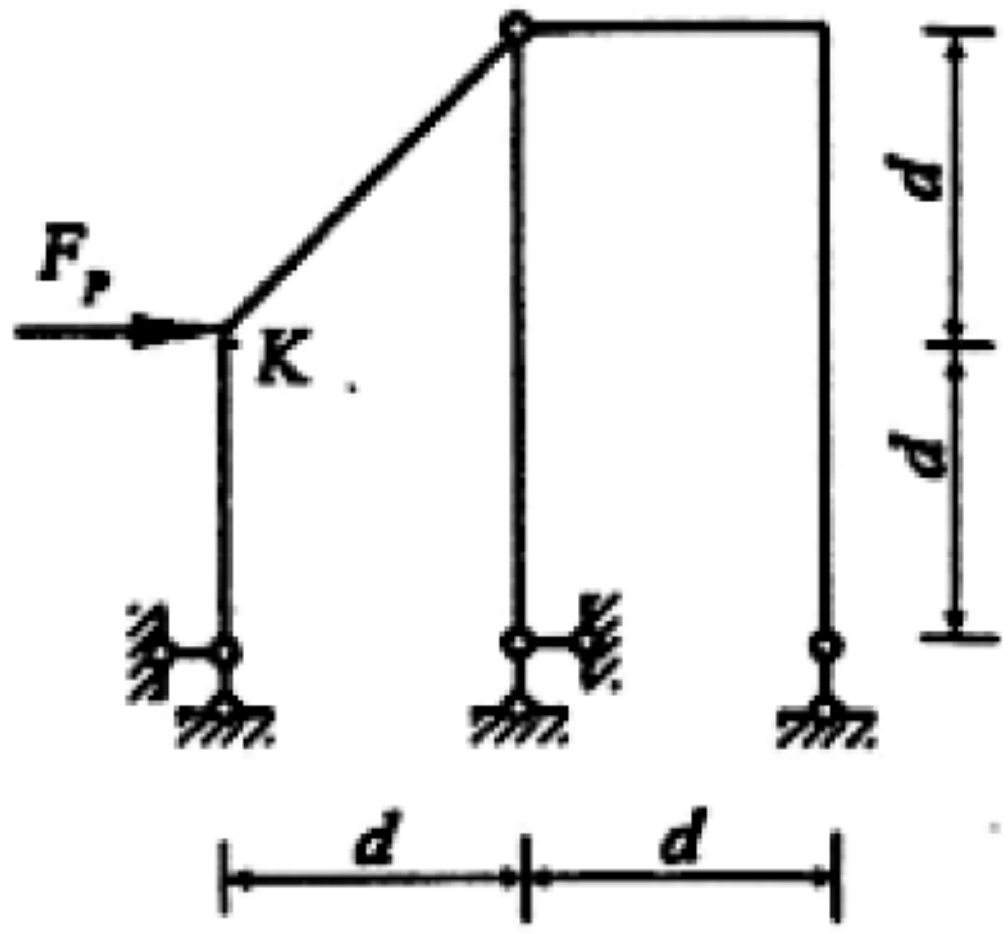


图 5-3-1

【答案】$M_K = F_P d$；右侧

【解析】由题意知中间竖杆为二力杆，采用截面法垂直于中间竖杆水平截断，根据水平方向受力平衡，可推知左端支座的水平约束反力为 F_P，方向水平向左；取隔离体，易算得 $M_K=F_Pd$，右侧受拉。

2．图 5-3-2 示静定组合结构，在荷载作用下，截面 E 的剪力 F_{EQ}=________，弯矩 M_E=________，________侧受拉。[湖南大学 2007 研]

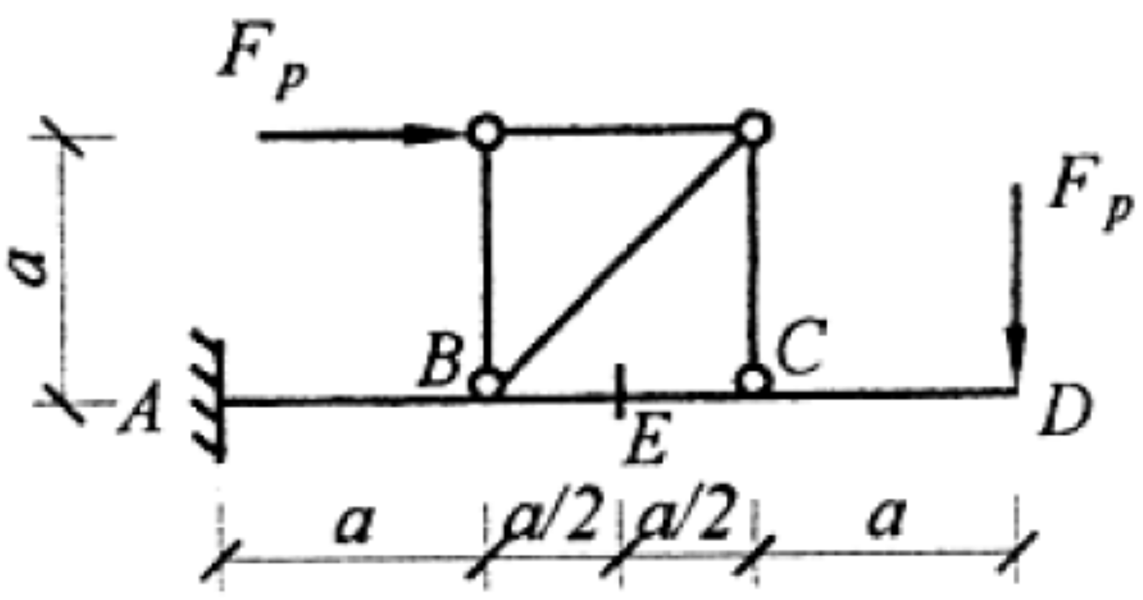


图 5-3-2

【答案】$2F_P$；$2F_Pa$；上侧受拉

【解析】先求上部桁架结构的各杆轴力，算得 C 处的竖向杆的轴力为 F_P（压力）；沿 C 处的竖向链杆和 E 截面处截开，取隔离体可算得 $F_{EQ}=2F_P$（使截面顺时针转动），$M_E=2F_Pa$（上侧受拉）。

3．图 5-3-3 示桁架中杆 *b* 的轴力 F_{Nb} ______。

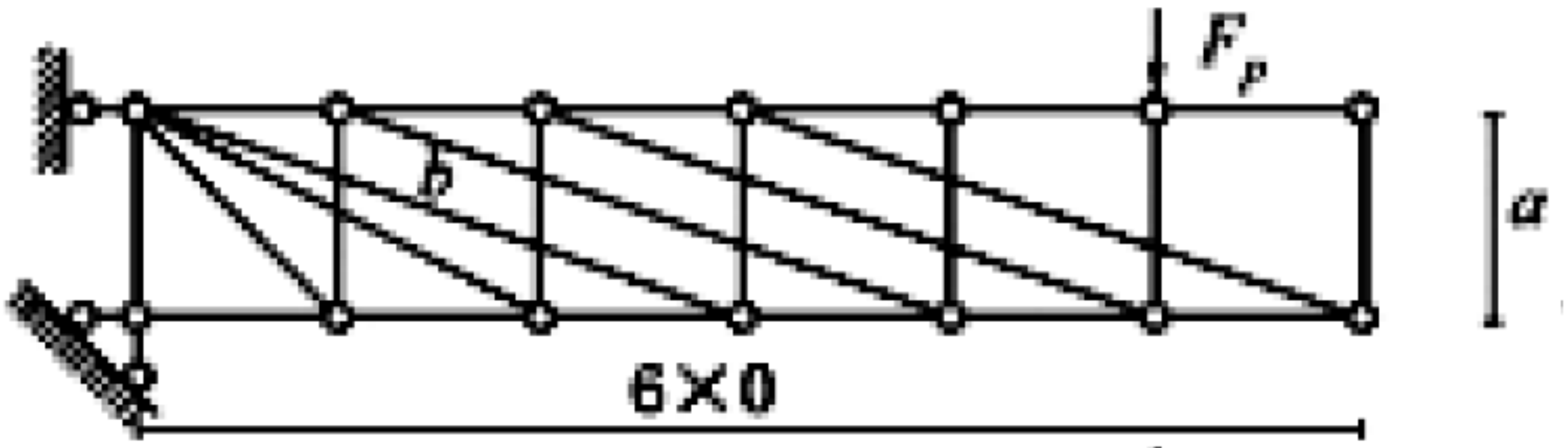


图 5-3-3

【答案】0

【解析】利用“L”型和“T”型原则，判断零杆，从左向右一次进行，可快速判断出 b 为零杆。

二、选择题

1．图 5-3-4 示结构杆 *BC* 的轴力N_{BC}是（　　）。[哈尔滨工业大学 2008 研]

A．*P*/2

B．－*P*

C．2*P*

D．*P*

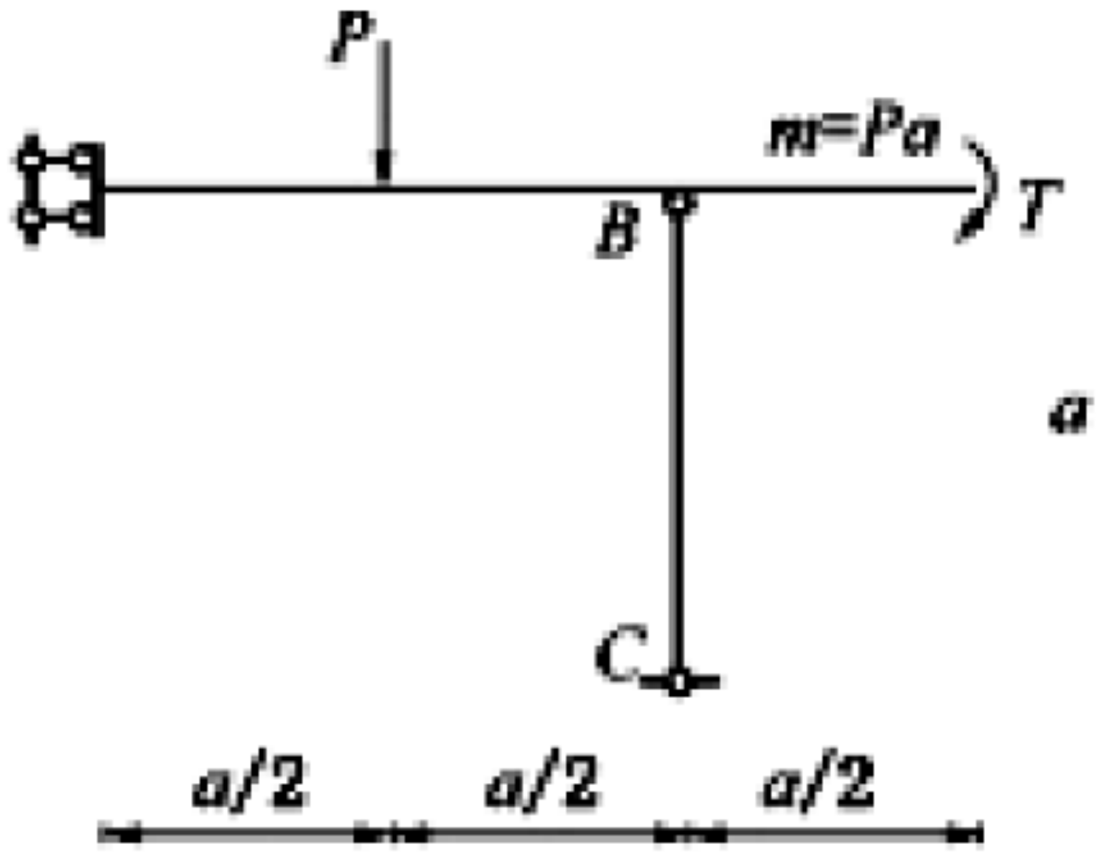


图 5-3-4

【答案】B

【解析】直接在 BC 杆处截开，根据竖向力的平衡，易知 N_{BC}=－*P*（压力）。

2．图 5-3-5 所示结构的零杆数目（不包括支座链杆）为（　　）。[浙江大学 2006 研]

A．3 根

B．4 根

C．5 根

D．6 根

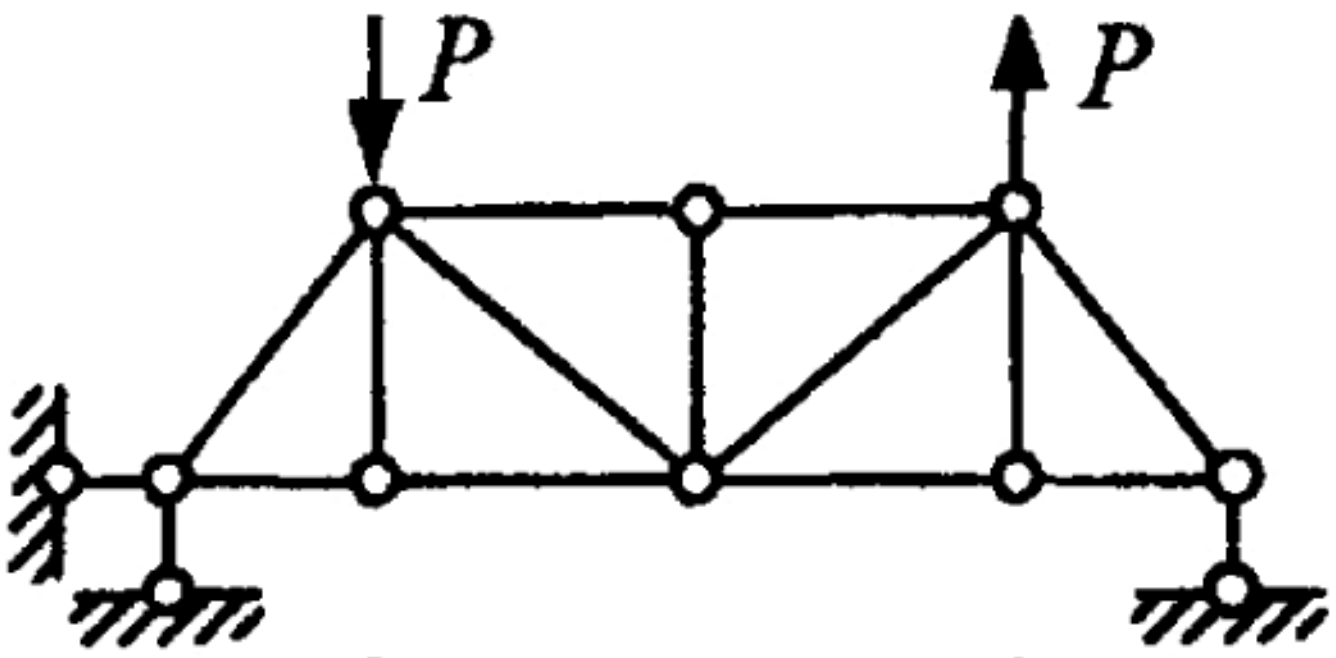


图 5-3-5

【答案】C

【解析】根据判断零杆的“T”型原则，可快速判断出中间的三根竖向杆均为零杆；另外由于该对称结构承受反对称荷载，故中间上部的两根水平链杆为零杆。综上，该结构一共有 5 根零杆。

3．图 5-3-6 所示结构 ABC 柱 B 截面的弯矩（右侧受拉为正）是（　　）。[西南交通大学 2007 研]

A．0

B．$4F_pd$

C．$8F_pd$

D．$-8F_pd$

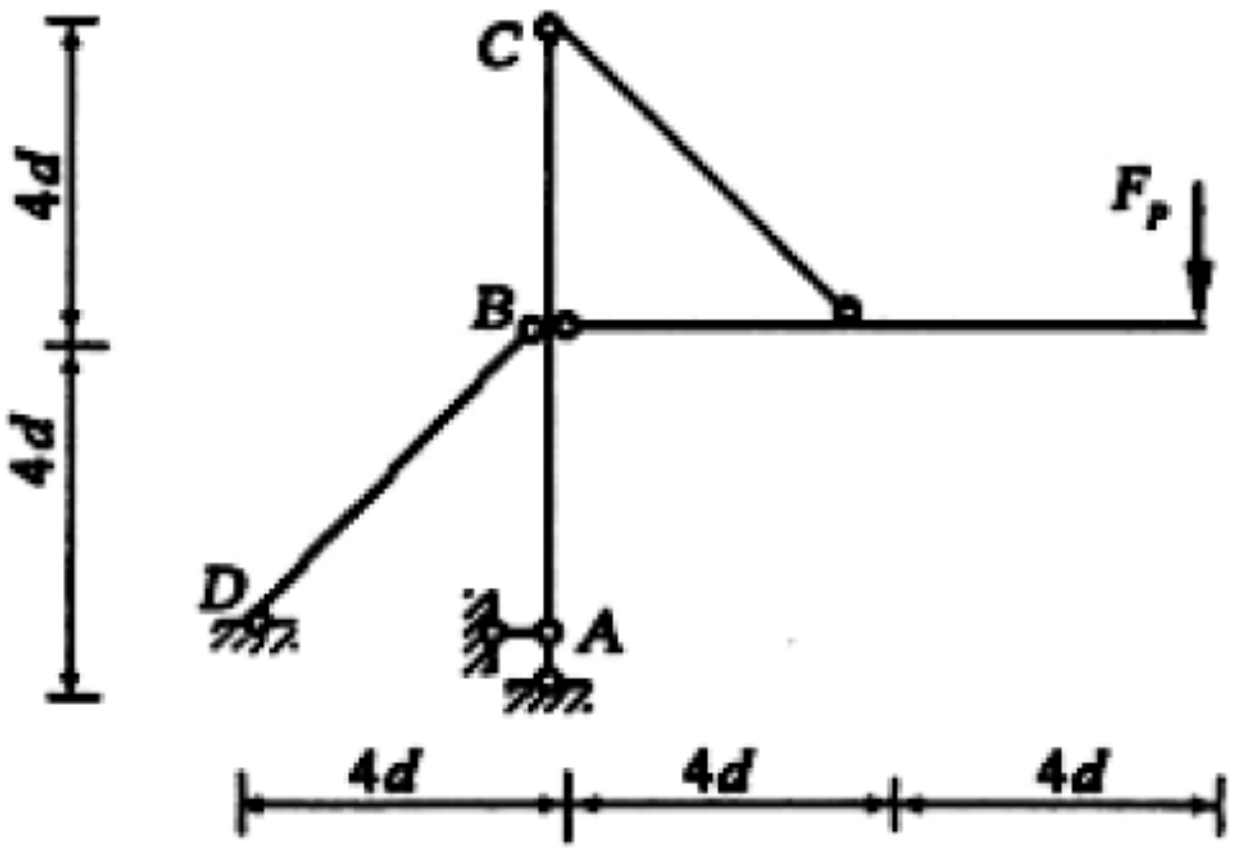


图 5-3-6

【答案】D

【解析】在 DE 杆处截开，研究整体，向 A 点取矩，$\sum M_A=0$，$F_{DBx}\cdot 4d-F_P\cdot 8d=0$，算得：$F_{DBx}=2F_P$（水平向右）；所以 A 支座处的约束反力为 $F_{AH}=2F_P$（水平向左）；可算得 $M_{BA}=-4d\cdot 2F_P=-8F_pd$（左侧受拉）。

三、判断题

1．图 5-3-7 示桁架结构杆 I 的轴力为零（　　）。[天津大学 2005 研]

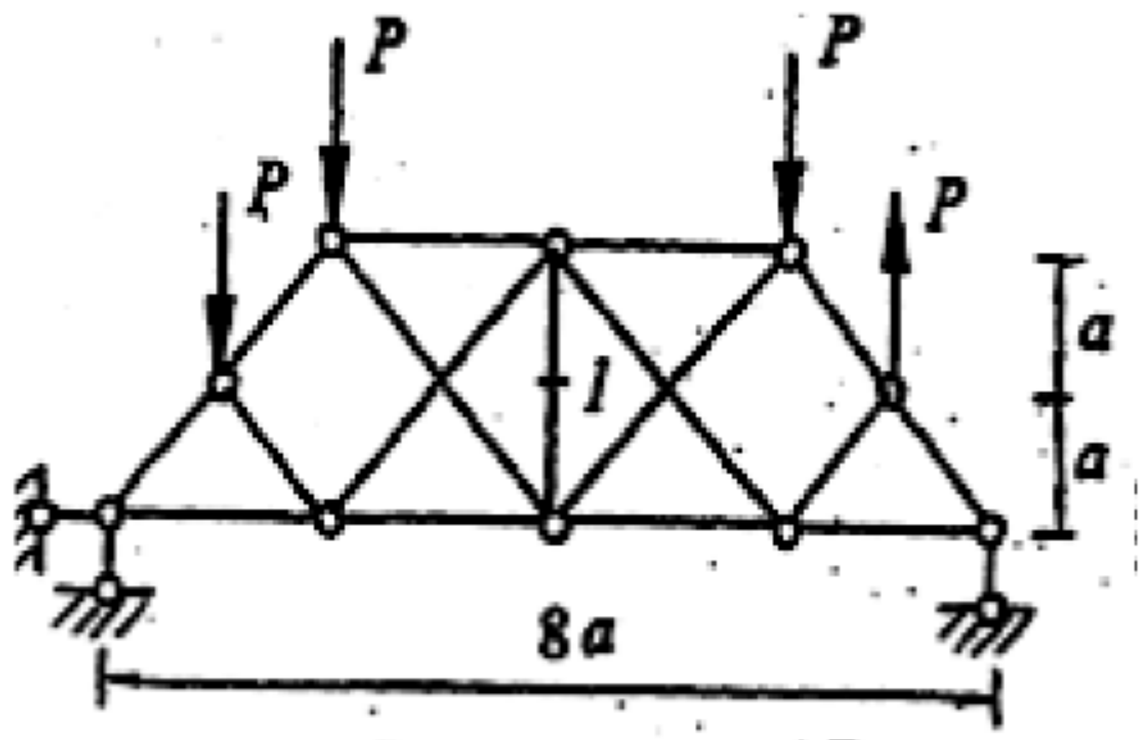


图 5-3-7

【答案】对

【解析】分成正对称和反对称两组力：在正对称的荷载作用下，从左侧根据“T”形杆判断零杆的规则可依次判断出斜杆均为零杆，故杆 I 轴力也为零；在反对称荷载作用下，显然中间杆 I 的轴力为零。故两组力下杆 I 的轴力叠加仍为零。

2．图 5-3-8 所示桁架中，上弦杆的轴力为 N=-P。（　　）[天津大学 2003 研]

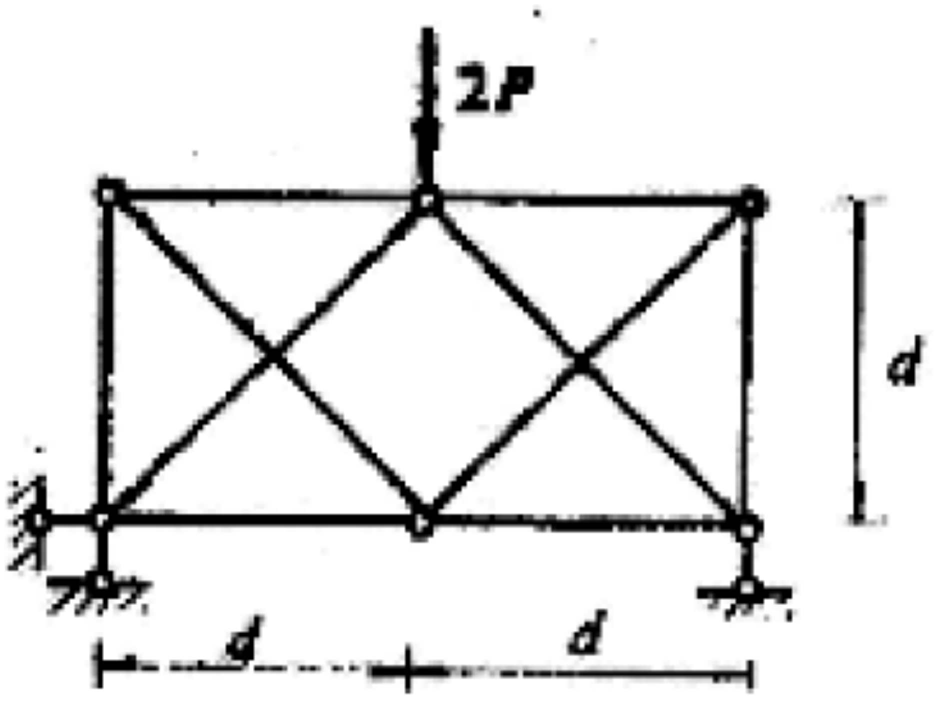


图 5-3-8

【答案】错

【解析】该桁架结构为对称结构，承受正对称的荷载，所以中间下部的两根斜杆均为零杆，根据零杆规则进一步判断出两根上弦杆均为零杆。

四、计算题

1．求图 5-3-9 所示桁架 a、b、c 三杆的内力值。[福州大学 2007 研]

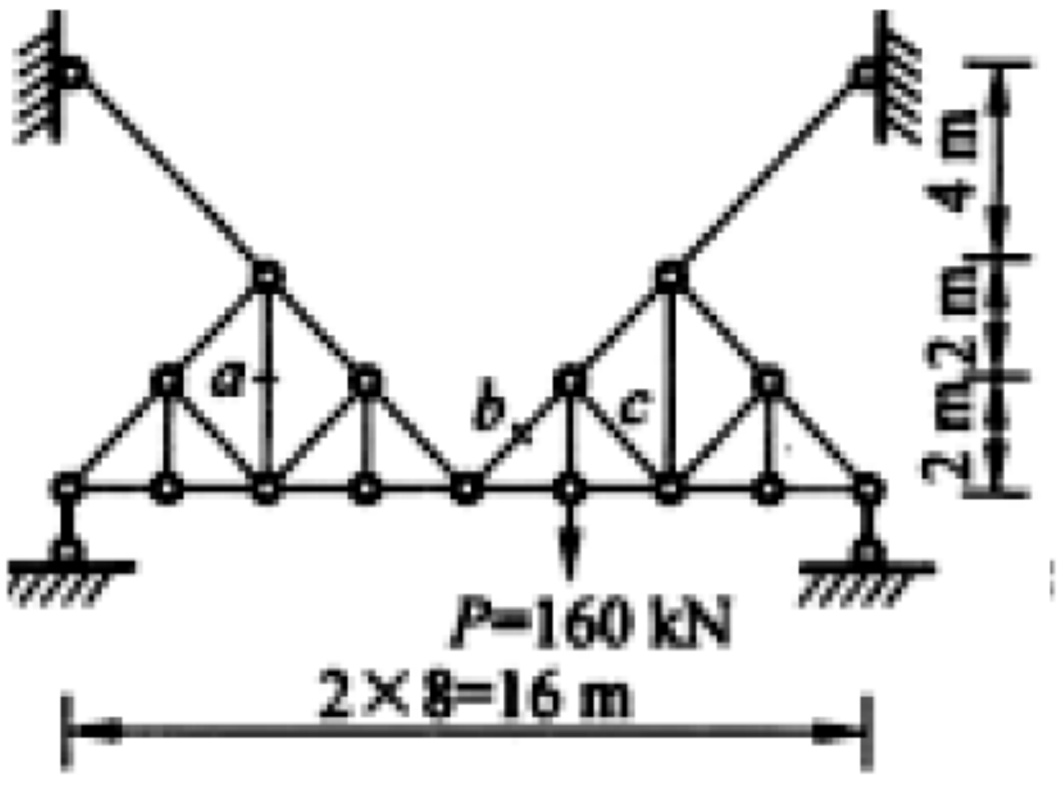


图 5-3-9

解：首先对上图所示的体系进行编号，如下图 5-3-10 所示。

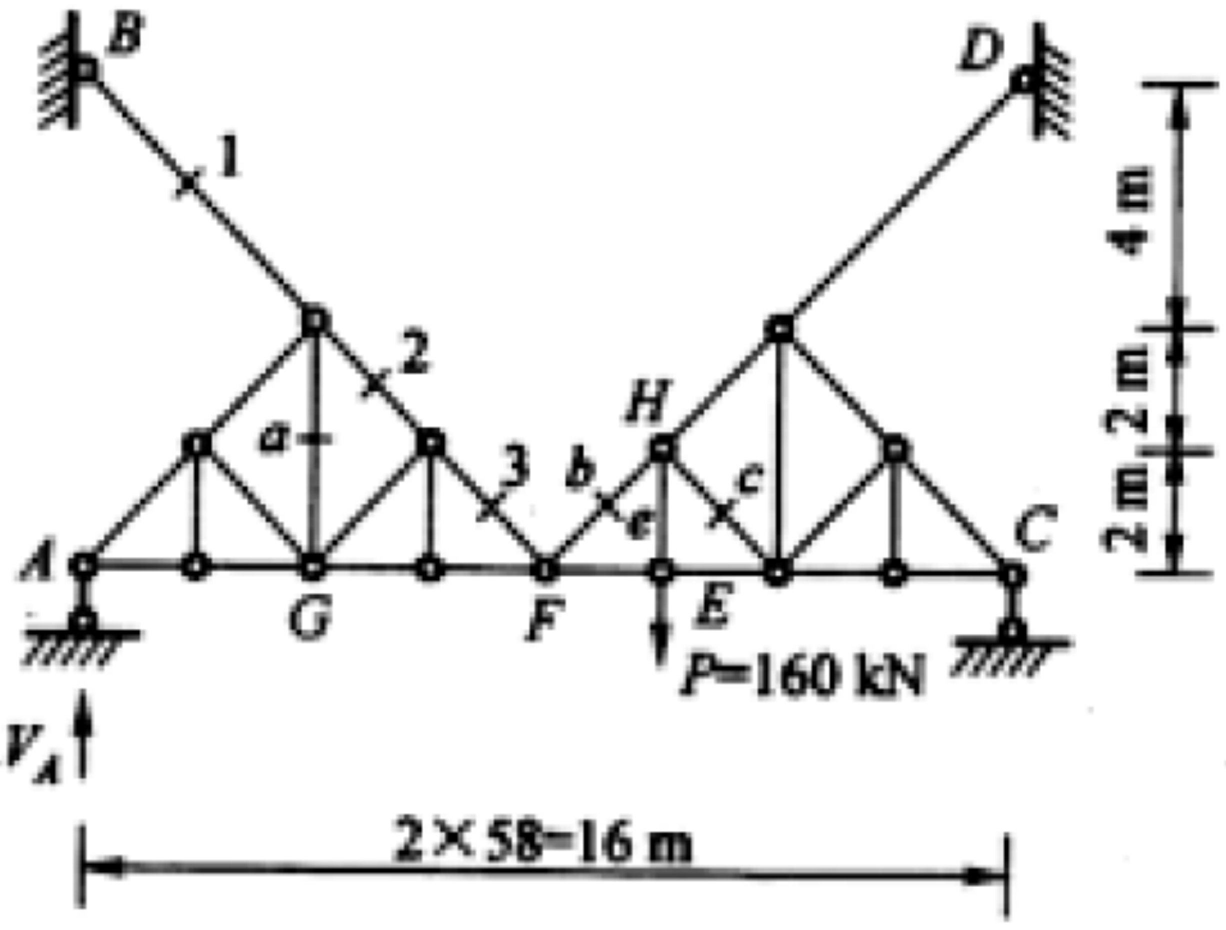


图 5-3-10

由图示可知，杆 1、2、3 均为二力杆，力的方向通过 F 点，将体系在 F 点处断开。对 F 点取矩，可得$V_A=0$。点 G 处为 T 型节点，可知$N_a=0$，由 K 型节点的特点可知

$$N_1=N_2=N_3$$

以整体为研究对象，并对 D 点取矩，由静力平衡条件可得

$$\Sigma M_D=0,8\sqrt{2}N_1-6\times 190=0$$

解得$N_1=60\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$。

F 点为 K 型节点，则由此刻有

$$N_b=-N_3=-60\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

又 E 为 X 型节点，则图中 *e* 杆的轴力为

$$N_e=160\ \mathrm{kN}$$

取 H 点为研究节点，则由静力平衡条件可得

$$N_c=-\frac{\sqrt{2}}{2}N_e=-80\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

2．试求图 5-3-11 所示桁架中 a、b 杆的内力值。[哈尔滨工业大学 2007 研]

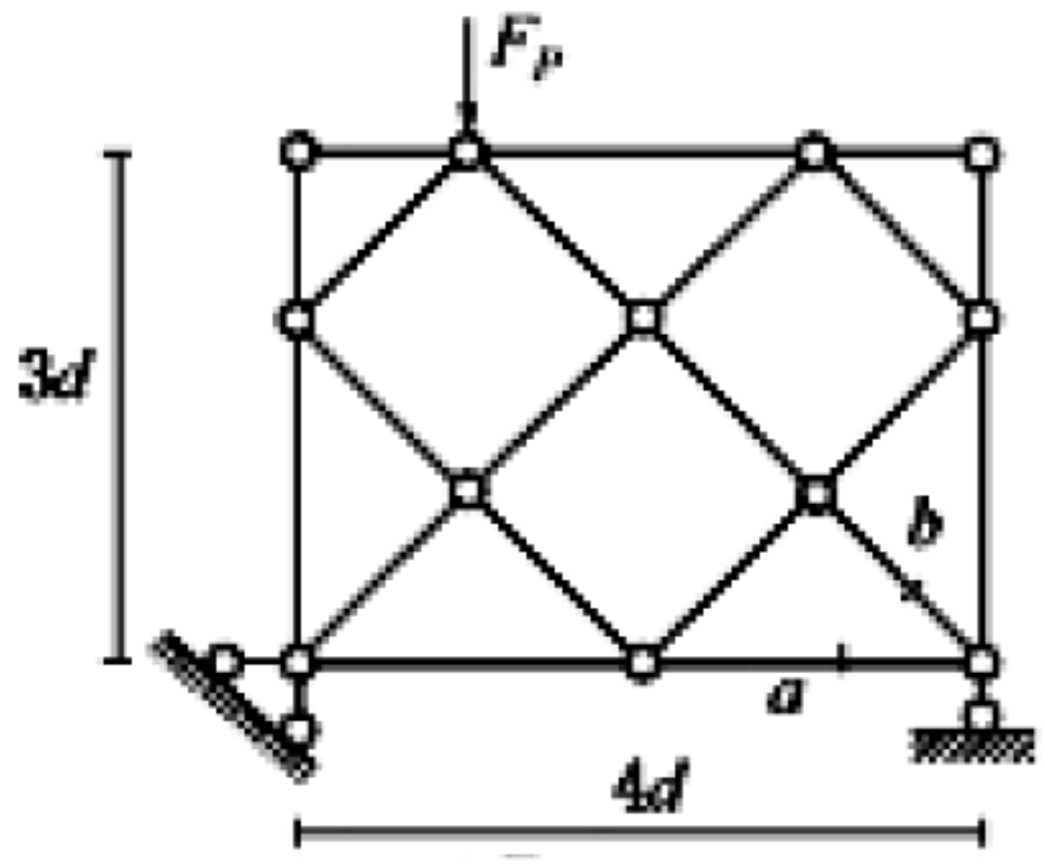


图 5-3-11

解：首先根据桁架的特点去掉零杆，如下图 5-3-12 所示。

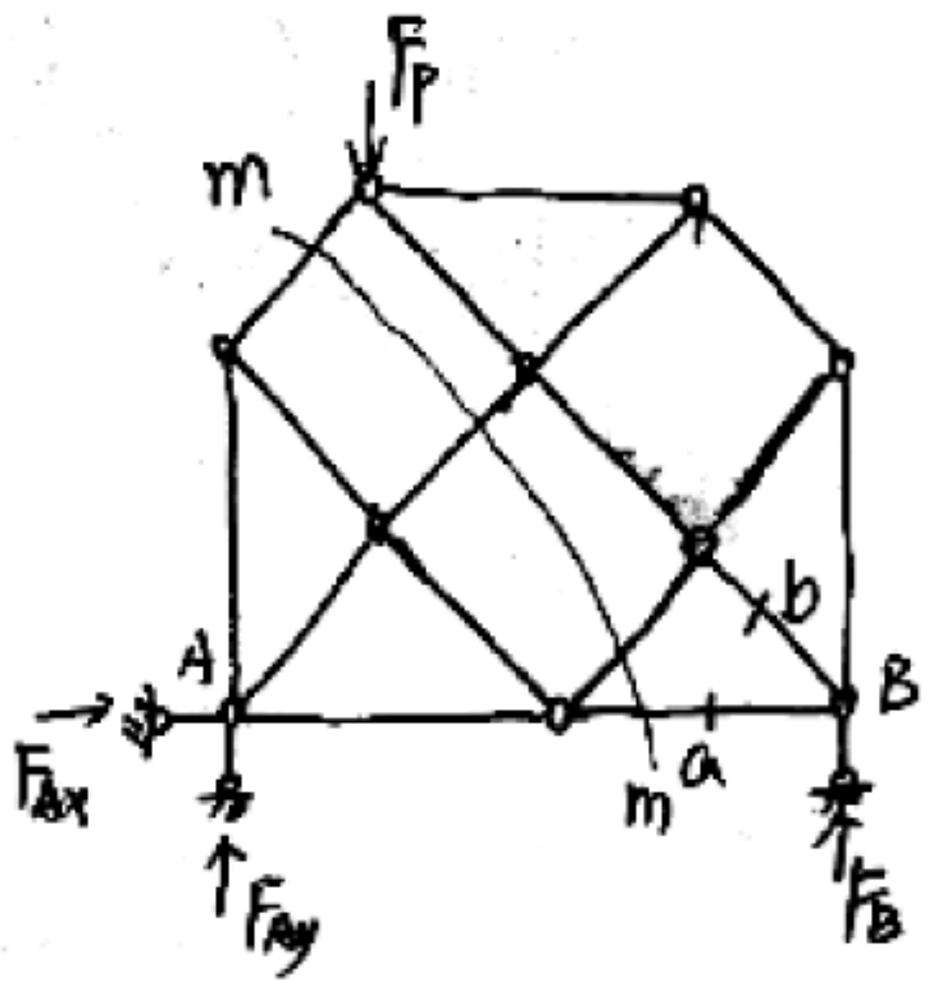


图 5-3-12

由静力平衡条件可求得支座反力为：$F_{Ax}=0$，$F_{Ay}=\frac{3}{4}F_P$，$F_B=\frac{1}{4}F_P$。作如图 5-3-12 所示的 m-m 截面，在平行杆的正交方向上投影，受力图如下图 5-3-13 所示。

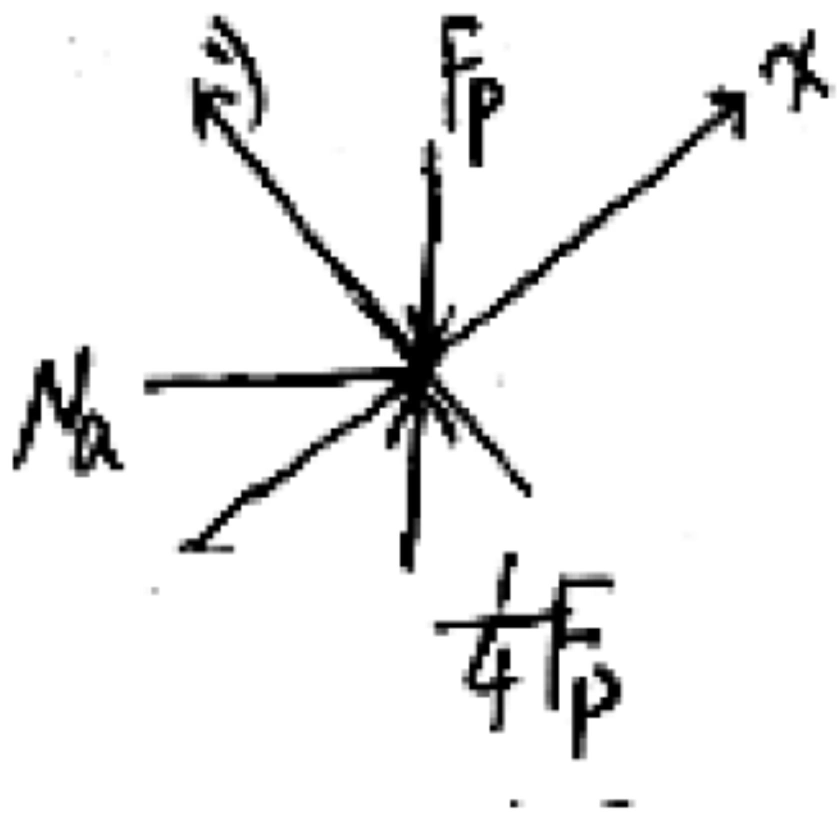


图 5-3-13

则有

$$-F_P\cos45^\circ+\frac{1}{4}F_P\cos45^\circ-N_a\cos45^\circ=0$$

解得 $N_a=-\frac{3}{4}F_P$（拉力）。

取 B 结点，受力图如下图 5-3-14 所示。

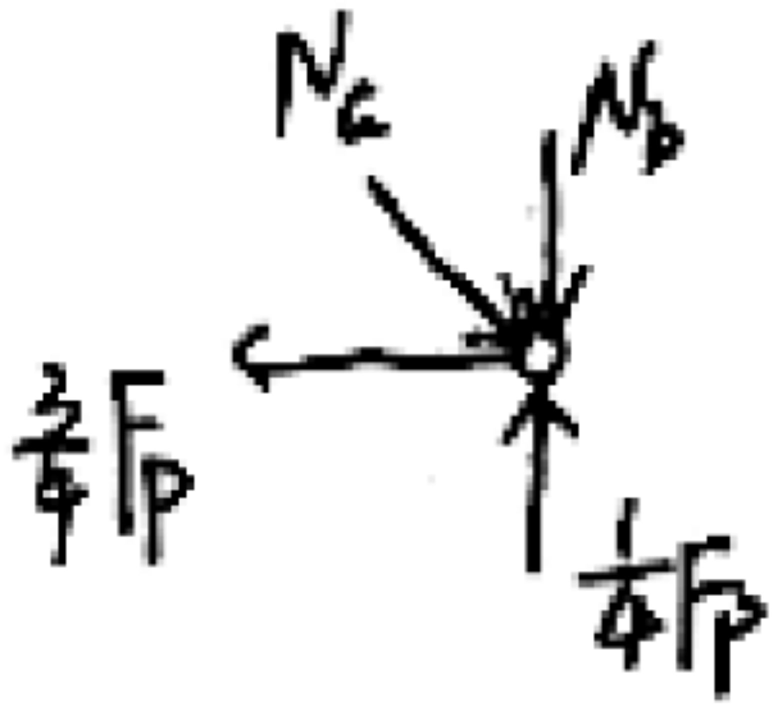


图 5-3-14

则有

$$\sum X = 0\text{，}\ -\frac{3}{4}F_P + N_b\cos 45^\circ = 0$$

解得 $N_b = \frac{3}{4}\sqrt{2}F_P$（压力）。

3．作图 5-3-15 所示结构的弯矩图，并求杆 1 和杆 2 的轴力。[浙江大学 2007 研]

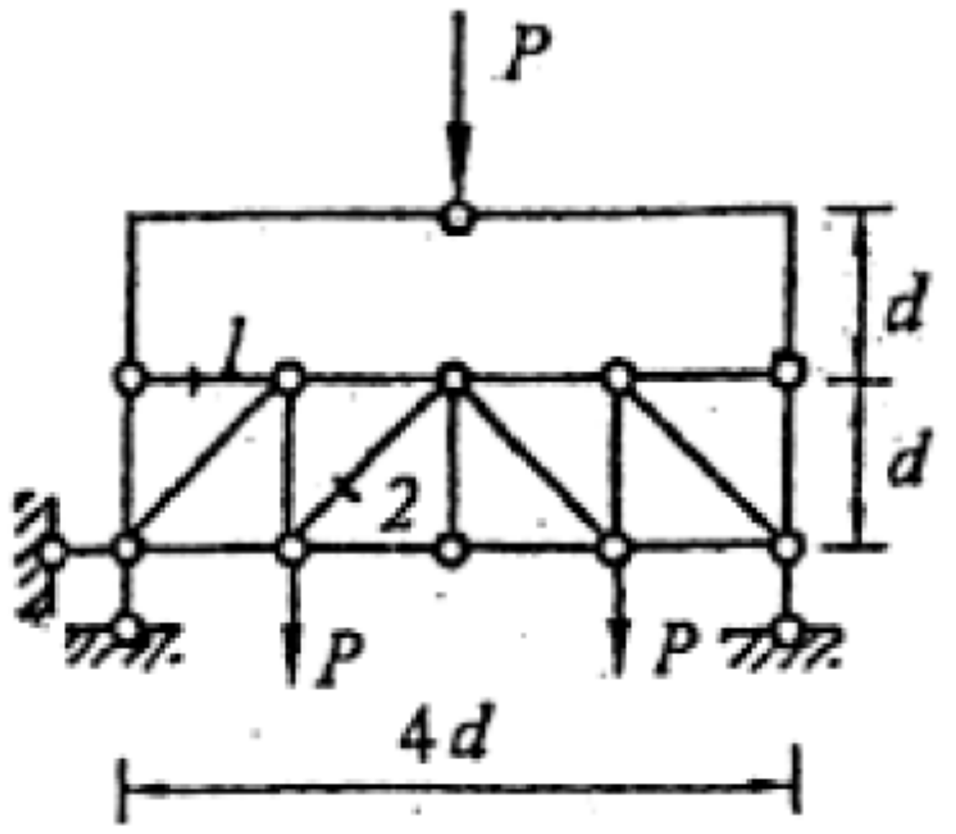


图 5-3-15

解：（1）取上部附属结构为隔离体，受力如下图 5-3-16 所示。

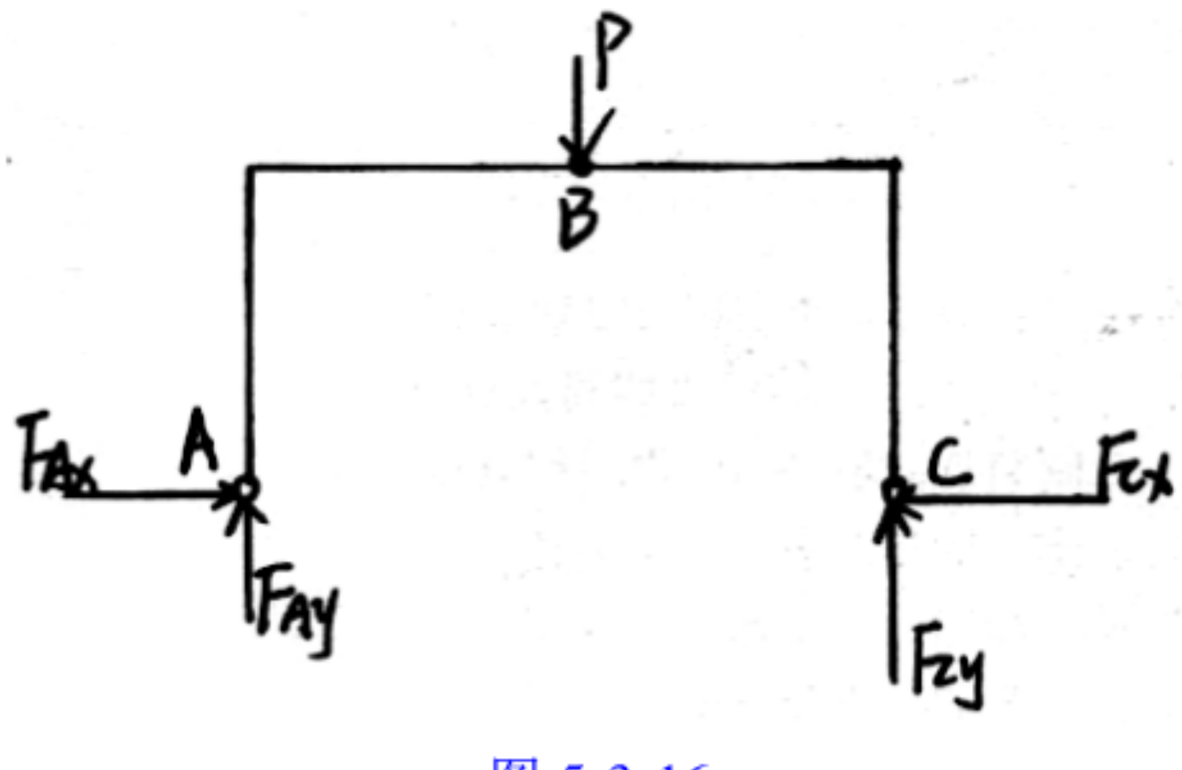


图 5-3-16

由静力平衡条件可得

$$F_{Ay} = F_{Cy} = \frac{P}{2}\text{，}\ F_{Ax} = F_{Cx} = P$$

则据此可绘制附属结构的弯矩图，基本结构是桁架，故没有弯矩，即体系弯矩图如下图 5-3-17 所示。

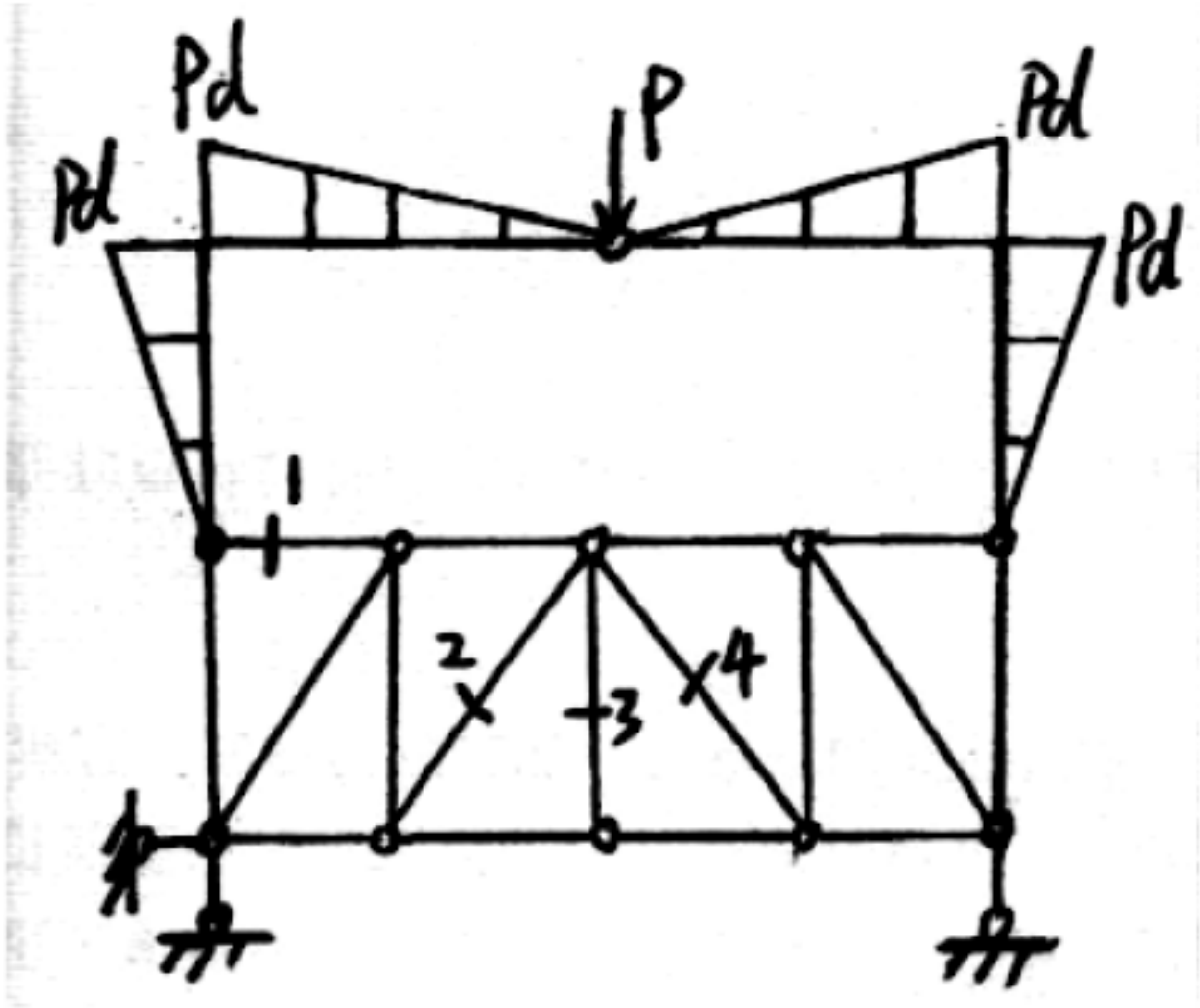


图 5-3-17

由此桁架的特点可知，图中 2、3、4 均是零杆，故 $N_2=0$。对于 1 杆，由结点法易求得 $N_1=P$（拉力）。

4．求图 5-3-18 所示桁架 1、2 杆件的轴力。[西南交通大学 2007 研]

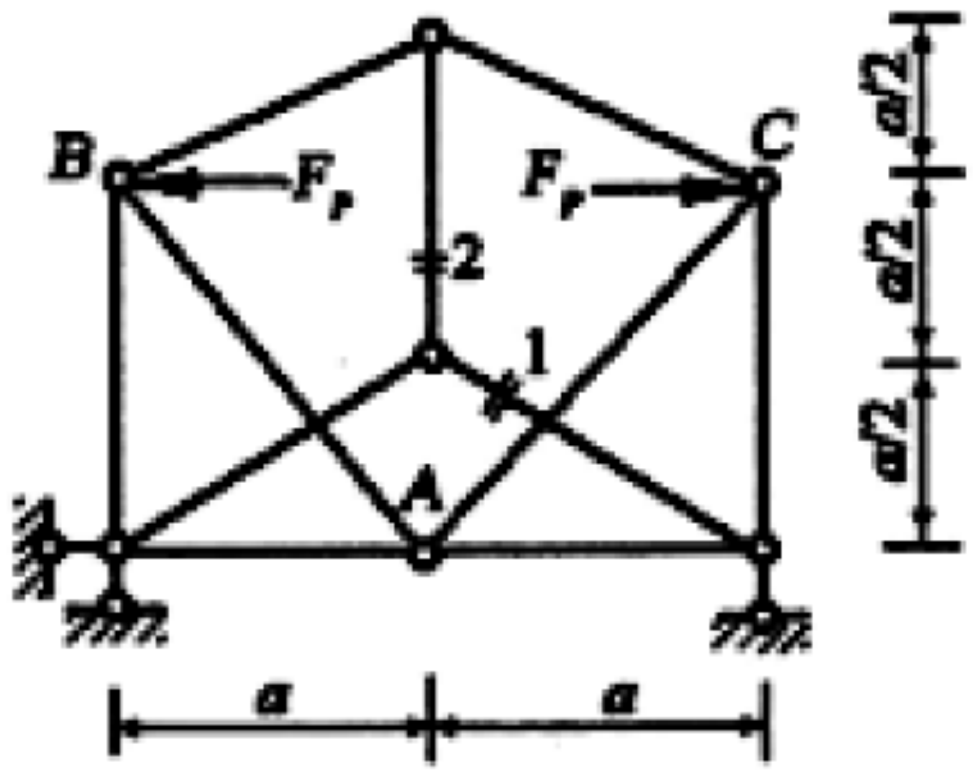


图 5-3-18

解：由题图所示结构可知，结构为对称结构。由对称性可知，系统中的杆 AB 和杆 AC 为零杆。简化后的图如下图 5-3-19 所示。

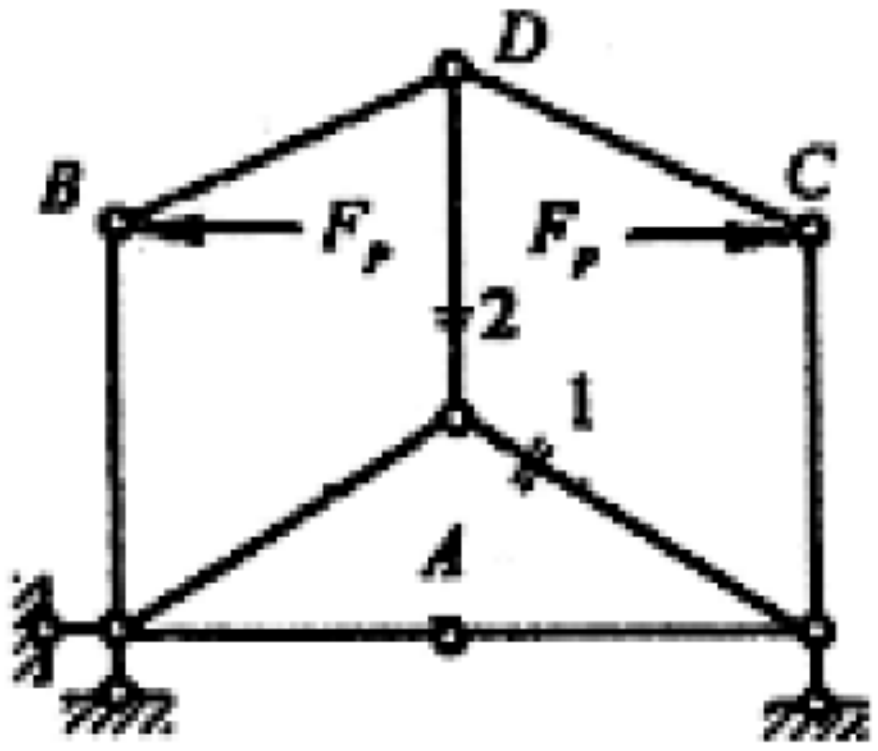


图 5－3－19

取节点分析，如下图 5-3-20 所示。

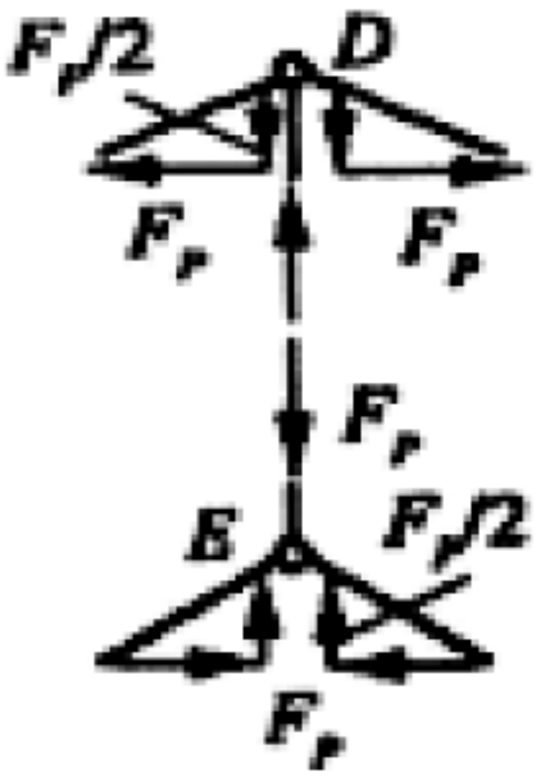


图 5-3-20

由静力平衡条件可得 $F_{N1}=-\sqrt{5}F_P/2$，$F_{N2}=-F_P$ 。

第 6 章　结构位移计算

6.1　复习笔记

【知识框架】

- 结构的位移计算
  - 结构位移的基本概念
    - 定义
      - 位移
      - 变形
    - 位移的分类：线位移、角位移、相对线位移、相对角位移
    - 位移产生因素
    - 计算结构位移的目的
  - 虚功原理
    - 质点系的虚位移原理
    - 刚体体系的虚功原理
    - 变形体体系的虚功原理
    - 力状态与位移状态
    - 虚功原理的应用
  - 位移计算的一般公式 单位荷载法
    - 单位荷载法的定义
    - 求解步骤
      - 建立位移状态
      - 建立力状态
      - 计算虚功
      - 虚功原理求位移
    - 虚拟状态的设置
  - 静定结构在荷载下的位移计算
    - 位移计算对象
    - 位移计算
      - Δ_{KP} 下标含义
      - 实际微段变形计算公式
      - 无支座移动时位移公式
        - 平面杆系结构
        - 梁和刚架
        - 桁架
        - 组合结构
  - 图乘法
    - 前提条件
    - 计算公式
    - 几种简单图形的面积和形心
    - 图乘法的几种解题技巧
  - 静定结构温度变化时的位移计算
    - 温度对静定结构的影响
    - 位移的计算
    - 典型结构的位移计算：梁和刚架、桁架
  - 静定结构支座移动时的位移计算
    - 支座移动对静定结构的影响
    - 计算公式
  - 线弹性结构的互等定理
    - 功的互等定理
    - 位移的互等定理
    - 反力的互等定理
    - 反力位移互等定理
  - 空间刚架的位移计算公式
    - 空间刚架杆件横截面上的内力分量
    - 空间刚架在荷载作用下的位移计算公式

【重点难点归纳】

一、结构位移的基本概念

1．定义

（1）位移

位移是指结构各截面位置的移动或转动。

（2）变形

变形是指结构（或其一部分）形状的改变

2．位移的分类

（1）线位移

①水平位移；

②竖直位移。

（2）角位移
（3）相对线位移
（4）相对角位移

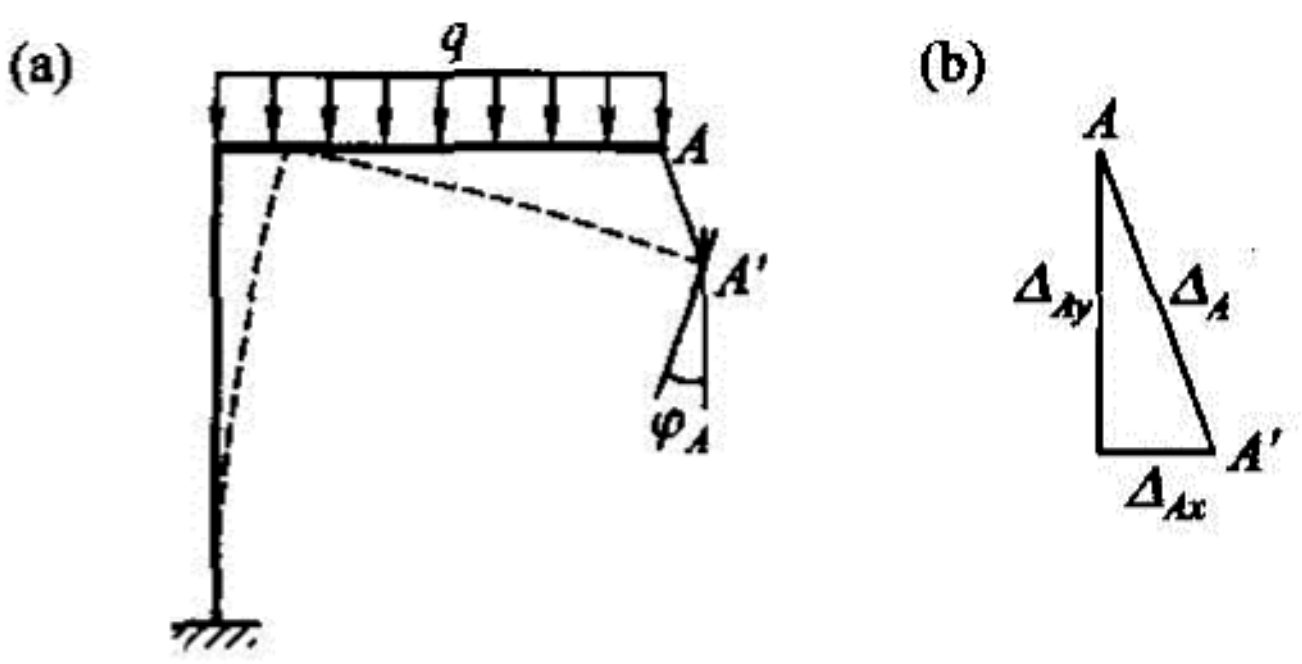


图 6-1-1

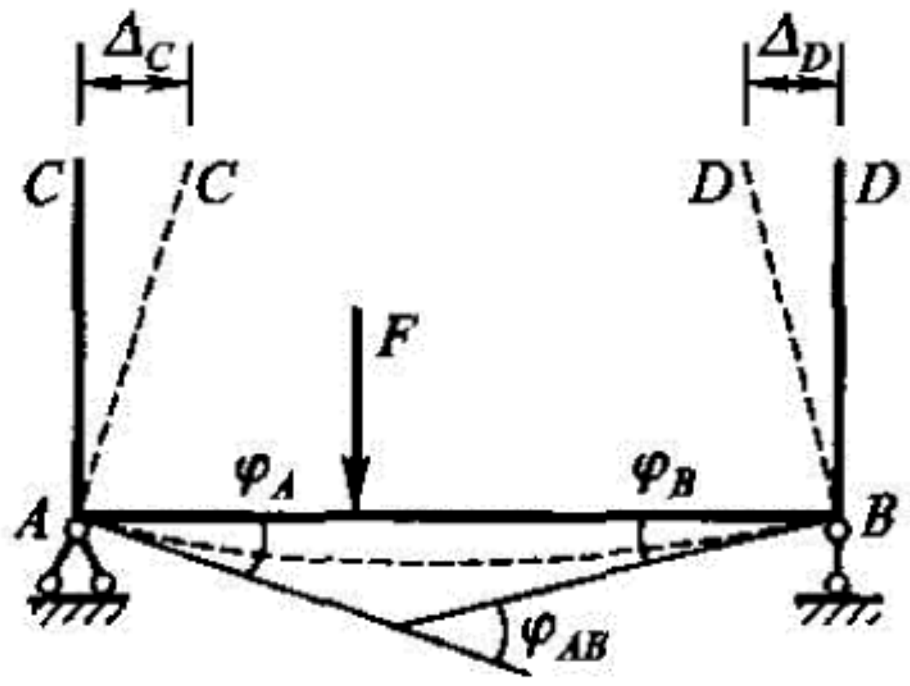


图 6-1-2

3．位移产生因素

荷载、温度改变、支座移动、材料收缩和制造误差等。

4．计算结构位移的目的

（1）校核结构的刚度

结构在荷载作用下如果变形太大，也就是没有足够的刚度，则即使不破坏也是不能正常使用的。

（2）在结构的施工过程中，也常常需要知道结构的位移

例如图 6-1-3 所示进行悬臂梁拼接时，必须先行计算 f_A 的数值，以便采取相应的措施，确保施工安全和拼装就位。

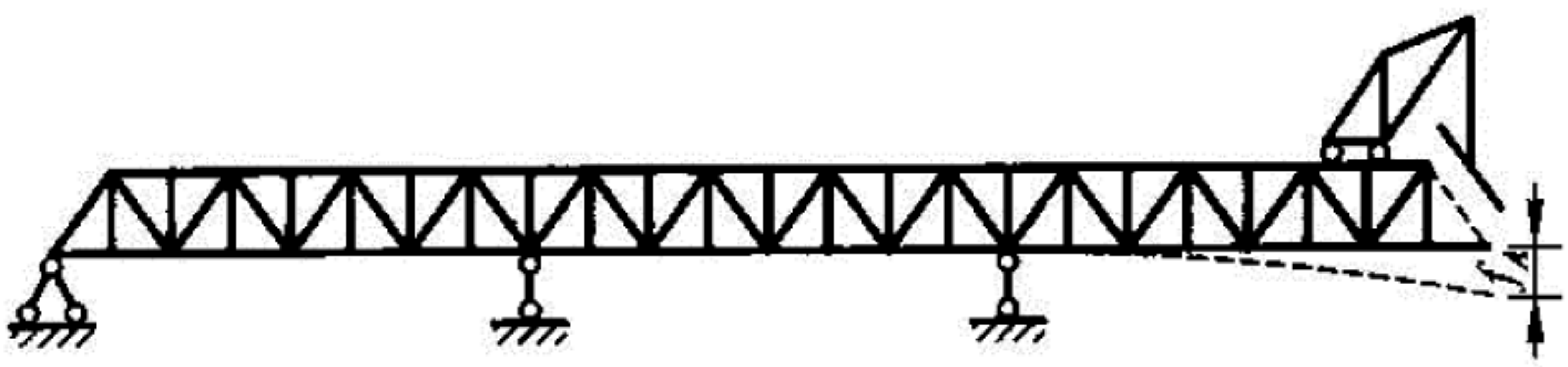


图 6-1-3

（3）为分析超静定结构打下基础

因为超静定结构的内力单凭静力平衡条件不能全部确定，还必须考虑变形条件，而建立变形条件时就必须计算结构的位移。

（4）在结构的动力计算和稳定计算中，也需要计算结构的位移。

二、虚功原理

1．质点系的虚位移原理

（1）原理描述

具有理想约束的质点系在某一位置处于平衡的必要和充分的条件是，对于任何虚位移，作用于质点系的主动力所作的虚功总和为零。

质点系的虚位移原理也称为虚功原理。

（2）虚位移

①定义

虚位移是指为约束条件所允许的任意微小位移。

②相关说明

a．虚位移是协调的位移：虚位移必须是微小的，并为支承约束条件和变形连续条件所允许。

b．虚位移可以是与力状态无关的其他任何原因（如另一组力系、温度变化、支座移动等）引起的，甚至是假想的。

（3）理想约束

理想约束是指其约束反力在虚位移上所作的功恒等于零的约束，例如光滑铰结、刚性链杆等。

2．刚体体系的虚功原理

（1）原理描述

刚体体系处于平衡的必要和充分条件的是，对于任何虚位移，所有外力所作虚功总和为零。

（2）原理说明

①外力通常包括荷载（主动力）和约束力。

②对于任何约束，当去掉该约束而以相应的反力代替其对体系的作用时，其反力便可当作荷载（主动力）看待。

3．变形体系的虚功原理

（1）原理描述

变形体系处于平衡的必要和充分条件是，对于任何虚位移，外力所作虚功总和等于各微段上的内力在其变形上所作的虚功总和，或者简单地说，外力虚功等于变形虚功。

$$W=\sum\int F_N du+\sum\int M d\varphi+\sum\int F_S\gamma ds$$

上式等号左边为外力所做虚功，等号右边为变形虚功。

（2）原理说明

虚功原理应用于变形体系时，外力虚功总和则不等于零。

4．力状态与位移状态

（1）力状态

力状态是指结构在力系作用下处于平衡的状态，如图 6-1-4（a）。

（2）位移状态

位移状态是指结构由于别的原因而产生的虚位移状态，如图 6-1-4（b）。

5．虚功原理应用

（1）给定力状态，另虚设一个位移状态，利用虚功方程来求解力状态中的未知力，这时的虚功原理可称为虚位移原理。

（2）给定位移状态，另虚设一个力状态，利用虚功方程来求解位移状态中的位移，这时的虚功原理可称为虚力原理。

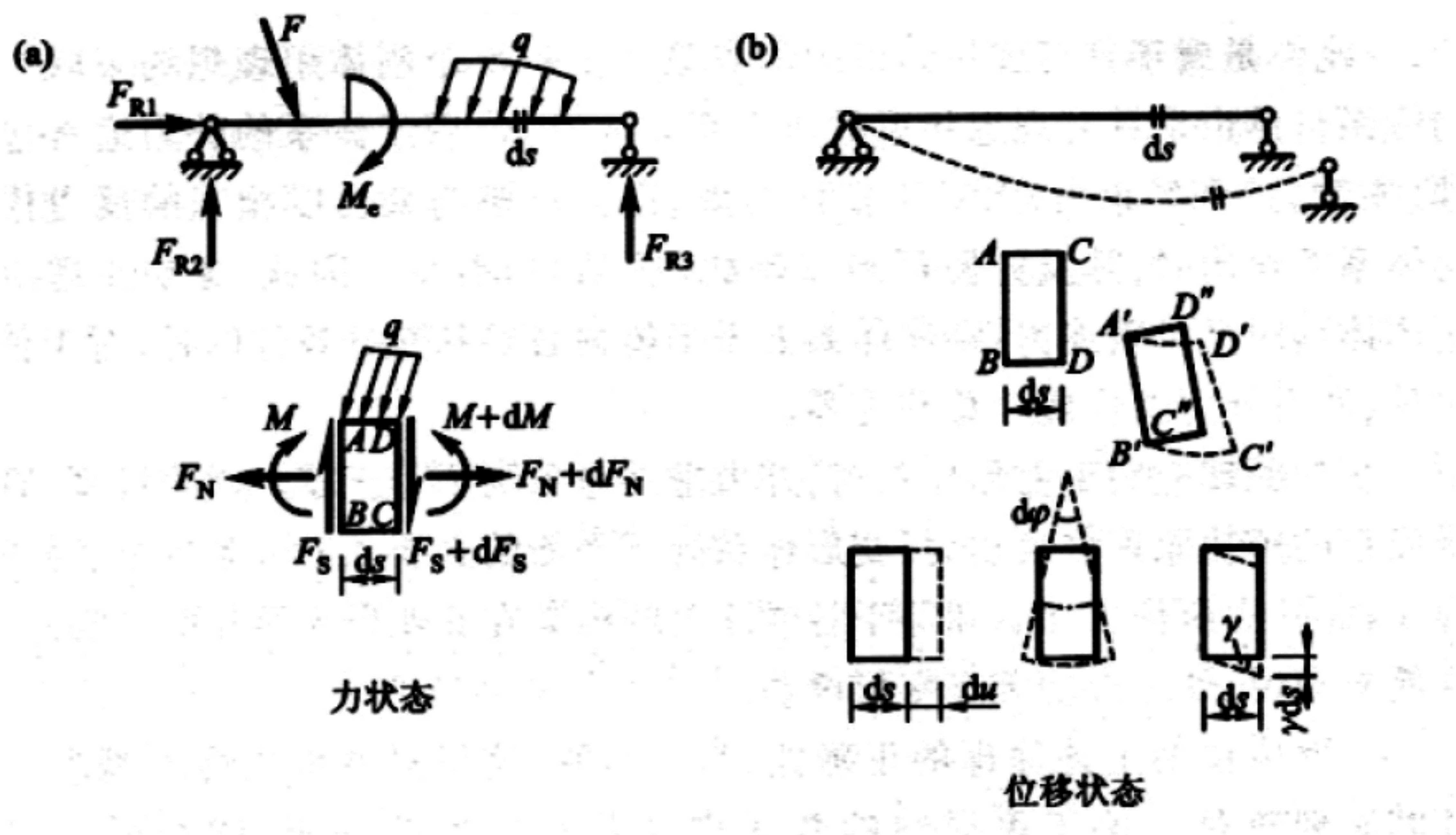


图 6-1-4

三、位移计算的一般公式单位荷载法

1．单位载荷法定义

单位荷载法是指虚拟状态中只在所求位移地点沿所求位移方向加一个单位荷载，以使荷载虚功恰好等于所求位移，进而求出位移的方法。

2．求解步骤

图 6-1-5（a）所示平面杆系结构由于荷载、温度变化及支座移动等因素引起了如虚线所示变形，现在要求任一指定点 K 沿任一指定方向 k-k 上的位移 Δ_K。

（1）建立位移状态

要求的位移是由给定的荷载、温度变化及支座移动等因素引起的，故应以此作为结构的位移状态，又称实际状态。

（2）建立力状态

在 K 点沿 k-k 方向加一个大小为 1 的单位荷载 F_K，其箭头指向则可任意假设，如图 6-1-5（b）所示，以此作为结构的力状态。这个力状态是虚设的，又称虚拟状态。

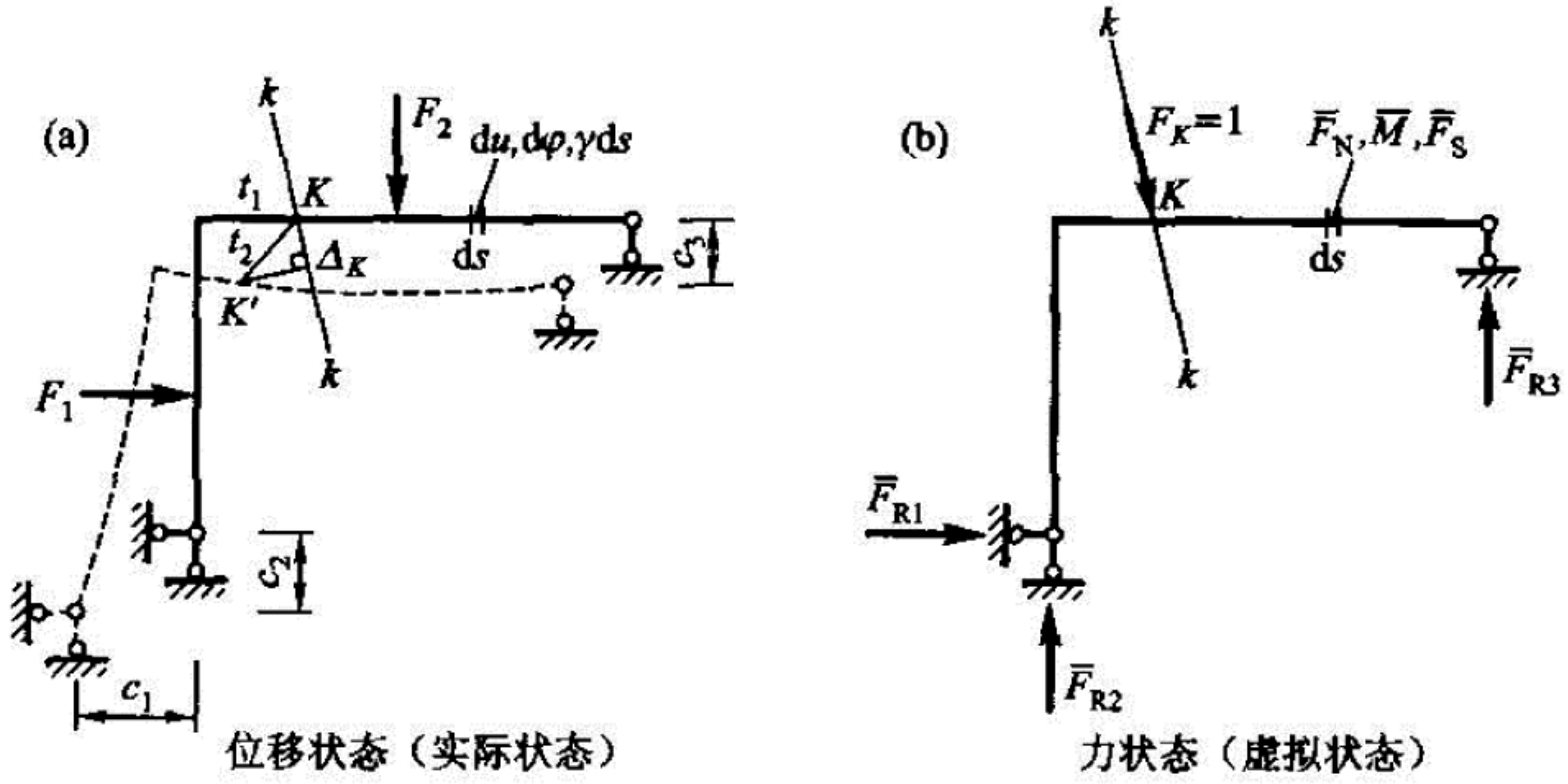


图 6-1-5

（3）计算虚功

①外力虚功

$$W = F_K\Delta_K + \overline{F}_{R1}c_1 + \overline{F}_{R2}c_2 + \overline{F}_{R3}c_3 = 1 \cdot \Delta_K + \sum \overline{F}_R c$$

式中，$\overline{F}_{R1}$、$\overline{F}_{R2}$、$\overline{F}_{R3}$ 为在虚拟状态中由单位荷载 $F_K=1$ 引起的支座反力；c_1、c_2、c_3 为实际状态中相应的支座位移。

②变形虚功

变形虚功为

$$W_v = \sum \int \overline{F}_N du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F}_S \gamma ds$$

式中，$\overline{F}_N$、$\overline{M}$、$\overline{F}_S$ 为虚拟状态中由单位荷载 $F_K=1$ 作用而引起的某微段上的内力； du、dφ、γds 为实际状态中微段相应的变形。

（4）虚功原理求位移

由虚功原理 $W = W_v$ 有

$$1 \cdot \Delta_K + \sum \overline{F}_R c = \sum \int \overline{F}_N du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F}_S \gamma ds$$

可得

$$\Delta_K = -\sum \overline{F}_R c + \sum \int \overline{F}_N du + \sum \int \overline{M} d\varphi + \sum \int \overline{F}_S \gamma ds$$

a．若计算结果 Δ_K 为正，所求位移 Δ_K 的实际指向与所假设的单位荷载 $F_K=1$ 的指向相同；

b．若计算结果 Δ_K 为负，所求位移 Δ_K 的实际指向与所假设的单位荷载 $F_K=1$ 的指向相反。

3．虚拟状态的设置

（1）求某点沿某方向的线位移

在该点沿所求位移方向加一个单位集中力，如图 6-1-6（a）所示。荷载所作的虚功为 $1\cdot\Delta_A=\Delta_A$，其大小等于所要求的线位移。

（2）求某截面的角位移

在该截面处加一个单位力偶，如图 6-1-6（b）所示。荷载所作的虚功为 $1\cdot\varphi_A=\varphi_A$，其大小等于所要求的角位移。

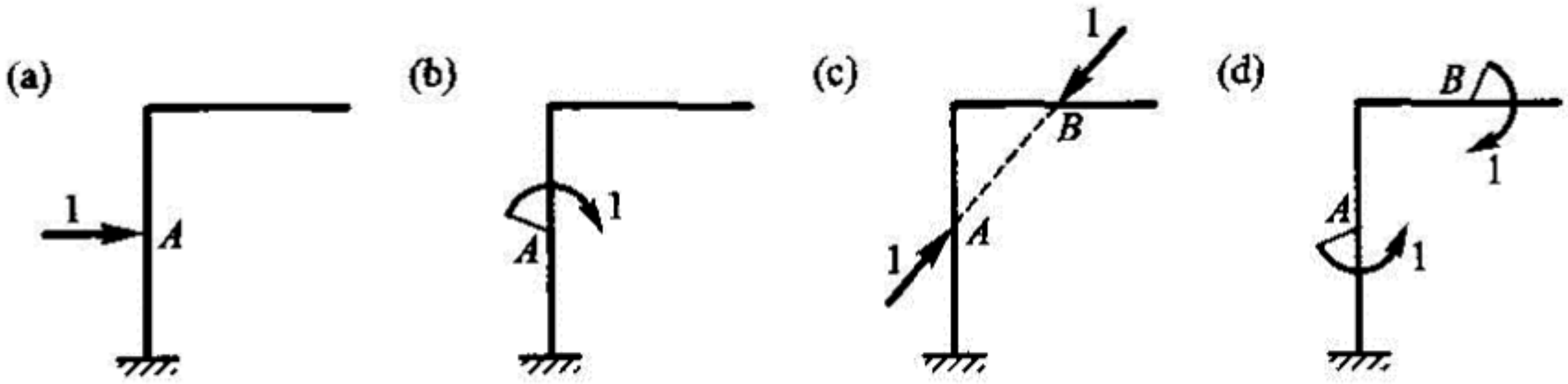


图 6-1-6

（3）求两点沿其连线方向上的相对线位移

在两点沿其连线方向上加一对指向相反的单位力，如图 6-1-6（c）所示。

设在实际状态中 A 点沿 AB 方向的位移为 Δ_A，B 点沿 BA 方向的位移为 Δ_B，则两点在其连线方向上的相对线位移为

$$\Delta_{AB}=\Delta_A+\Delta_B$$

荷载所作的虚功为

$$1\cdot\Delta_A+1\cdot\Delta_B=1\cdot(\Delta_A+\Delta_B)=\Delta_{AB}$$

可见荷载虚功等于所求相对位移。

（4）求两截面的相对角位移

在两截面处加一对方向相反的单位力偶，如图 6-1-6（d）所示。

（5）求桁架结构某杆角位移

①虚拟状态的设置

在求桁架某杆的角位移时，由于桁架只承受轴力，故应将单位力偶换为等效的结点集中荷载，即在该杆两端加一对方向与杆件垂直、大小等于杆长倒数而指向相反的集中力，如图 6-1-7（a）所示。

②桁架杆件的角位移

在位移微小的情况下，桁架杆件的角位移等于其两端在垂直于杆轴方向上的相对线位移除以杆长（图 6-1-7（b））

$$\varphi_{AB}=\frac{\Delta_A+\Delta_B}{d}$$

③虚功原理求角位移

$$\frac{1}{d}\cdot\Delta_A+\frac{1}{d}\cdot\Delta_B=\frac{\Delta_A+\Delta_B}{d}=\varphi_{AB}$$

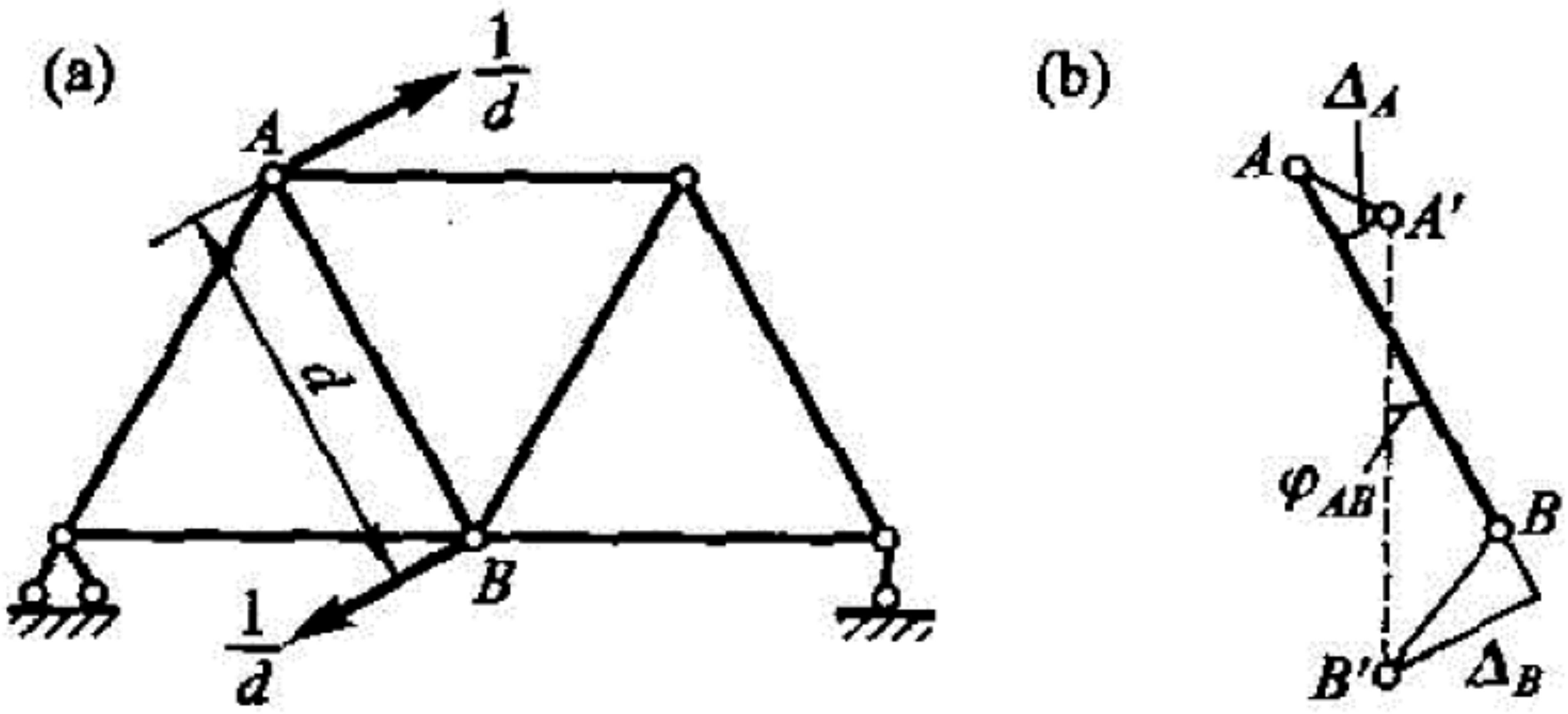


图 6-1-7

四、静定结构在荷载作用下的位移计算

1．位移计算对象

仅限于线弹性结构，即结构的位移与荷载是成正比的，因而计算位移时荷载的影响可以叠加，而且当荷载全部撤除后位移也完全消失，应力与应变的关系符合胡克定律。

2．位移计算

（1）Δ_{KP} 下标含义

①第一个下标 K 表示该位移的地点和方向，即 K 点沿指定方向；

②第二个下标 P 表示引起该位移的原因，即是由于广义荷载引起的。

（2）实际微段变形计算公式

若实际状态中微段上的内力为 M_P、F_{NP}、F_{SP}，实际微段变形为 $d\varphi_P$、du_P、$\gamma_P ds$ 。

①由 M_P 引起的微段的弯曲变形

$$d\varphi_P = \frac{M_P ds}{EI}$$

式中，E 为材料的弹性模量；I 为杆件截面二次矩，又称惯性矩。

②由 F_{NP} 引起的微段的轴向变形

$$du_P = \frac{F_{NP} ds}{EA}$$

式中，E 为材料的弹性模量；A 为杆件截面的面积。

③由 F_{SP} 引起的微段的剪切变形

$$\gamma_P ds = \frac{kF_{SP} ds}{GA}$$

式中，G 为材料的切变模量；A 为杆件截面的面积；k 为切应力沿截面分布不均匀而引用的改正系数，其值与截面形状有关，对于矩形截面 $k=\frac{6}{5}$，圆形截面 $k=\frac{10}{9}$，薄壁圆环截面 k＝2，工字形截面 $k\approx\frac{A}{A'}$、A' 为腹板截面面积。

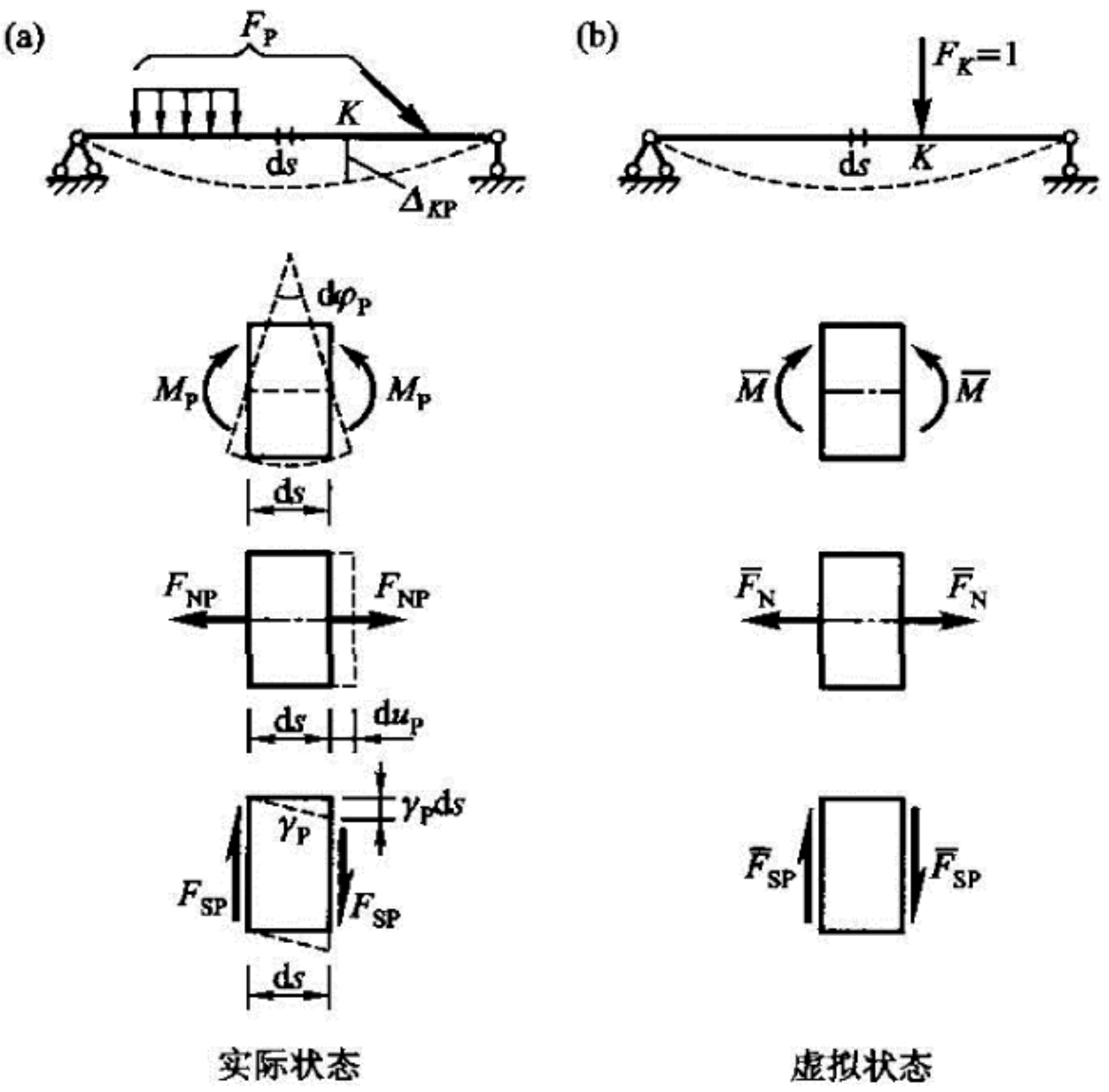


图 6-1-8

（3）没有支座移动时位移计算公式

①平面杆系结构

由于没有支座移动，故计算 Δ_K 的式子中 $-\sum \overline{F}_R c$ 一项为零，因而位移计算公式为

$$\Delta_{KP}=\sum\int \overline{M}d\varphi_P+\sum\int \overline{F}_N du_P+\sum\int \overline{F}_S\gamma_P ds$$

$$=\sum\int\frac{\overline{M}M_P ds}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP} ds}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_S F_{SP} ds}{GA}$$

式中，$\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_S$ 为虚拟状态中微段上的内力（图 6-1-8b）；$d\varphi_P$、du_P、$\gamma_P ds$ 为实际状态中微段的变形。

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P ds}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP} ds}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_S F_{SP} ds}{GA}$$

②梁和刚架

梁和刚架的位移主要是弯矩引起的，轴力和剪力的影响很小，一般可以略去，故

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P ds}{EI}$$

③桁架

在桁架中，因只有轴力作用，且同一杆件的轴力 $\overline{F}_N$、F_{NP} 及 EA 沿杆长 l 均为常数，故

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP} ds}{EA}=\sum\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}\int ds=\sum\frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

④组合结构

对于组合结构，则对其中的受弯杆件可只计弯矩一项的影响，对链杆则只有轴力影响，故其位移计算公式可

写为

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\overline{M} M_P \mathrm{d}s}{EI} + \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

五、图乘法

1．前提条件

（1）杆轴为直线。

（2）EI 为常数。

（3）$\overline{M}$和 M_P两个弯矩图中至少有一个是直线图形。

2．计算公式

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\overline{M} M_P \mathrm{d}s}{EI} = \sum \frac{A_\omega y_C}{EI}$$

式中，A_ω为 M_P图的面积； y_C为 M_P图的形心 C 处所对应的$\overline{M}$图的竖标。

应用图乘法时应注意下列各点：

（1）竖标 y_C只能取自直线图形。

（2）A_ω与 y_C若在杆件的同侧则乘积取正号，异侧则取负号。

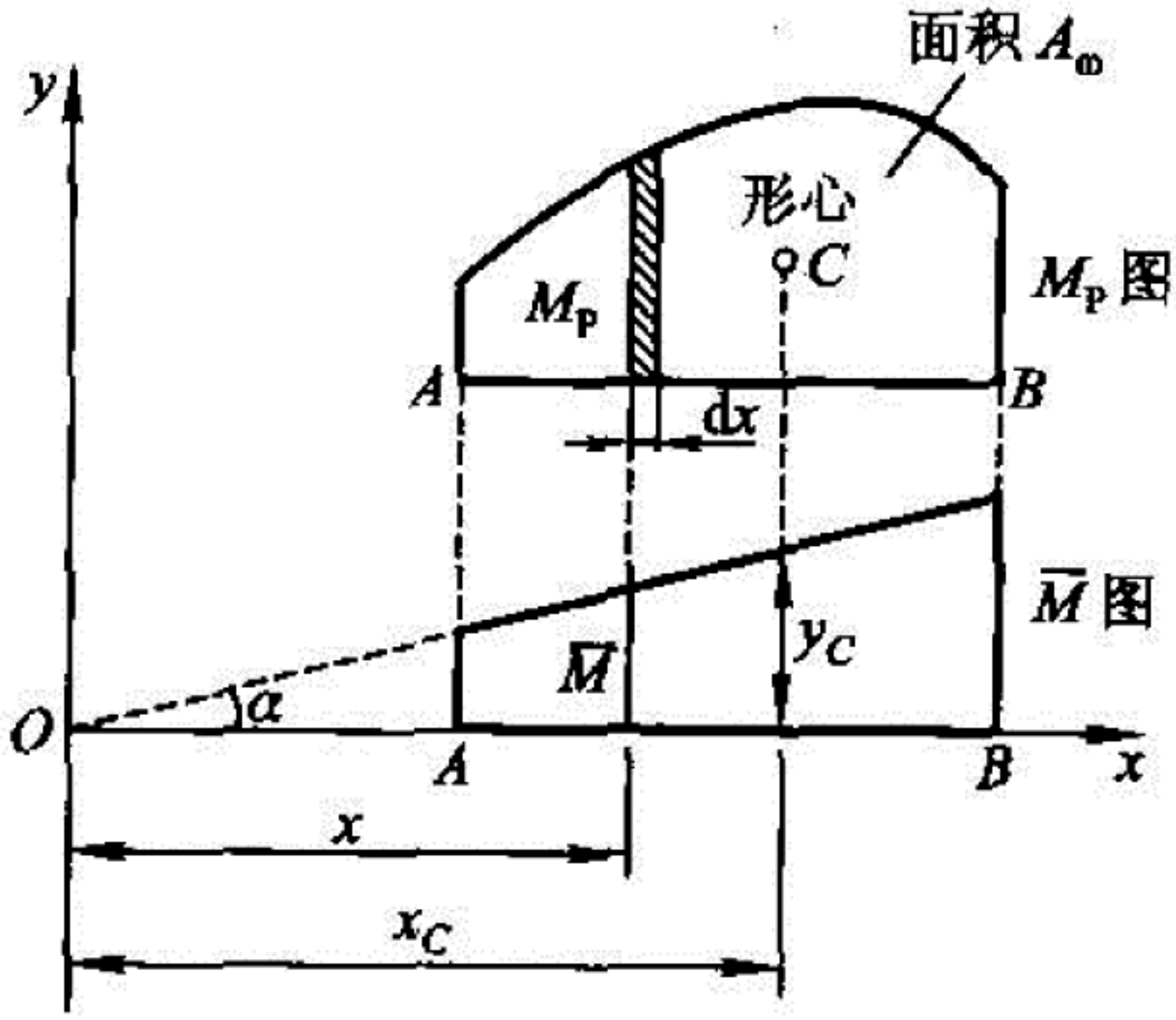


图 6-1-9

3．几种简单图形的面积及形心

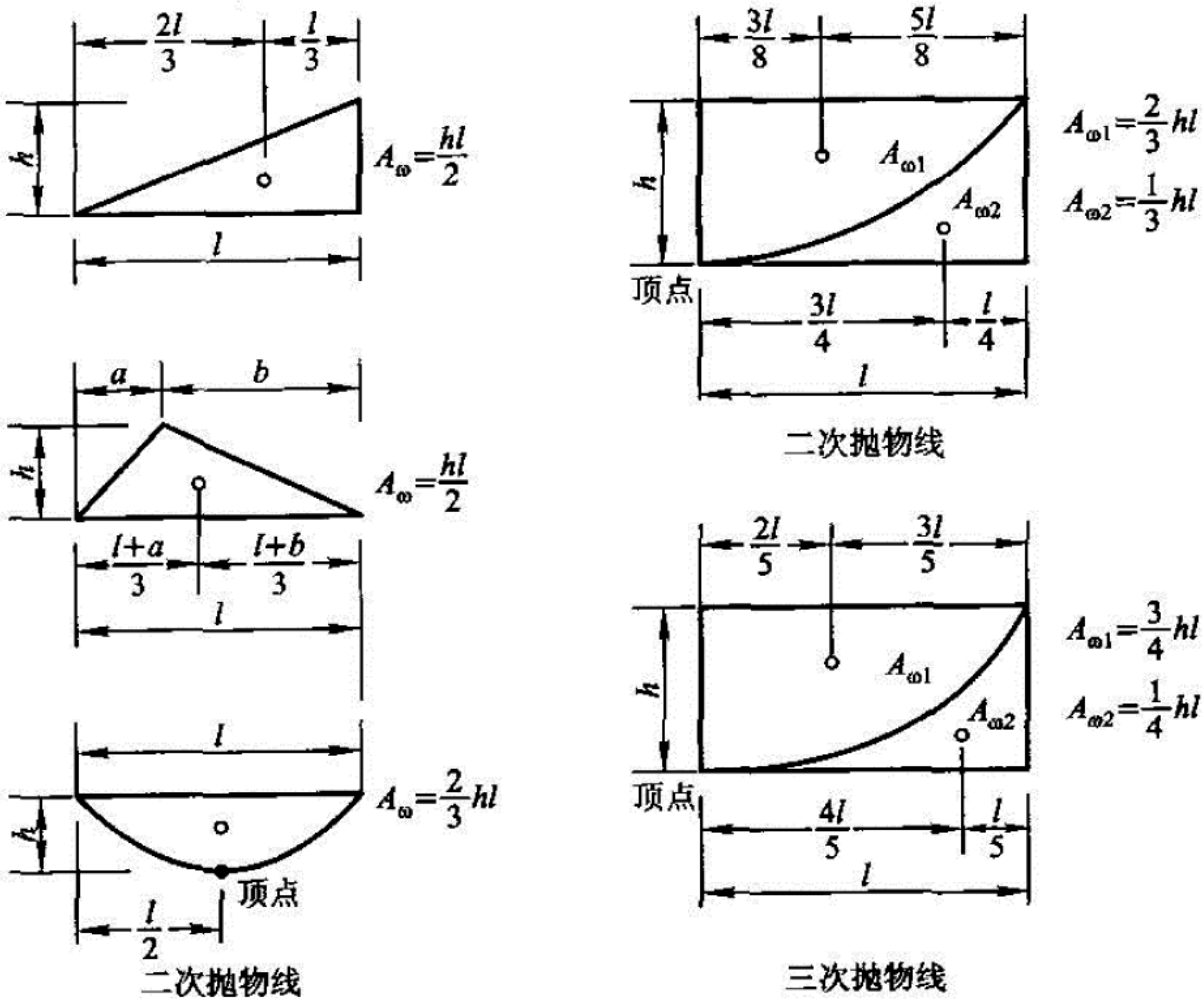


图 6-1-10

4．图乘法解题技巧

（1）当图形的面积或形心位置不便确定时，可以将它分解为几个简单的图形，将它们分别与另一图形相乘，然后把所得结果叠加。

（2）对于在均布荷载作用下的任何一段直杆（图 6-1-10（a）)，其弯矩图均可看成一个梯形与一个标准抛物线图形的叠加。

①所谓弯矩图的叠加，是指其竖标的叠加，而不是原图形状的剪贴拼合。

②叠加后的抛物线图形与原标准抛物线在形状上并不相同，但二者任一处对应的竖标 y 和微段长度 dx 仍相等，因而对应的每一窄条微分面积仍相等。由此可知，两个图形总的面积大小和形心位置仍然是相同的。

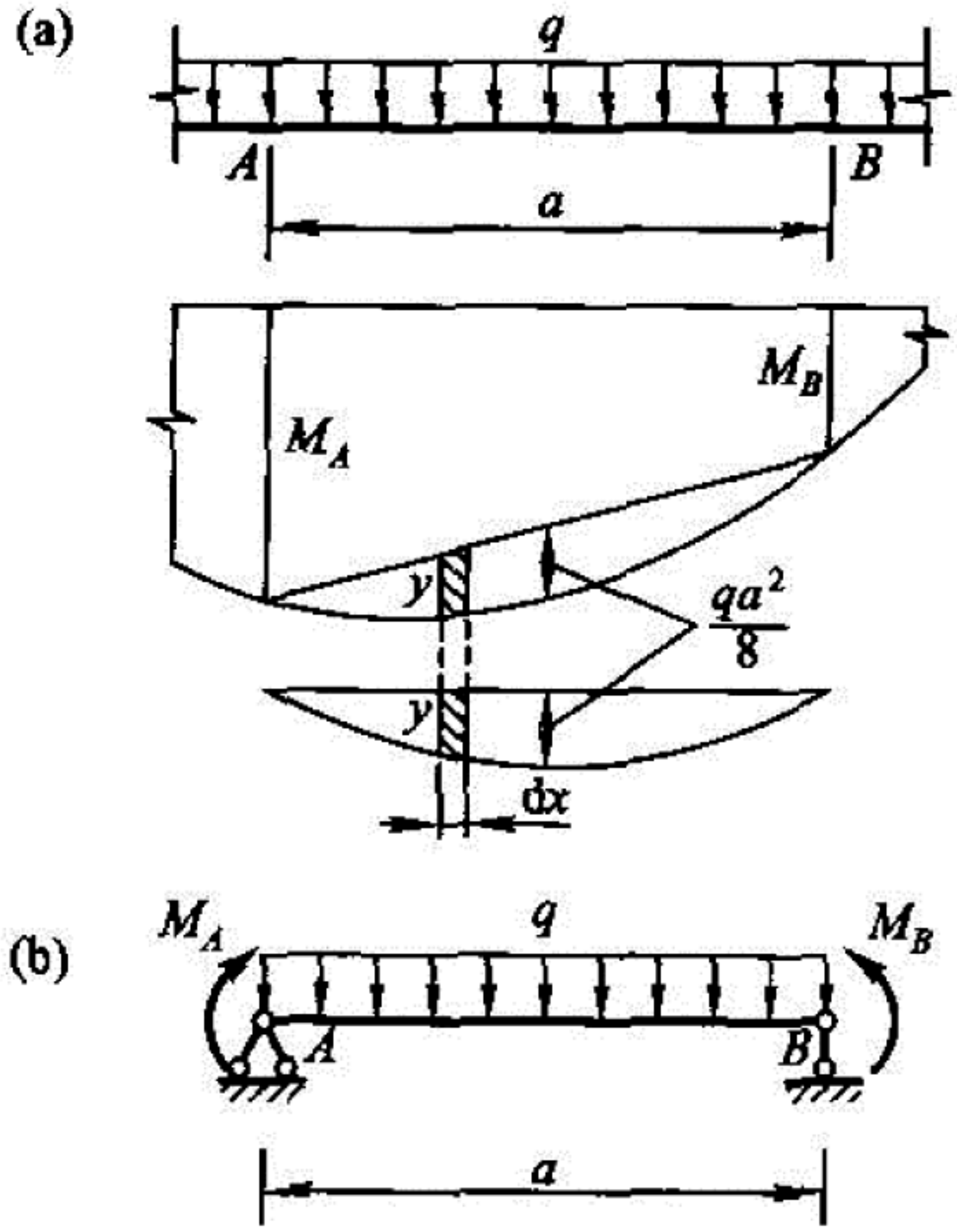


图 6-1-11

（3）在应用图乘法中，当 y 所属图形不是一段直线而是由若干段直线组成时，或当各杆段的截面不相等时，均应分段图乘，再进行叠加。

如对于图 6-1-12 应为

$$\Delta=\frac{1}{EI}(A_{\omega1}y_1+A_{\omega2}y_2+A_{\omega3}y_3)$$

对于图 6-1-13 应为

$$\Delta=\frac{A_{\omega1}y_1}{EI_1}+\frac{A_{\omega2}y_2}{EI_2}+\frac{A_{\omega3}y_3}{EI_3}$$

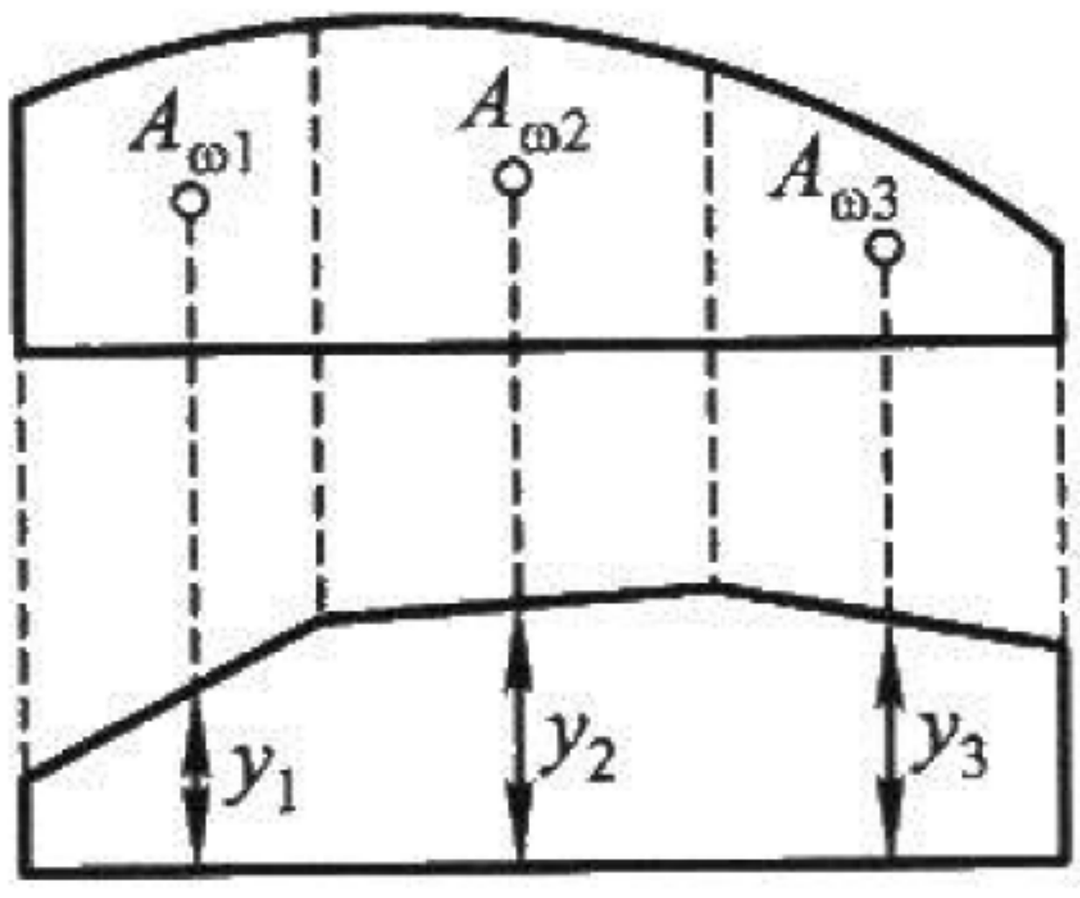


图 6-1-12

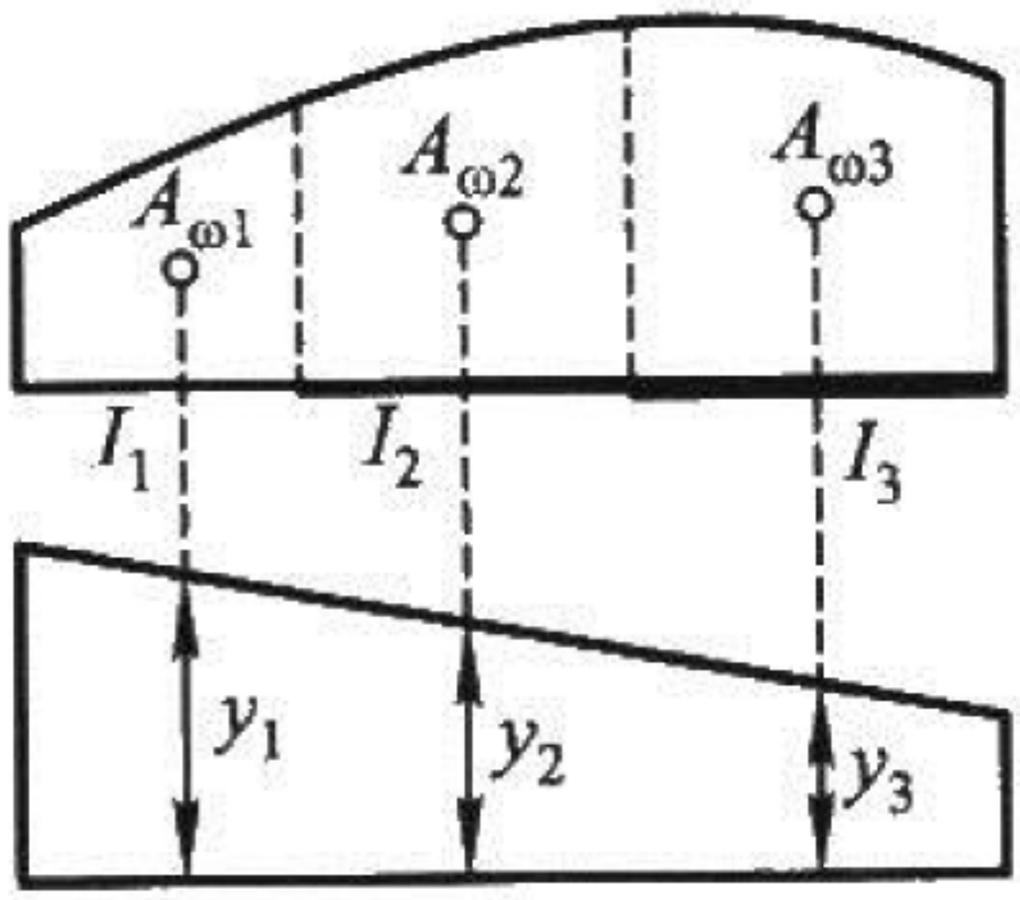


图 6-1-13

（4）勾绘变形曲线（例如图 6-1-14）

①根据实际状态的弯矩图M_P，可判定杆件弯曲后的凹凸方向。

a．DK 段应向右凸，KC 段则向左凸，而在弯矩为零的 K 点处有一反弯点；

b．CB 和 AB 段则分别向上和向右凸。

②根据支座处的位移边界条件和结点处的位移连续条件，便可确定变形曲线的位置。

a．D 为固定端，其线位移与转角均为零；

b．C、D 为刚结点，在该处各杆端的夹角应保持为直角。

③根据已求出的 Δ_{Ay} 系向下，以及忽略各杆的轴向变形，便可绘出变形曲线的大致轮廓,如图 6-1-14（d）所示。

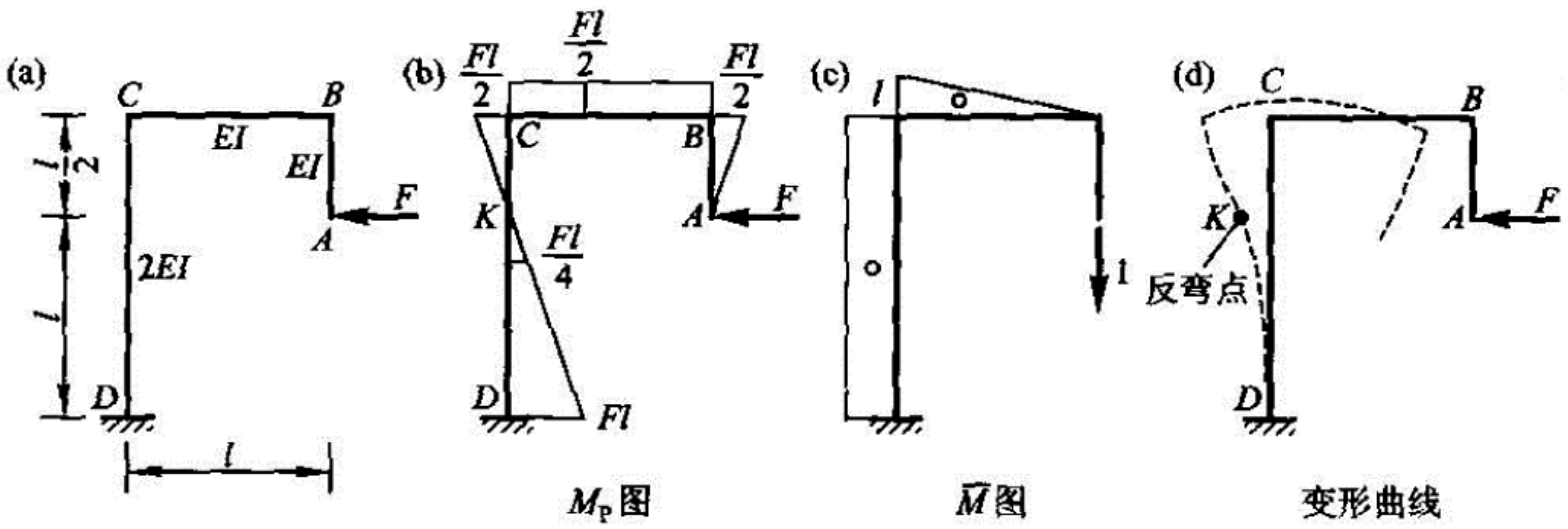


图 6-1-14

六、静定结构温度变化时的位移计算

1．温度对静定结构的影响

当静定结构的温度发生变化时，由于材料热胀冷缩，因而会使结构产生变形和位移，但是不会引起内力。

2．位移计算

如图 6-1-15（a）所示，结构外侧温度升高 t_1，内侧温度升高 t_2，现要求由此引起的任一点沿任一方向的位移，K 点的竖向位移 Δ_{Kt}。

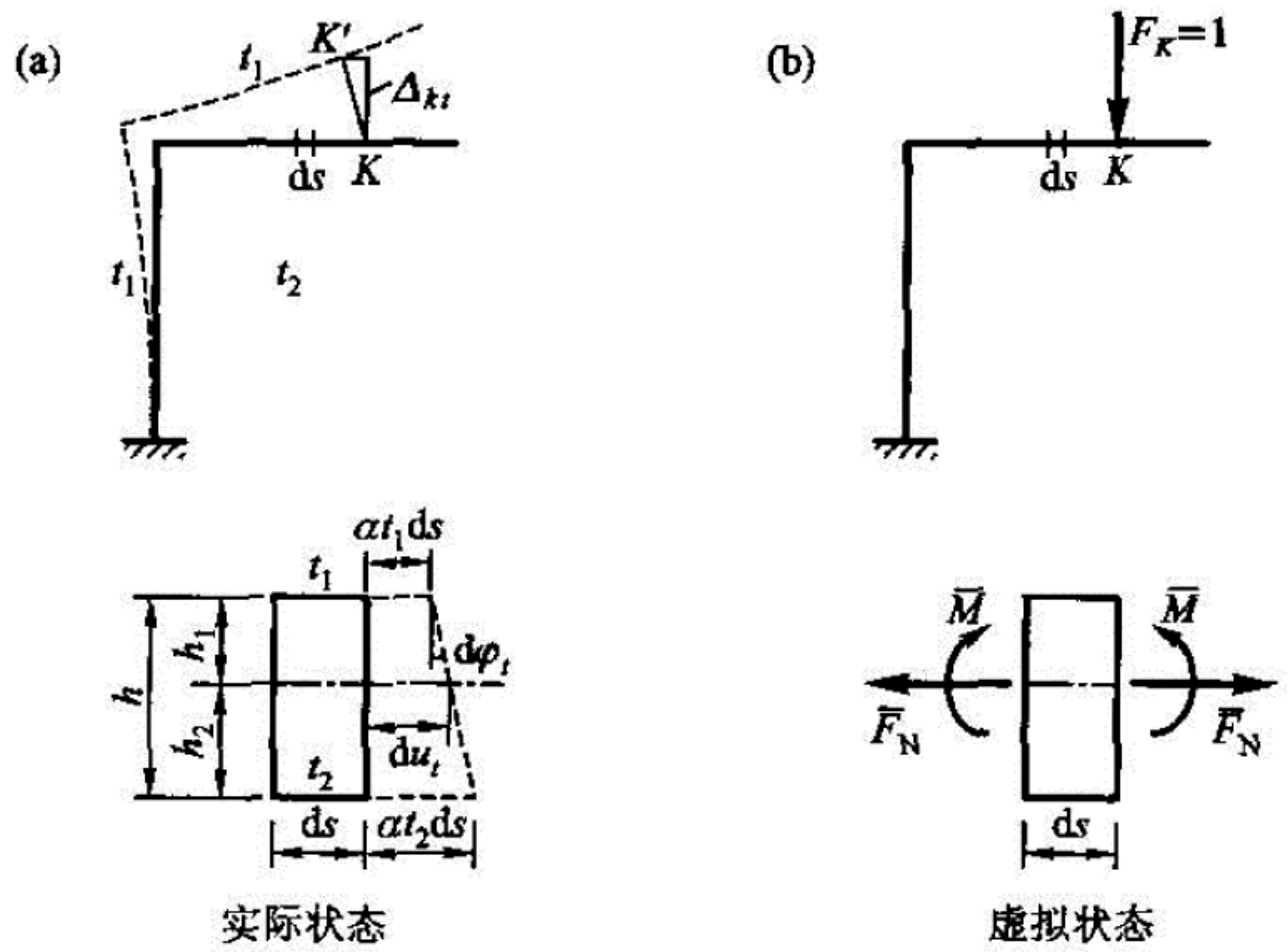


图 6-1-15

（1）位移计算的一般公式

$$\Delta_{Kt}=\sum\int\overline{F}_{N}\mathrm{d}u_{t}+\sum\int\overline{M}\mathrm{d}\varphi_{t}+\sum\int\overline{F}_{S}\gamma_{t}\mathrm{d}s \qquad (a)$$

（2）实际状态中任一微段 ds 由于温度变化所产生的变形

①微段上、下边缘纤维的伸长分别为$\alpha t_1\mathrm{d}s$和$\alpha t_2\mathrm{d}s$，这里 α 是材料的线膨胀系数。为了简化计算，可假设温度沿截面高度成直线变化，这样在温度变化时截面仍保持为平面。

②由几何关系可求得微段在杆轴线处的伸长为

$$\mathrm{d}u_t=\alpha t_1\mathrm{d}s+(\alpha t_2\mathrm{d}s-\alpha t_1\mathrm{d}s)\frac{h_1}{h}$$

$$=\alpha\left(\frac{h_2}{h}t_1+\frac{h_1}{h}t_2\right)\mathrm{d}s=\alpha t\mathrm{d}s \qquad (b)$$

式中，$t=\frac{h_2}{h}t_1+\frac{h_1}{h}t_2$为杆轴线处的温度变化。

若杆件的截面对称于形心轴，即 $h_1=h_2=\frac{h}{2}$，则$t=\frac{t_1+t_2}{2}$。

③微段两端截面的相对转角

$$\mathrm{d}\varphi_t=\frac{\alpha t_2\mathrm{d}s-\alpha t_1\mathrm{d}s}{h}=\frac{\alpha(t_2-t_1)\mathrm{d}s}{h}=\frac{\alpha\Delta t\mathrm{d}s}{h} \qquad (c)$$

式中，$\Delta t=t_2-t_1$为两侧温度变化之差。

④对于杆系结构，温度变化并不引起剪切变形，即$\gamma_t=0$。

（3）将微段的温度变形即式（b）、（c）代入式（a）可得

$$\Delta_{Kt} = \sum \int \overline{F}_N \alpha t \mathrm{d}s + \sum \int \overline{M} \frac{\alpha \Delta t \mathrm{d}s}{h}$$

$$= \sum \alpha t \int \overline{F}_N \mathrm{d}s + \sum \alpha \Delta t \int \frac{\overline{M} \mathrm{d}s}{h}$$

若各杆均为等截面杆时，则有

$$\Delta_{Kt} = \sum \alpha t \int \overline{F}_N \mathrm{d}s + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} \mathrm{d}s$$

$$= \sum \alpha t A_{\omega \overline{F}_N} + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} A_{\omega \overline{M}}$$

式中，$A_{\omega \overline{F}_N} = \int \overline{F}_N \mathrm{d}s$ 为$\overline{F}_N$图的面积；$A_{\omega \overline{M}} = \int \overline{M} \mathrm{d}s$ 为$\overline{M}$图的面积。

（4）公式各项正负号的确定

①实际温度变形与虚拟内力方向一致时其乘积为正，相反时为负；

②对于温度变化，若规定以升温为正，降温为负；

③轴力$\overline{F}_N$ 以拉力为正，压力为负；

④弯矩$\overline{M}$则应以使 t_2 边受拉者为正，反之为负。

3．典型结构的位移计算

（1）梁和刚架

在计算温度变化所引起的位移时，一般不能略去轴向变形的影响。

（2）桁架

①在温度变化时，其位移计算公式为

$$\Delta_{Kt} = \sum \overline{F}_N \alpha t l$$

②当桁架的杆件长度因制造误差而与设计长度不符时，设各杆长度的误差为Δl，则位移计算公式为

$$\Delta_K = \sum \overline{F}_N \Delta l$$

七、静定结构支座移动时的位移计算

1．支座位移对静定结构的影响

对于静定结构，支座发生移动并不引起内力，材料也不发生变形，故此时结构的位移纯属刚体位移。

2．计算公式

设图 6-1-16（a）所示静定结构，其支座发生了水平位移 c_1、竖向沉陷 c_2 和转角 c_3，现要求由此引起的任一点沿任一方向的位移，例如 K 点的竖向位移Δ_{Kc}。

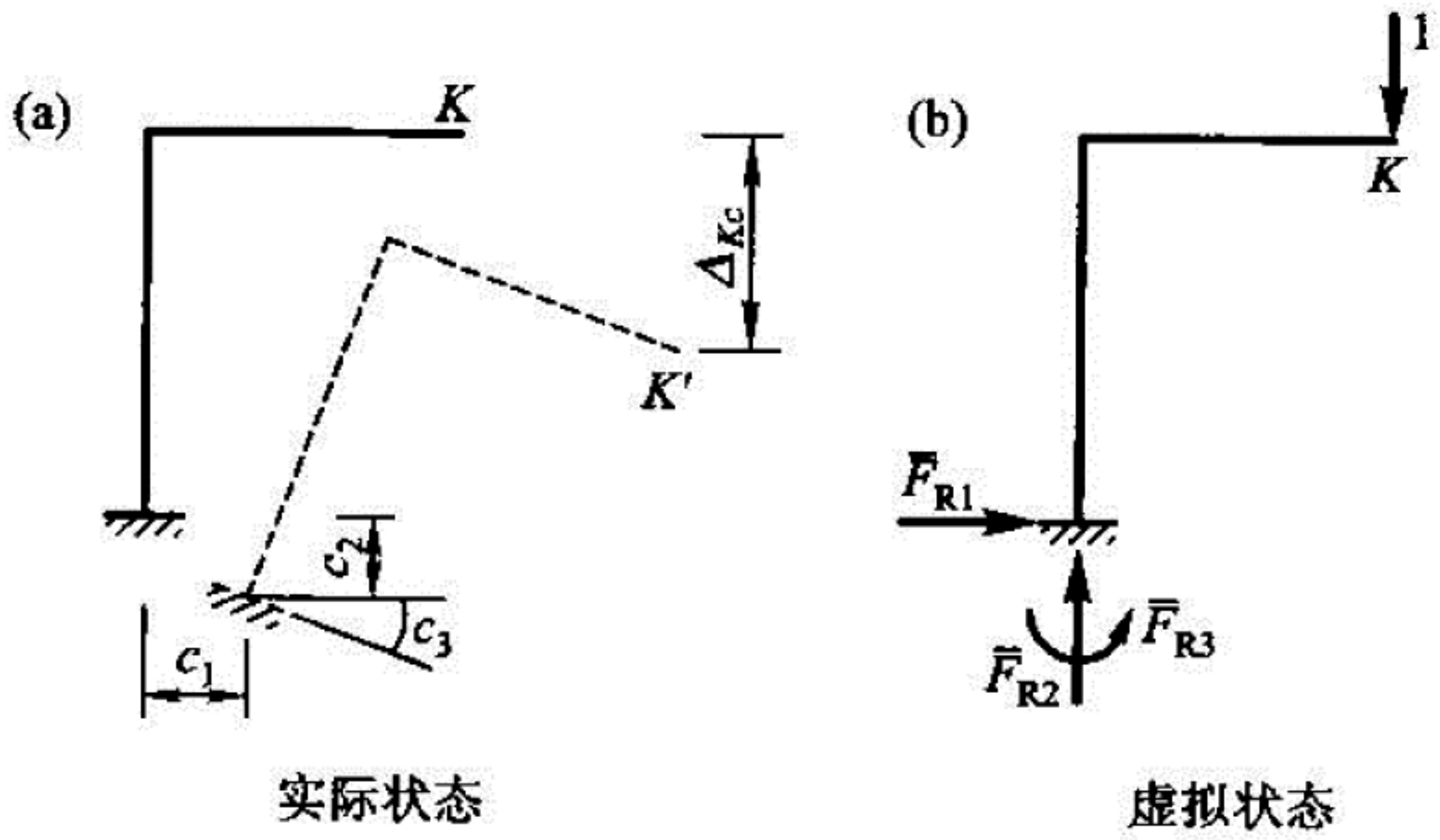


图 6-1-16

位移计算的一般公式简化为

$$\Delta_{Kc} = -\sum \overline{F}_R c$$

式中，$\overline{F}_R$ 为虚拟状态（图 6-1-16b）的支座反力；c 为支座位移；$\sum \overline{F}_R c$ 为反力虚功，当$\overline{F}_R$ 与实际支座位移 c 方向一致时其乘积取正，相反时为负；上式右边前面还有一负号，系原来移项时所得，不可漏掉。

八、线弹性结构的互等定理

1．功的互等定理

（1）定理描述

第一状态的外力在第二状态的位移上所作的虚功，等于第二状态的外力在第一状态的位移上所作的虚功。功的互等定理是线弹性结构四个互等定理中最基本的。

（2）定理表达式

$$W_{12} = W_{21}$$

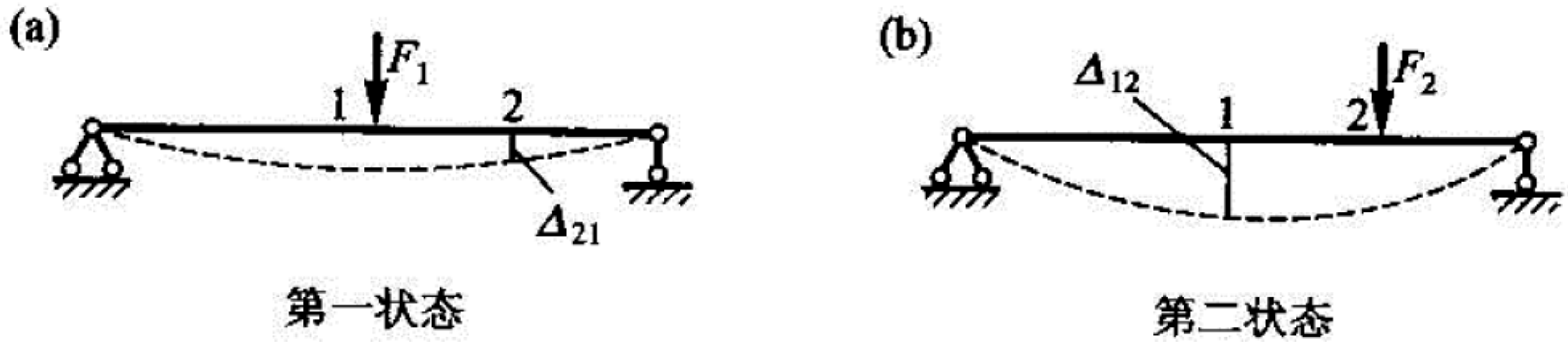


图 6-1-17

（3）推导过程

$$F_1\Delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2 \mathrm{d}s}{EI} + \sum \int \frac{F_{N1} F_{N2} \mathrm{d}s}{EA} + \sum \int k \frac{F_{S1} F_{S2} \mathrm{d}s}{GA}$$

$$F_2\Delta_{21} = \sum \int \frac{M_2 M_1 \mathrm{d}s}{EI} + \sum \int \frac{F_{N2} F_{N1} \mathrm{d}s}{EA} + \sum \int k \frac{F_{S2} F_{S1} \mathrm{d}s}{GA}$$

所以

$$F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21}$$

则

$$W_{12} = W_{21}$$

2．位移互等定理

（1）定理描述

第二个单位力所引起的第一个单位力作用点沿其方向的位移，等于第一个单位力所引起的第二个单位力作用点沿其方向的位移。

（2）定理表达式

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

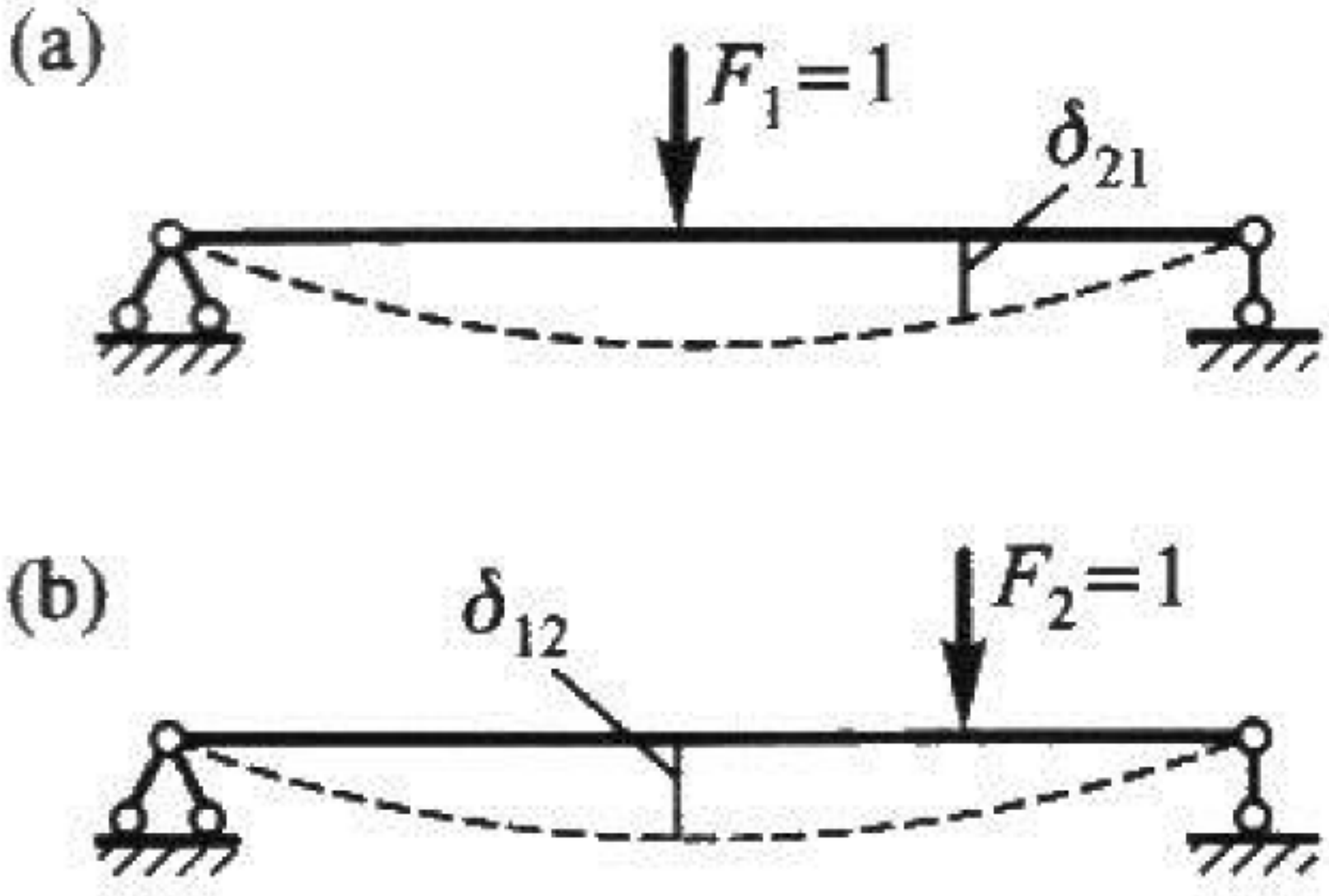


图 6-1-18

（3）相关说明

①这里的单位力也包括单位力偶，即可以是广义单位力。位移也包括角位移，即可以是相应的广义位移。

②在图 6-1-19 的两个状态中，根据位移互等定理，应有$\varphi_A = f_C$，虽然 φ_A 代表单位力引起的角位移，f_C 代表单位力偶引起的线位移，含义不同，但此时二者在数值上是相等的，量纲也相同。

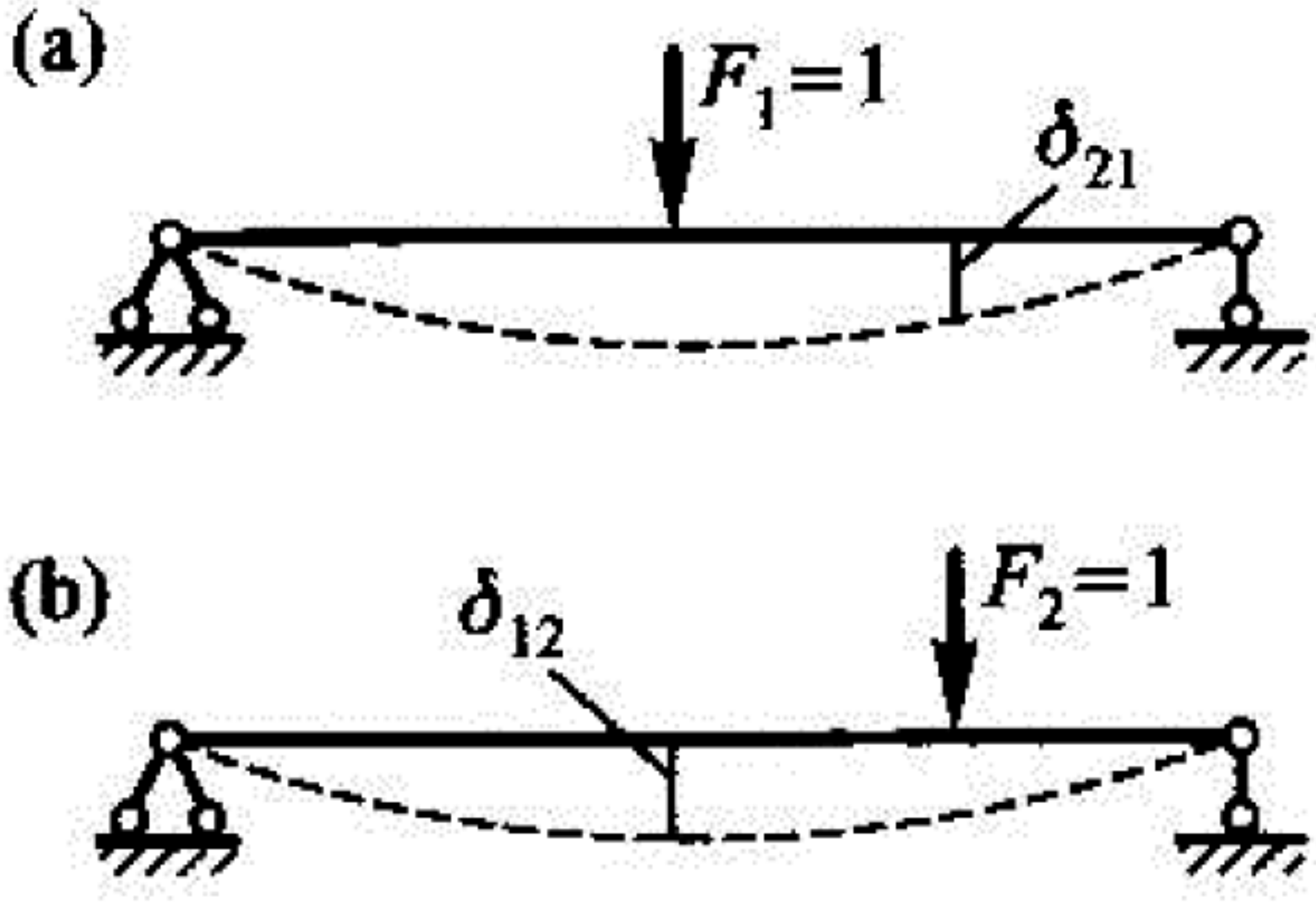


图 6-1-19

3．反力互等定理

（1）定理描述

支座 1 发生单位位移所引起的支座 2 的反力，等于支座 2 发生单位位移所引起的支座 1 的反力。

（2）定理表达式

$$r_{21} = r_{12}$$

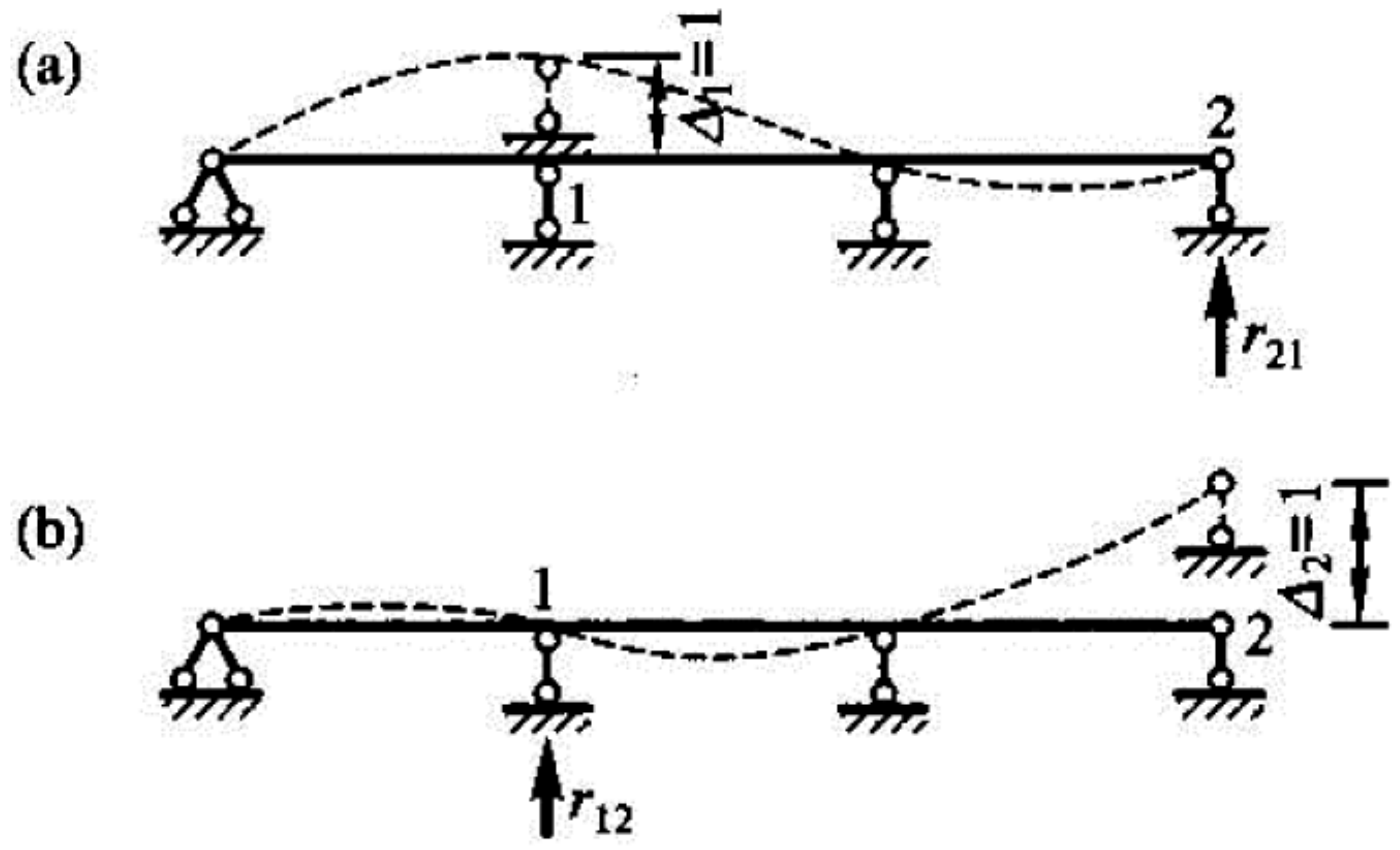


图 6-1-20

（3）相关说明

①该定理对结构上任何两个支座都适用。

②注意反力与位移在作功的关系上应相对应，即力对应于线位移，力偶对应于角位移。

③在图 6-1-21（a）、（b）的两个状态中，应有 $r_{12} = r_{21}$，它们虽然一个为单位位移引起的反力偶，另一个为单位转角引起的反力，含义不同，但此时二者在数值上是相等的，量纲也相同。

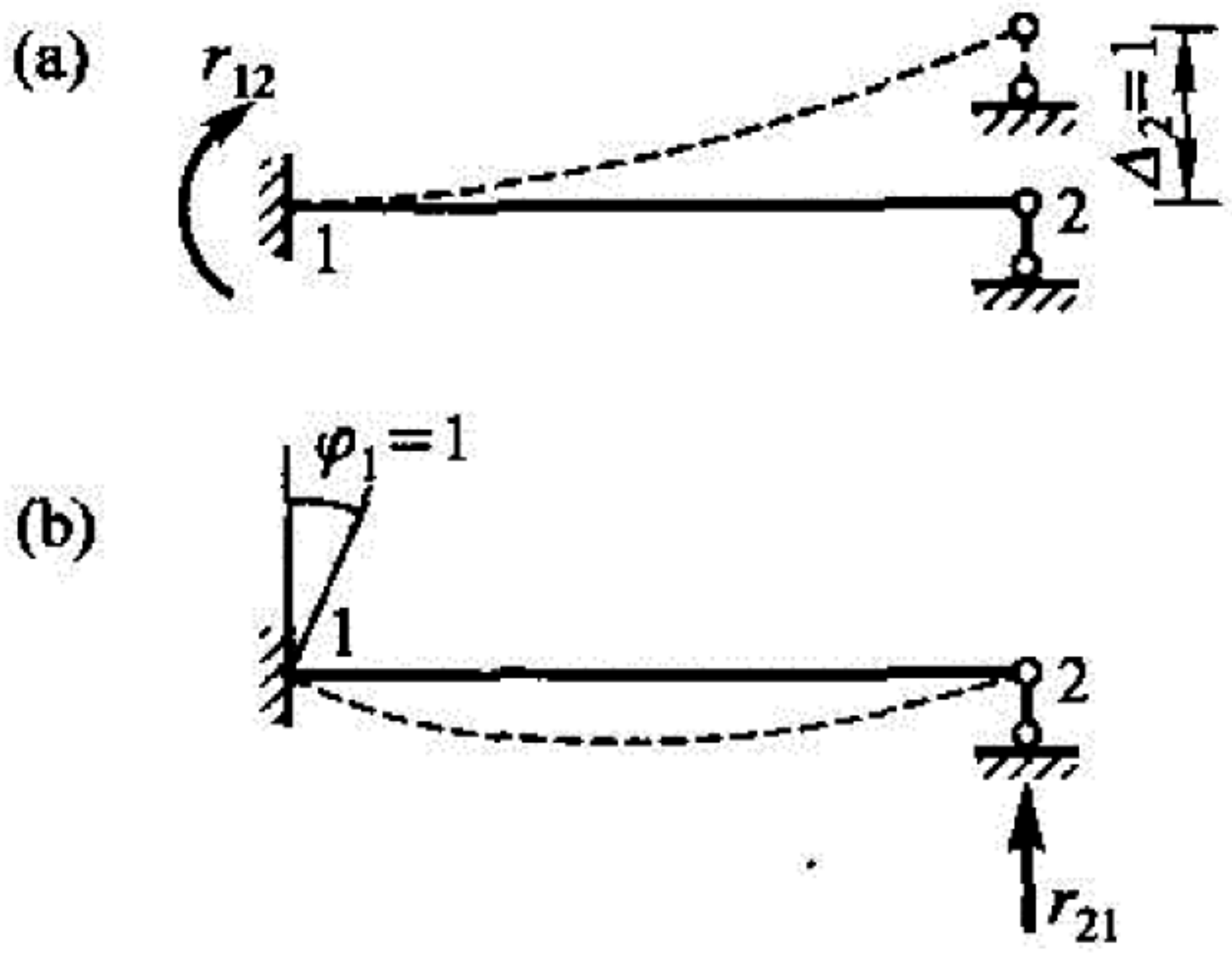


图 6-1-21

4．反力位移互等定理

（1）定理描述

单位力所引起的结构某支座反力，等于该支座发生单位位移时所引起的单位力作用点沿其方向的位移，但符号相反。

（2）定理表达式

$$r_{12} = -\delta_{21}$$

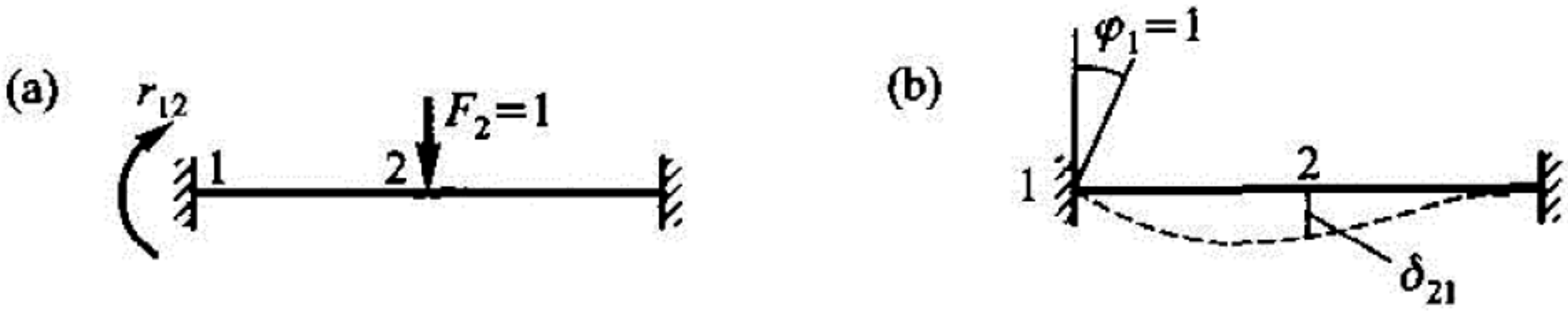


图 6-1-22

九、空间刚架的位移计算公式

1．空间刚架的杆件横截面上内力分量

（1）绕截面两主轴的两个弯矩 M_1、M_2；

（2）沿两主轴方向的两个剪力 F_{Sy}、F_{Sz}；

（3）轴力 F_N；

（4）扭矩 M_t。

2．空间刚架在荷载作用下的位移计算公式

（1）计算表达式

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_{yP}\mathrm{d}s}{EI_y}+\sum\int\frac{\overline{M}_2M_{zP}\mathrm{d}s}{EI_z}+\sum\int\frac{k_y\overline{F}_{Sy}F_{SyP}\mathrm{d}s}{GA}+\sum\int\frac{k_z\overline{F}_{Sz}F_{SzP}\mathrm{d}s}{GA}+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_{NP}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{\overline{M}_tM_{tP}\mathrm{d}s}{GI_t}$$

式中，$\overline{M}_t$、M_{tP} 分别为虚拟状态和实际状态的扭矩；GI_t 为截面抗扭刚度；G 是材料的切变模量；I_t 为截面抗扭二次矩，对于圆截面或空心圆截面 I_t 称为截面二次极矩 I_P，对于非圆截面 I_t 称为相当截面二次极矩，其值见表 6-1-2。

表 6-1-2　截面抗扭二次矩

截面形式	截面抗扭二次矩 I_t
圆　　形（直径为 d）	$\frac{\pi}{32}d^4$
薄壁圆管（壁厚为 δ）	$\frac{\pi}{4}\delta d^3$
正方形（边长为 a）	$0.141a^4$
矩　　形（长边 a，短边 b）	$\beta_1 ab^3$①
狭长矩形（$a \gg b$）	$\frac{1}{3}(a-0.63b)b^3\approx\frac{ab^3}{3}$
狭长矩形组合截面	$\frac{1}{3}\sum a_ib_i^3$

（2）相关说明

①对于空间刚架，一般可略去剪力及轴力的影响，但除弯矩外通常还须考虑扭矩的影响。

②当刚架各杆轴线均在同一平面内且外力均垂直于此平面时（又称平面刚架承受垂直荷载），截面上只有三种内力：绕位于刚架平面内的主轴的弯矩，垂直于刚架平面的剪力和扭矩。在这种情况下，若略去剪力影响，则位移计算公式可写为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{M}_tM_{tP}\mathrm{d}s}{GI_t}$$

6.2 课后习题答案

复习思考题

1．没有变形就没有位移，此结论对否？

答：没有变形就没有位移不正确。因为位移是指结构各截面位置的移动或转动；变形是指结构（或其一部分）形状的改变。位移产生的因素有荷载、温度改变、支座移动、材料收缩和制造误差等。对于静定结构来讲，支座产生移动，结构不会发生变形，但会产生刚体位移。

2．为什么虚功原理无论对于弹性体、非弹性体、刚体都成立？它的适用条件是什么？

答：（1）因为虚功原理在推导时，不涉及材料本身的物理性质，所以对有不同材性的弹性体、非弹性体、刚体均成立。

（2）虚功原理的适用条件是理想约束情况和结构平衡体系。

3．结构上本来没有虚拟单位荷载作用，但在求位移时，却加上了虚拟单位荷载，这样求出的位移会等于原来的实际位移吗？它包括了虚拟单位荷载引起的位移没有？

答：（1）结构上本来没有虚拟单位荷载作用，但在求位移时，却加上了虚拟单位荷载，这样求出的位移等于原来的实际位移。

（2）假设的虚拟单位力与实际位移完全无关，求解出的位移就是实际位移，不包括虚拟单位荷载引起的位移。

4．何谓线弹性结构？它必须满足哪些条件？

答：（1）线弹性结构的定义

线弹性结构是指结构位移与荷载是成正比的结构。

（2）线弹性结构应满足的条件：

①位移是微小的；

②材料的应力与应变关系必须符合胡克定律；

③计算位移时荷载的影响可以叠加，且当荷载全部撤除时位移也完全消失。

5．荷载下的位移计算公式（6-6）适用于什么情况？

答：公式（6-6）

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_{P}\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{N}F_{NP}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{S}F_{SP}\mathrm{d}s}{GA}$$

适用于没有支座移动的平面杆系结构。

6．图乘法的应用条件及注意点是什么？变截面杆及曲杆是否可用图乘法？

答：（1）图乘法的应用条件及注意点

①图乘法的应用条件：

a．杆轴为直线；

b．EI 为常数；

c．$\overline{M}$和 M_P两个弯矩图中至少有一个是直线图形。

②图乘法的注意点：

a．必须符合上述前提条件；

b．竖标 y_c只能取自直线图形；

c．A_w与 y_c若在杆件的同侧则乘积取正号，异号则取负号。

（2）对于变截面杆，可以应用图乘法。变截面杆可以分解成若干段等截面杆，在每段等截面杆上应用图乘法，最后叠加在一起即可。

对于曲杆，若其截面高度与曲率半径相比很小（小曲率杆），则曲率的影响不大，可以忽略，图乘法仍然适用；如果需要考虑曲率的影响，则不能应用图乘法求解曲杆的位移。

7．在温度变化引起的位移计算公式中，如何确定各项的正负号？

答：温度变化引起的位移计算公式中，各项的正负号规定如下：

①实际温度变形与虚拟内力方向一致时其乘积为正，相反时为负；

②对于温度变化，规定以升温为正，降温为负；

③轴力$\overline{F}_N$以拉力为正，压力为负；

④弯矩$\overline{M}$则应以使 t_2 边受拉者为正，反之为负。

8．互等定理为何只适用于线弹性结构？

答：因为互等定理中采用的位移计算公式都是在线弹性假定下求出的，所以最终的功的互等定理、位移互等定理、反力互等定理以及位移反力互等定理皆只适用于线弹性结构。

9．图 6-2-1（a）、(b）所示结构的两个平衡状态中，有一个为温度变化，此时功的互等定理是否成立？为什么？

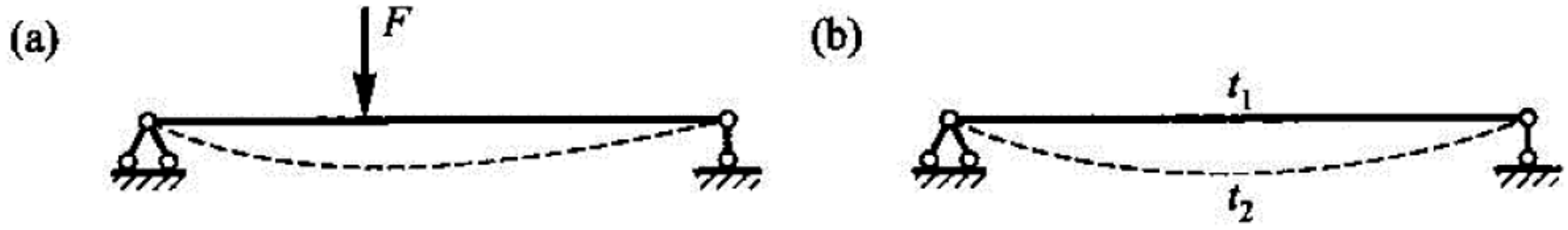


图 6-2-1

答：(1）此时功的互等定理不成立。

（2）因为功的互等定理是指第一状态的外力在第二状态的位移上所作的虚功，等于第二状态的外力在第一状态的位移上所作的虚功，即实际外力对应虚位移状态。显然温度不是外力，所以两个平衡状态有一个是温度变化时不满足功的互等定理。

10．反力互等定理可否用于静定结构？如用于会得出什么结果？

答：(1）反力互等定理可以用于静定结构。线弹性结构的四个互等定理既可以用于超静定结构也可以用于静定结构。

（2）当反力互等定理用于静定结构时，由于静定结构支座位移不产生内力、反力，因此反力互等定理的结果等于零。

11．反力位移互等定理能否用于非弹性的静定结构？

答：反力位移互等定理可以用于非弹性的静定结构。因为非弹性的静定结构，在支座发生移动时产生的是刚体位移，与支座位移成线性关系，相当于线弹性，所以反力位移互等定理可以应用在非弹性的静定结构中。

习题

6-1　试用积分法求图示刚架 B 点的水平位移。EI＝常数。

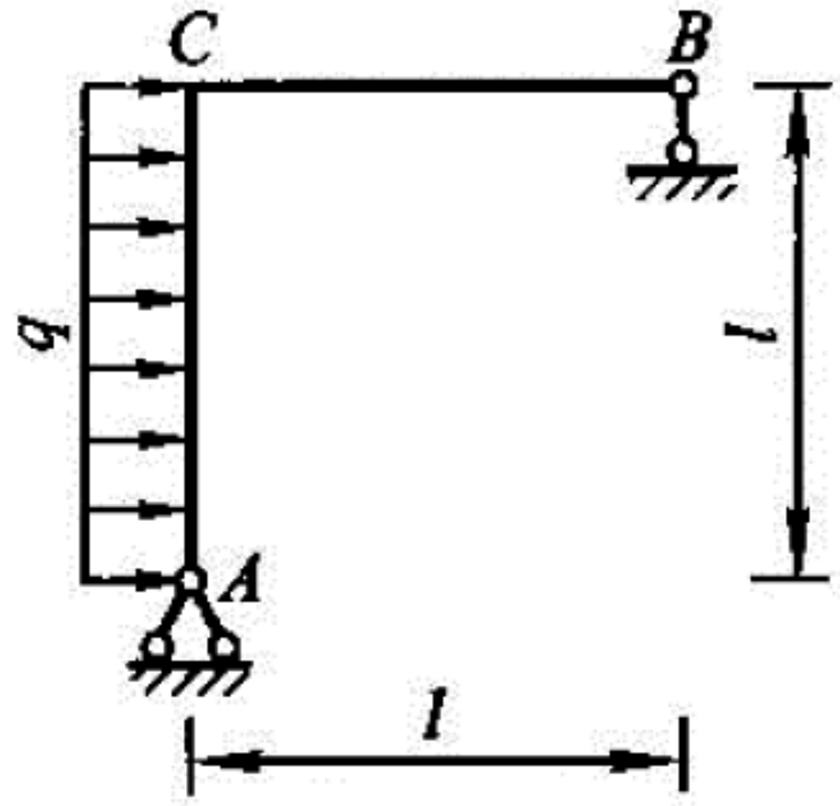


图 6-2-2（题 6-1）

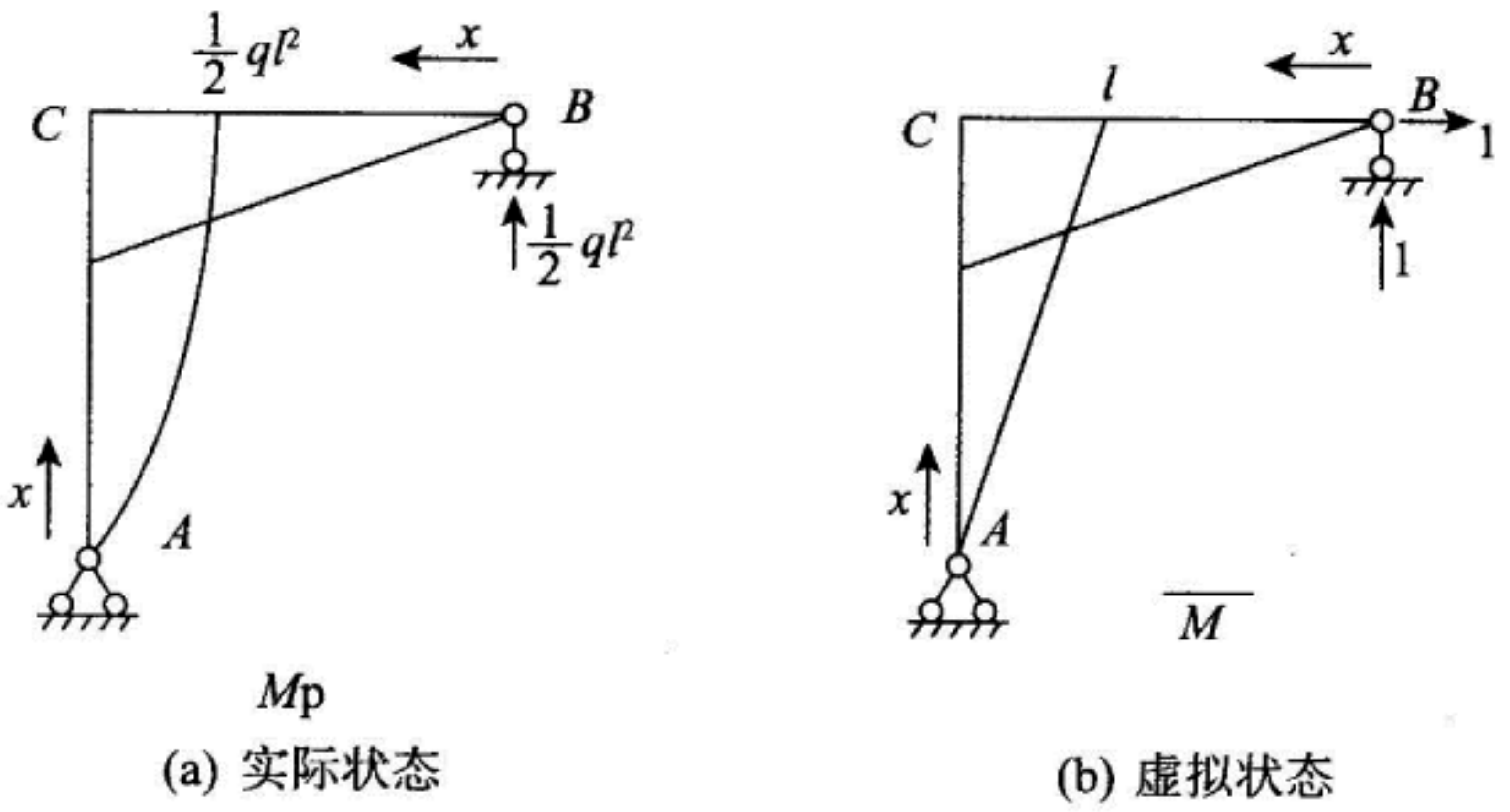


图 6-2-3

解：在 B 点施加一单位荷载，体系的实际状态和虚拟状态如图 6-2-3（a）、（b）所示，并分别设各杆的 x 坐标。则在各杆内，有如下积分表达式

$$\text{方程}\begin{cases} CB\text{ 段 }\overline{M}_B = x \\ AC\text{ 段 }\overline{M}_{AB} = x \end{cases}$$

$$\text{实际状态}\begin{cases} CB\text{ 段 }M_{CB} = \frac{1}{2}qx \\ AC\text{ 段 }M_{AB} = qlx - \frac{1}{2}qx^2 \end{cases}$$

$$\triangle_{Bx} = \sum\int \overline{M}\frac{M_P}{EI}ds = \int_0^l x\cdot\frac{1}{2}qlx\frac{1}{EI}dx + \int_0^l x\left(qlx - \frac{1}{2}qx^2\right)\frac{1}{EI}dx$$

$$= \frac{q}{EI}\left(\frac{l^4}{6} + \frac{l^4}{3} - \frac{1}{8}l^4\right) = \frac{3}{8EI}ql^4\,(\rightarrow)$$

6-2～6-3　图示曲梁为圆弧形，EI＝常数。试求 B 点的水平位移。

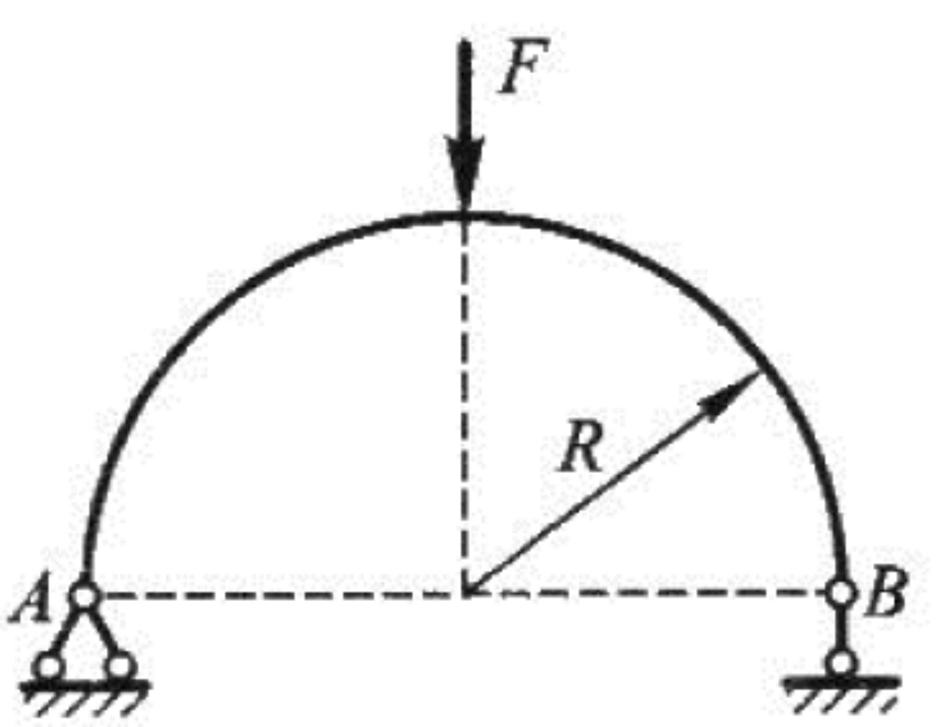


图 6-2-4（题 6-2）

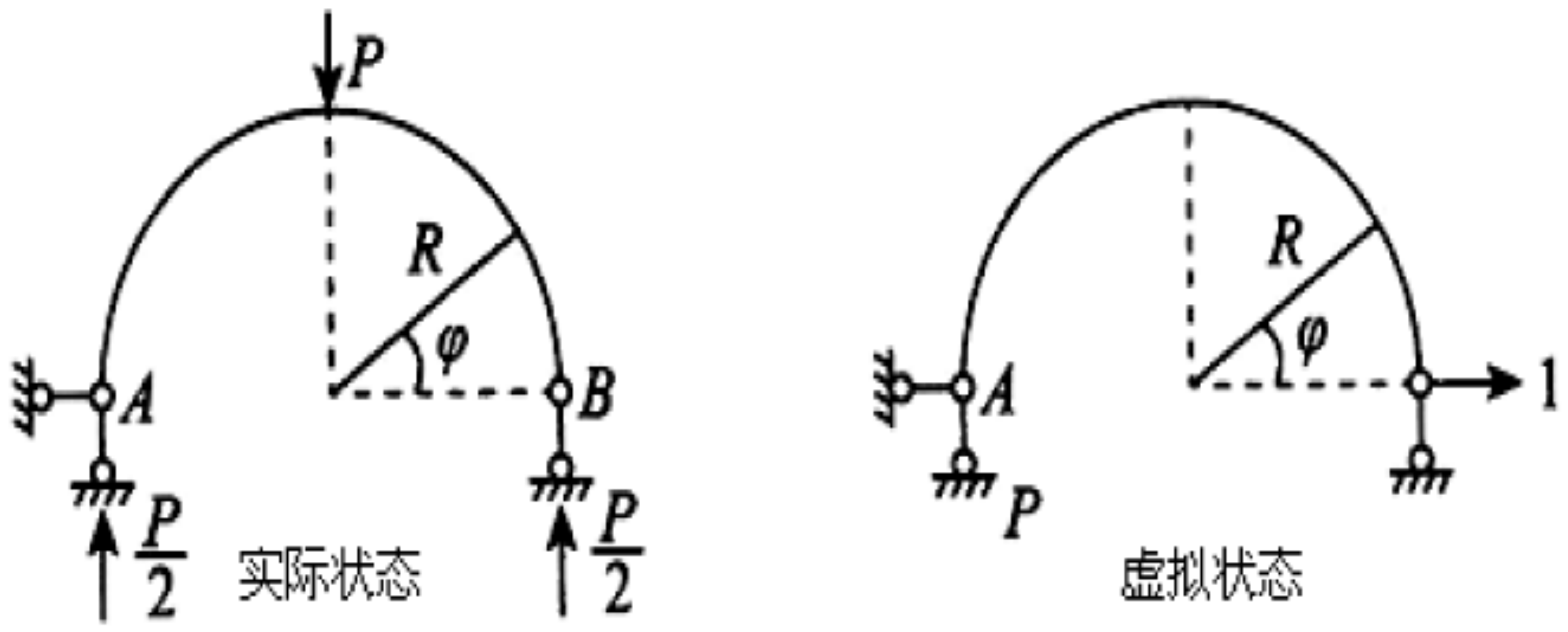


图 6-2-5

6-2 解：在 B 点施加一单位荷载，体系的实际状态和虚拟状态如图 6-2-5 所示。此题为曲梁不能用图乘法，需要用积分法，曲梁可略去轴力和剪力对位移影响而只考虑弯矩一项。

在实际状态中，任一截面弯矩为

$$M_P = \frac{P}{2}R(1-\cos\phi)$$

将虚拟状态 $\overline{M}=R\ \sin\varphi$，代入公式得

$$\triangle_{Bx} = \frac{1}{EI}\times 2\times\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\ \sin\varphi\ \frac{P}{2}R(1-\cos\varphi)R\mathrm{d}\phi = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\left[-\cos\varphi-\frac{\sin^2\phi}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{PR^3}{2EI}(\rightarrow)$$

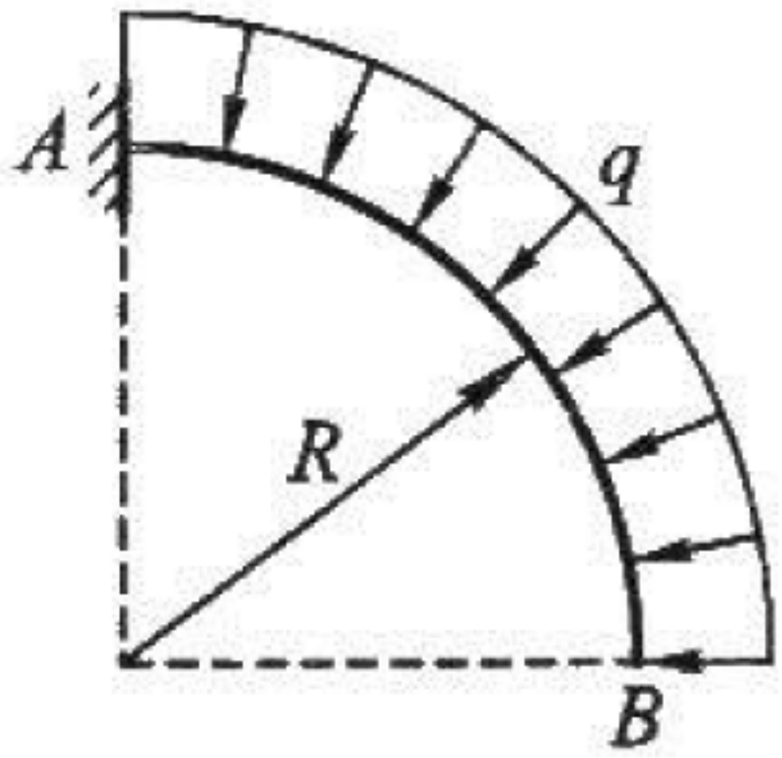


图 6-2-6（题 6-3）

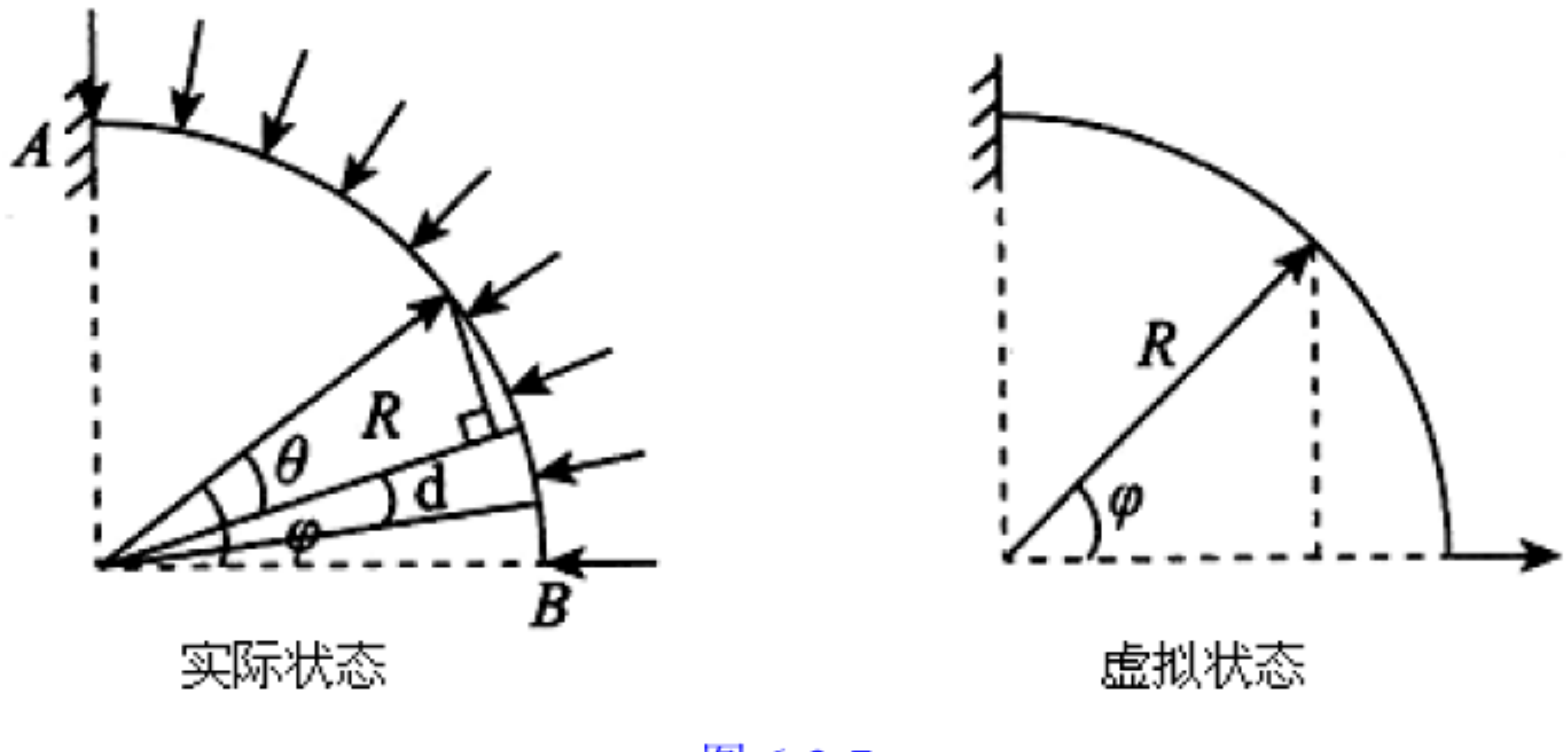


图 6-2-7

6-3 解：采用积分法计算 B 点的水平位移，在 B 点施加一单位荷载，体系的实际状态和虚拟状态如图 6-2-7 所示。

$$M_P=-\int_0^{\phi}qR\mathrm{d}\theta\cdot R\sin\theta=-qR^2\int_0^{\phi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-qR^2(1-\cos\phi)$$

$$\overline{M}=R\sin\varphi$$

代入位移积分公式算得 B 点位移

$$\Delta_{Bx}=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\varphi[-qR^2(1-\cos\varphi)]R\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{qR^4}{2EI}(\leftarrow)$$

6-4　图示桁架各杆截面均为 $A=2\times10^{-3}\mathrm{m}^2$，E＝210GPa，F＝40kN，d＝2m。试求：（a）C 点的竖向位移；（b）角 ADC 的改变量。

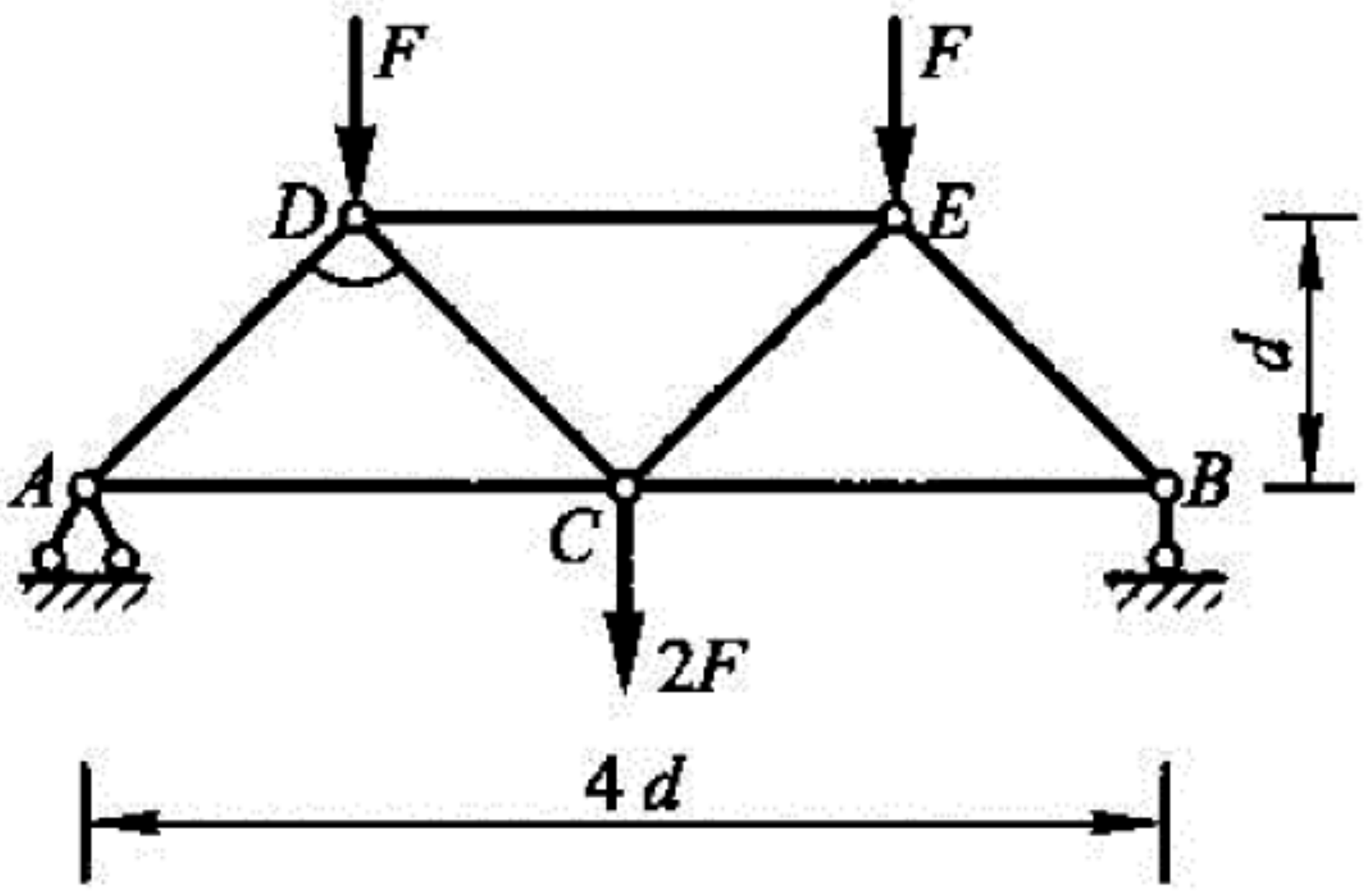


图 6-2-8（题 6-4）

解：此题为桁架，只考虑轴力对位移的影响，而忽略剪力和弯矩。该题所示结构为对称结构，只须计算一半，实际荷载作用下的轴力标于图 6-2-9（a）中。

求 Δc 应在 C 点加虚拟单位力 F＝1，如图 6-2-9（b）所示。

求∠ADC 应加 M＝1 的弯矩，等价为在 C、D 两点加大小相等为$1/(\sqrt{2}d)$，方向相反且垂直于 CD 杆的集中力，如图 6-2-9（c）所示。

分别求出对应的轴力，代入公式，即可得到 C 点的竖向位移ΔC_V，角 ADC 的改变量θ_{ADC}。

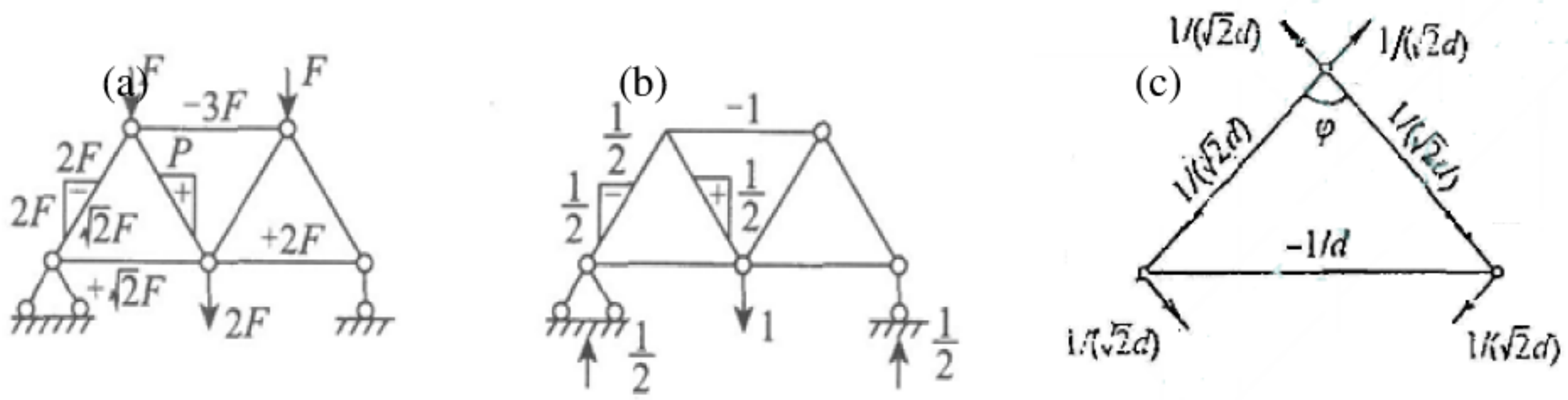


图 6-2-9

$$\Delta_C=\frac{1}{EA}\left[(-1)\times(-3F)\times 2d+2\times\left(\frac{1}{2}\right)(2F)2d+2(-\sqrt{2}/2)(-2\sqrt{2}F)\sqrt{2}d+2(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}F)\sqrt{2}d\right]$$

$$=(10+6\sqrt{2})\frac{Fd}{EA}=(10+6\sqrt{2})\frac{40\times10^3\times2}{210\times10^9\times2\times10^{-3}}=3.52\times10^{-3}\text{m}\ (\downarrow)$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{EA}\left[\left(-\frac{1}{d}\right)(2F)(2d)+\frac{1}{\sqrt{2}d}(-2\sqrt{2}F)\sqrt{2}d+\frac{1}{\sqrt{2}d}(\sqrt{2}F)\cdot\sqrt{2}d\right]$$

$$=-(4+\sqrt{2})\frac{F}{EA}=-(4+\sqrt{2})\cdot\frac{40\times10^3}{210\times10^9\times2\times10^{-3}}=5.156\times10^{-3}\text{rad}(\text{增大})$$

6-5　下列各图乘是否正确？如不正确应如何改正？

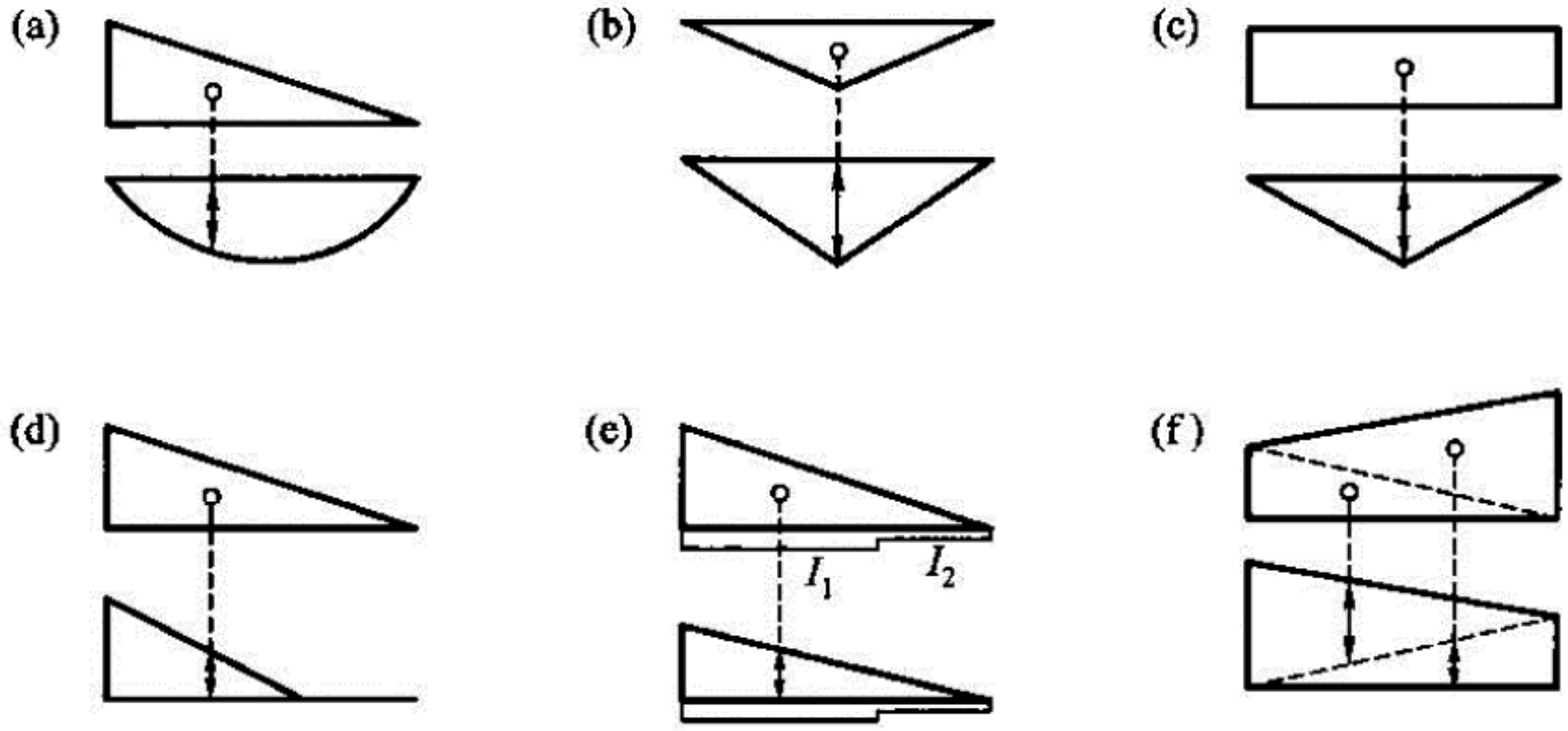


图 6-2-10（题 6-5）

答：（a）错误。形心竖标 y_c 只能取自直线图形。y_c 应取自三角形。

（b）错误。杆段的轴线应为直线，而不是折线。应分段图乘。

（c）错误。杆段的轴线应该为直线，而不是折线。应分段图乘，且 y_c 应取自矩形。

（d）错误。面积 A 与 y_c 应该对应。y_c 应取上面三角形。

（e）错误。这是一个变截面杆，两杆 EI 不同。应分开图乘。

（f）错误。y_c 长度不够。y_c 应该贯穿整个梯形。

6-6～6-13　试用图乘法求指定位移。

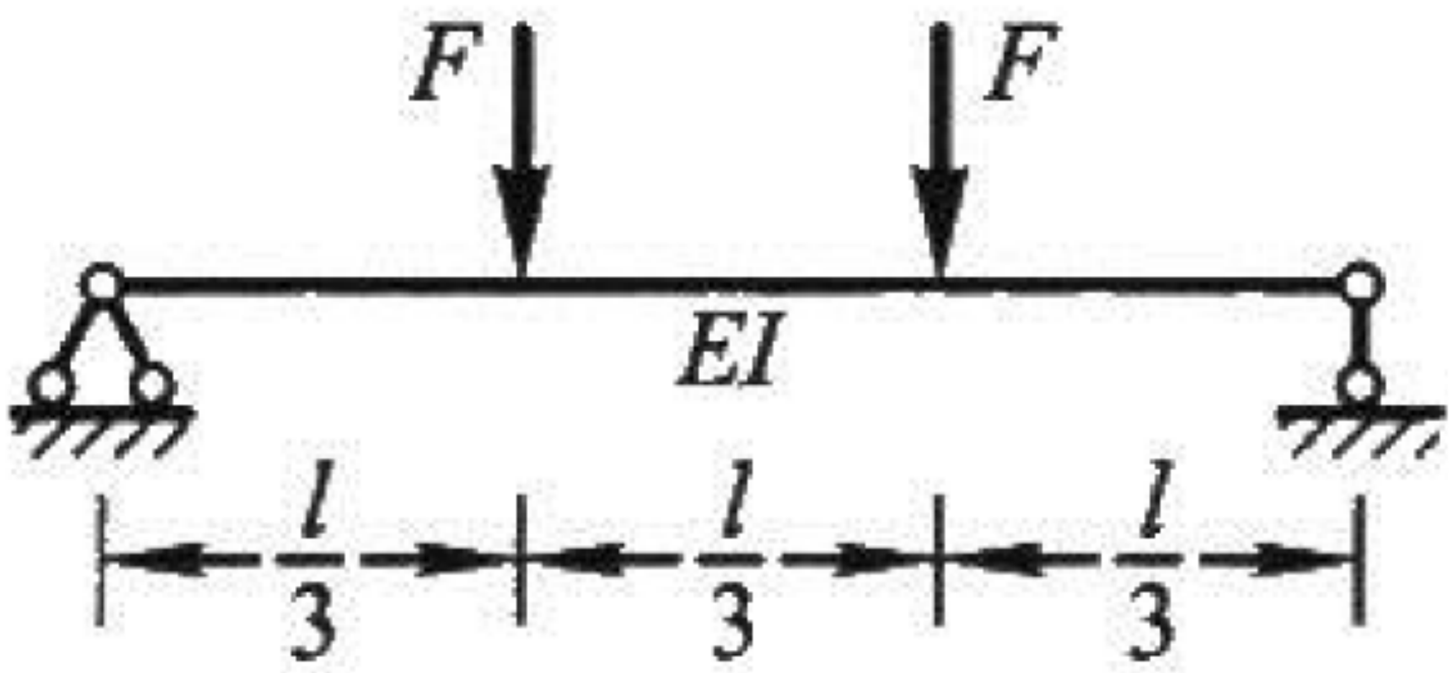


图 6-2-11（题 6-6）求最大挠度

6-6　解：显然跨中截面处的挠度最大，在跨中位置处施加一个竖向单位力 F=1，如图 6-2-12 所示。此结构为对称结构，只须计算出一半的位移，乘以 2 即可。

由实际状态的弯矩图和虚拟状态下的弯矩图，图乘可算得最大挠度。

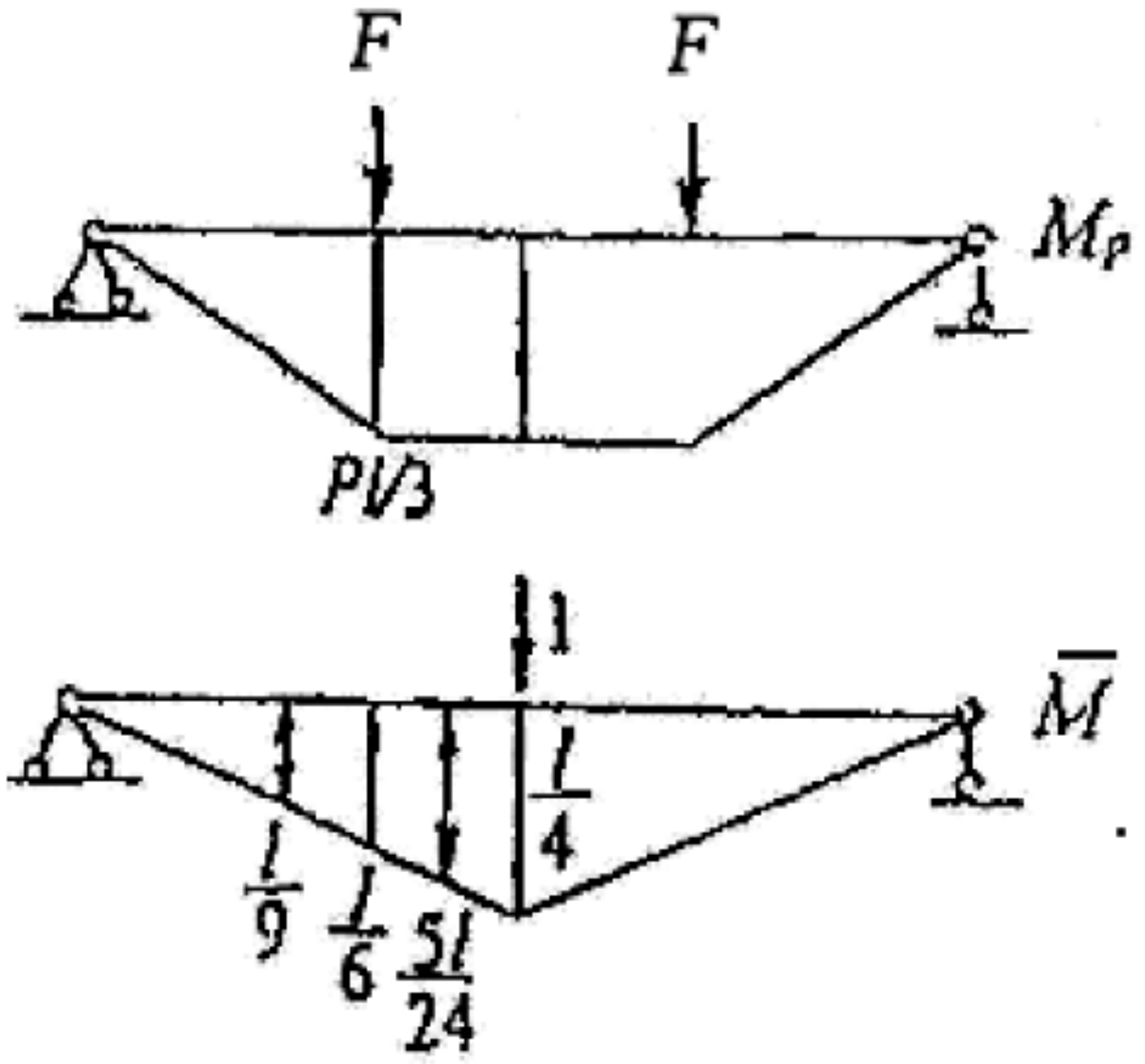


图 6-2-12

具体计算步骤如下

$$y_{\max}=\frac{2}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Fl}{3}\frac{l}{3}\right)\cdot\frac{l}{9}+\left(\frac{Fl}{3}\cdot\frac{l}{6}\right)\frac{5}{24}l\right]$$

$$=\frac{2}{EI}\left[\frac{1}{162}+\frac{5}{432}\right]Fl^3$$

$$=\frac{23}{648}\frac{Fl^3}{EI}(\downarrow)$$

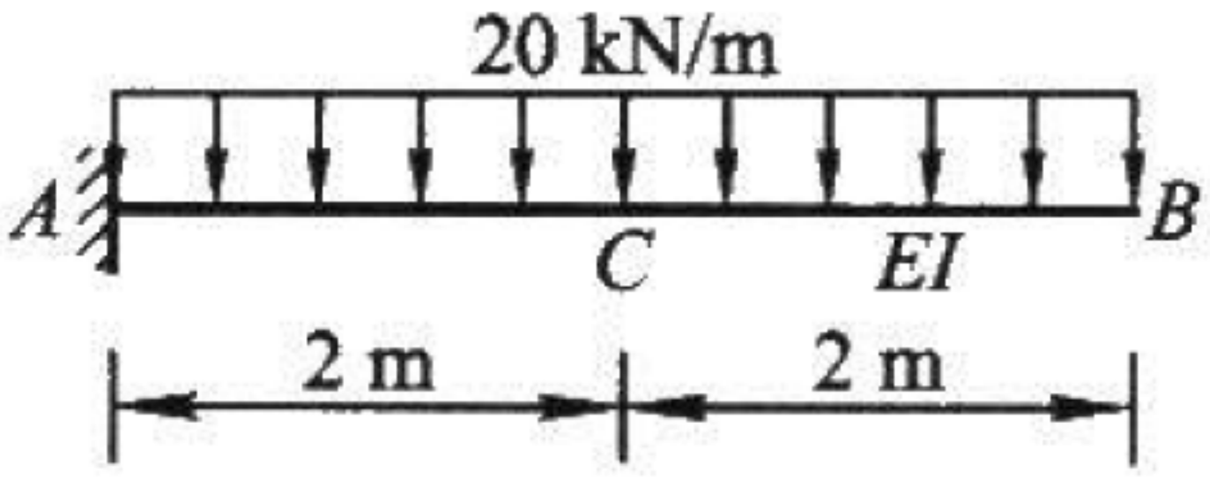


图 6-2-13（题 6-7）求 Δ_{Cy}

6-7　解：在 C 点处施加单位集中力 F＝1，画出对应的弯矩图 $\overline{M}$，与原结构在外荷载下的弯矩图 M_P，如图 6-2-14 所示，应用图乘法，即得到 C 点的竖向位移 Δ_{Cy}。

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\left[\frac{160\times2}{2}\times\frac{4}{3}+\frac{40\times2}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{2\times10\times2}{3}\times1\right]$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{640}{3}+\frac{80}{3}-\frac{40}{3}\right)$$

$$=\frac{680}{3EI}\downarrow$$

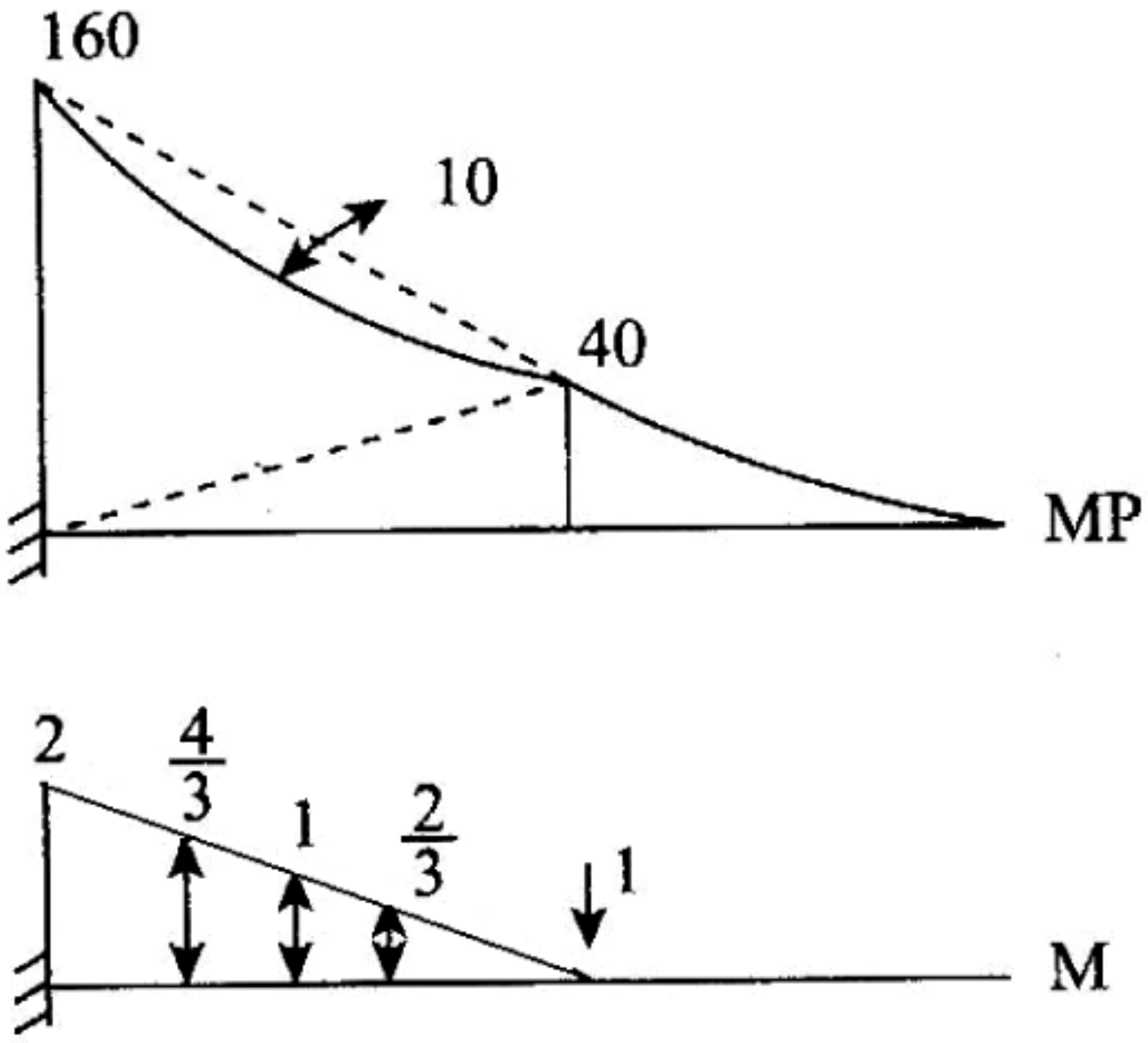


图 6-2-14

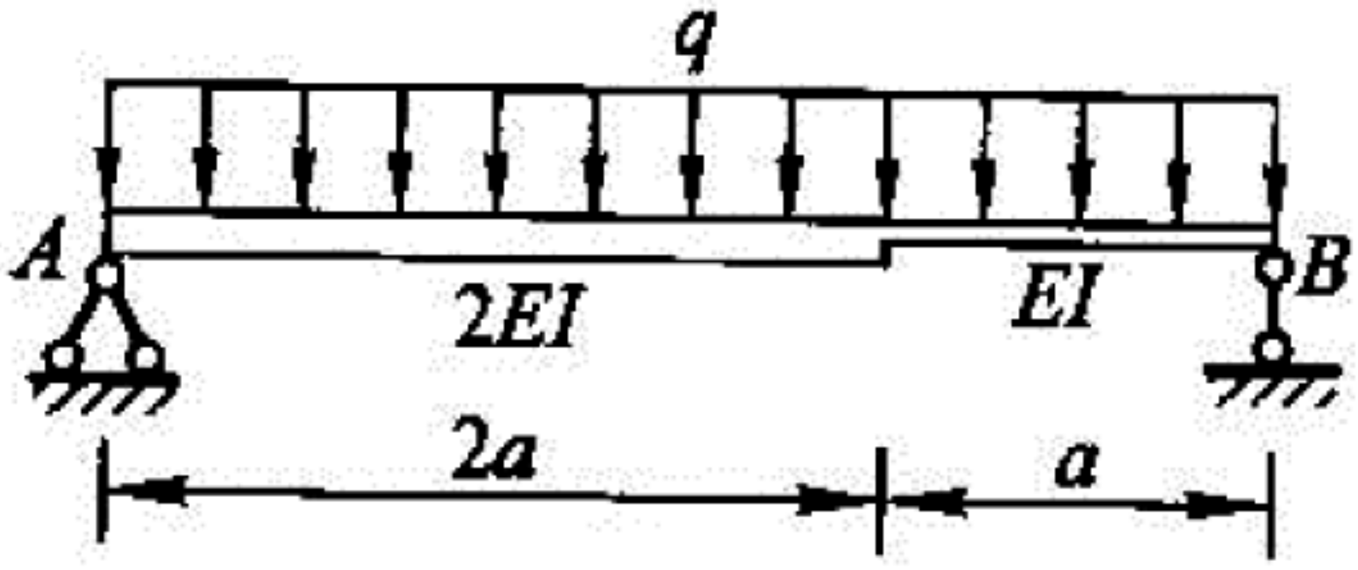


图 6-2-15（题 6-8）求 φ_B

6-8　解：在 B 点处施加单位集中力偶 M＝1，画出对应的弯矩图 $\overline{M}$，与原结构在外荷载下的弯矩图 M_P，如图 6-2-16 所示，应用图乘法，由于该横梁为变截面，所以图乘时应分段进行，即得到 B 点的转角 φ_B。

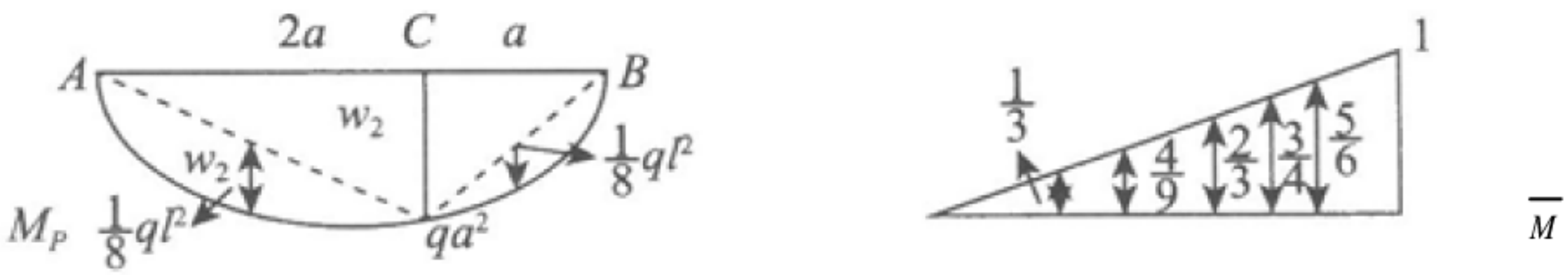


图 6-2-16

$$\varphi_B=-\frac{1}{2EI}\left[\frac{qa^2\times 2a}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{q(2a)^2}{8}\cdot 2a\cdot\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot\frac{7}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{qa^2}{8}\cdot a\cdot\frac{5}{6}\right]$$

$$=-\frac{qa^3}{EI}\left[\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{7}{18}+\frac{5}{72}\right]$$

$$=-\frac{19qa^3}{24EI}\text{（逆时针方向）}$$

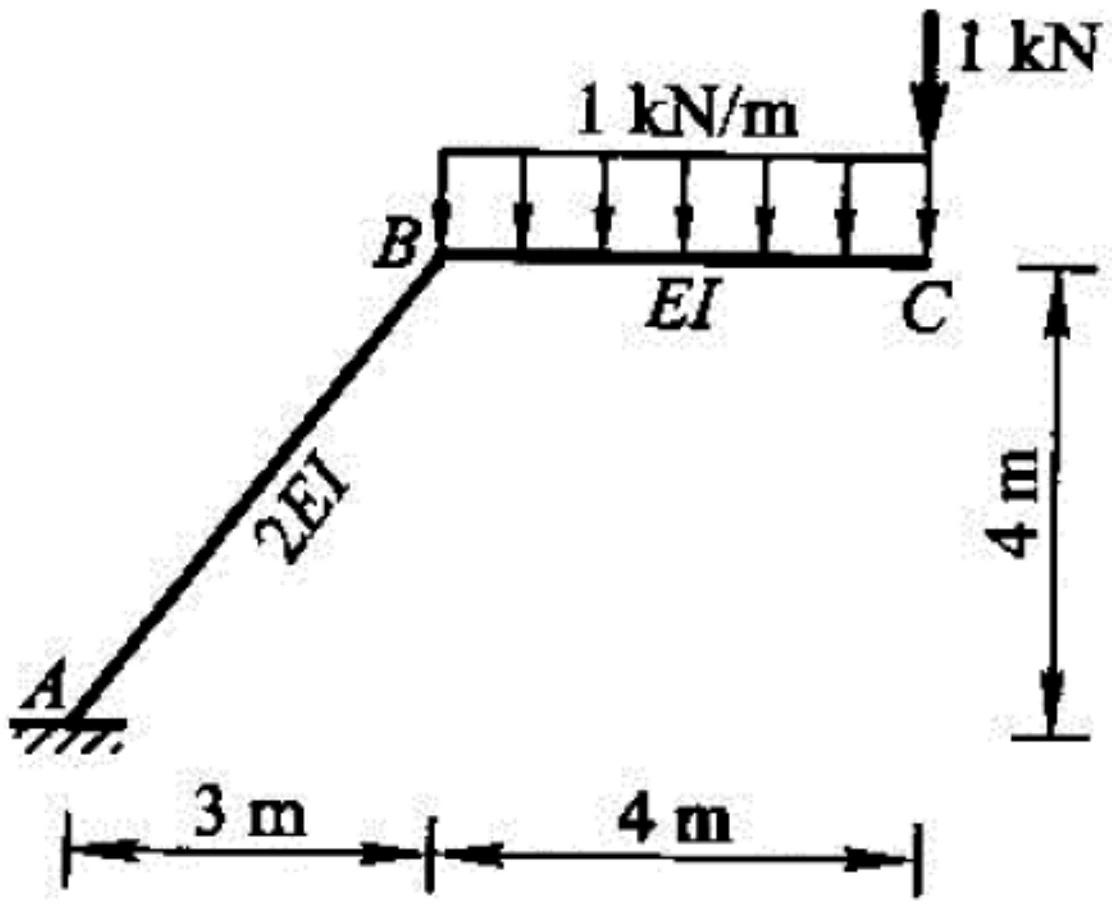


图 6-2-17（题 6-9）求 Δ_{Cy}

6-9 解：在 C 点处施加单位集中力 F＝1，画出对应的弯矩图 $\overline{M}$，与原结构在外荷载下的弯矩图 M_P，如图 6-2-18 所示，应用图乘法，即得到 C 点的竖向位移 Δ_{Cy}。

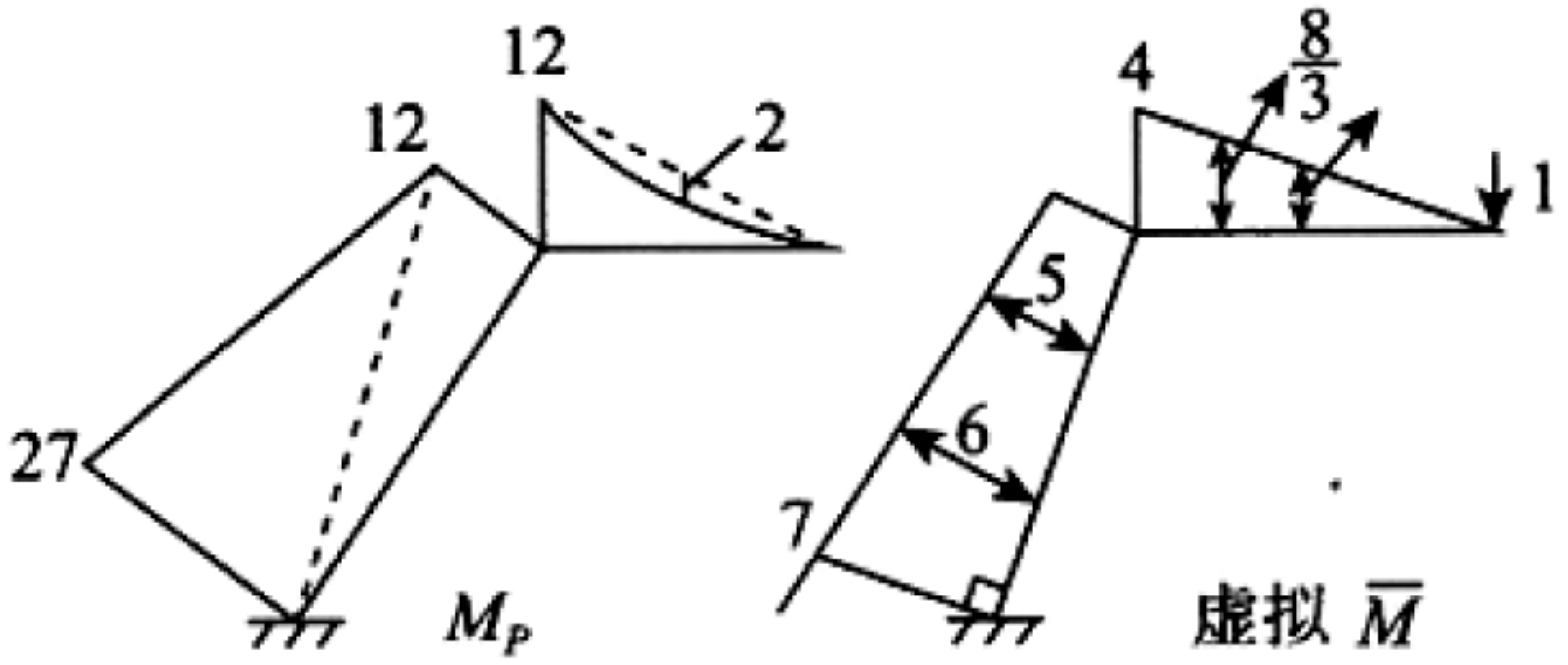


图 6-2-18

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\left(\frac{12\times4}{2}\times\frac{8}{3}-\frac{2\times2\times4}{3}\times2\right)+\frac{1}{2EI}\left(\frac{12\times5}{2}\times5+\frac{75\times5}{2}\times6\right)$$

$$=\frac{1985}{6EI}=\frac{330.8}{EI}\ (\downarrow)$$

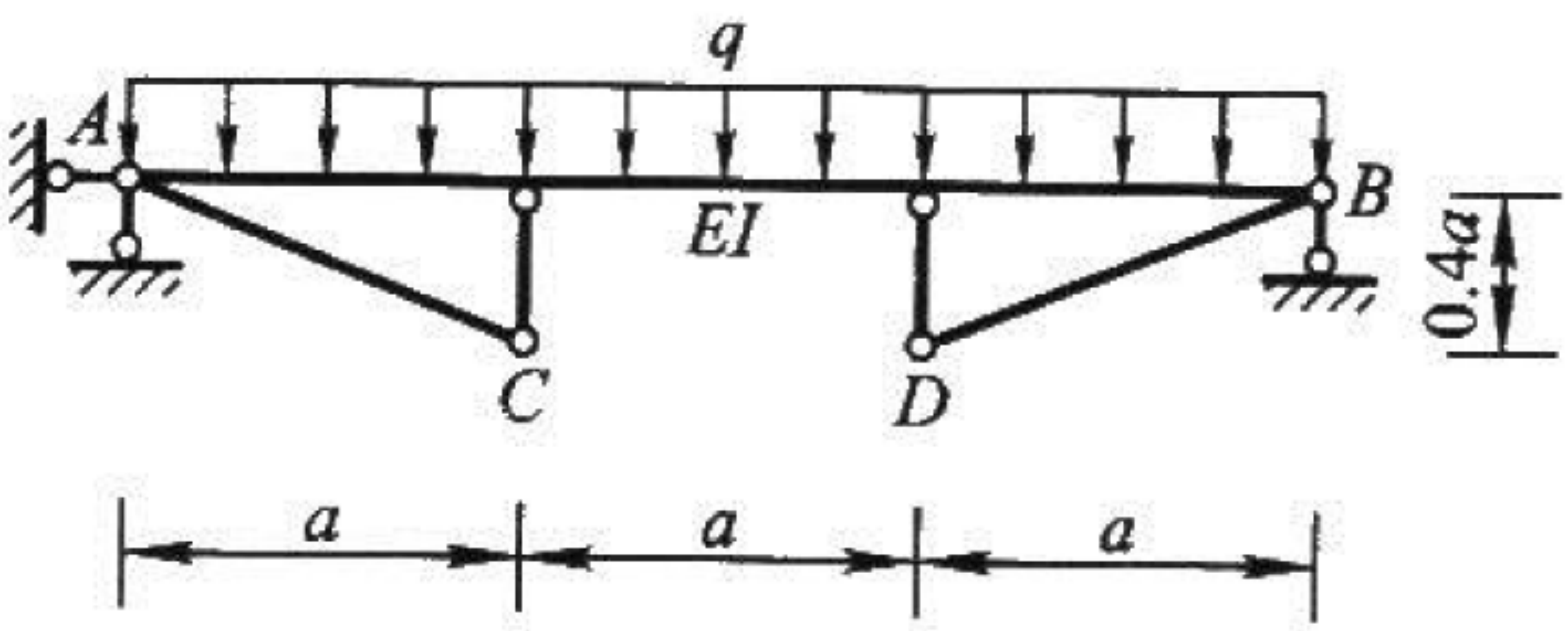


图 6-2-19（题 6-10）求 C、D 两点距离改变

6-10 解：求 CD 两点距离改变，在 C、D 两点加相对方向的力 $\overline{M}_C=\overline{M}_P=1$，求出虚拟状态弯矩 $\overline{M}$。对于实际状态，桁架杆为零杆，故易画出 M_P 图，如图 6-2-20 所示。应用图乘法计算，具体如下

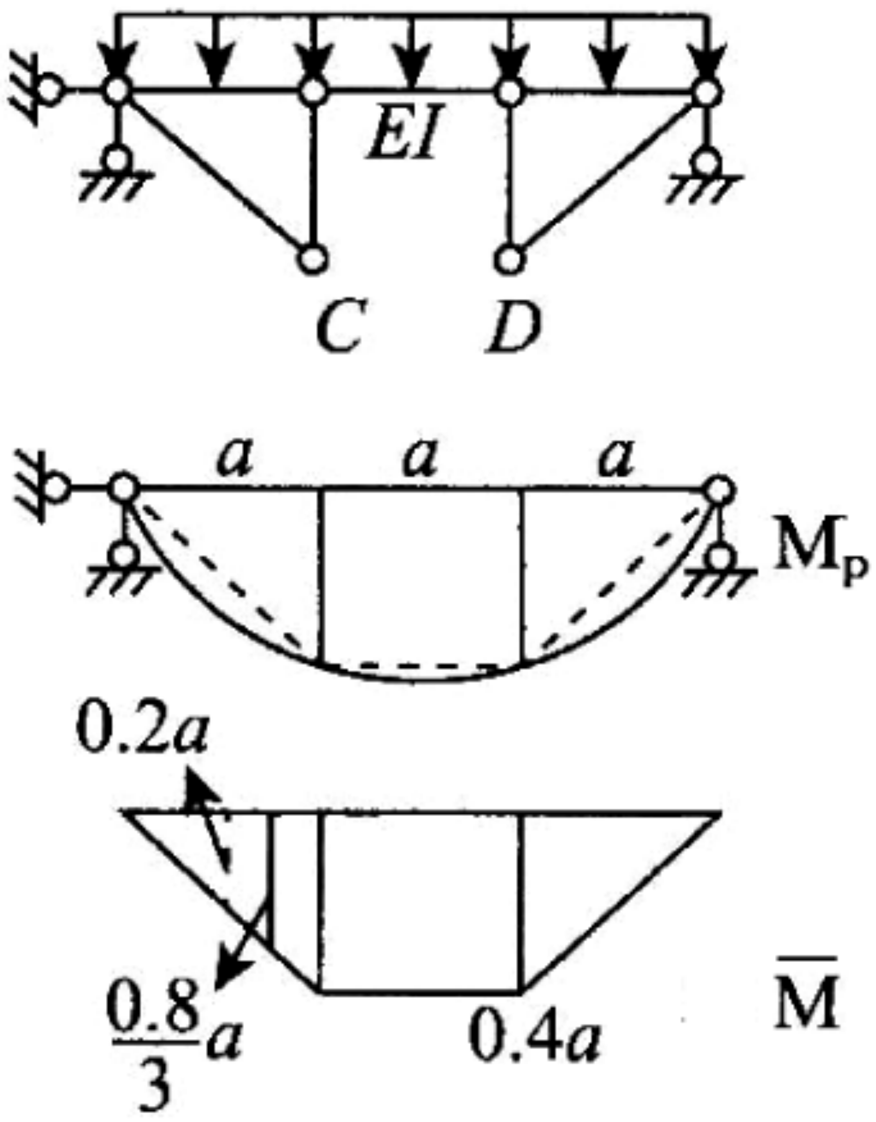


图 6-2-20

$$\triangle_{CD}=\frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot\frac{0.8}{3}a+\frac{2}{3}\cdot\frac{qa^2}{8}\cdot a\cdot 0.2a\right)+\left(qa^2\cdot a+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}qa^2\cdot a\right)0.4a\right]$$

$$=\frac{qa^4}{EI}\left[2\left(\frac{0.8}{6}+\frac{0.1}{6}\right)+\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 0.4\right]$$

$$=\frac{qa^4}{EI}\left[\frac{9}{30}+\frac{13}{30}\right]=\frac{11}{15}\frac{qa^4}{EI}\text{（离开）}$$

6-11　求 $\boldsymbol{\Delta}_{Cx}$，$\boldsymbol{\Delta}_{Cy}$，$\boldsymbol{\varphi}_D$，并勾绘变形曲线。

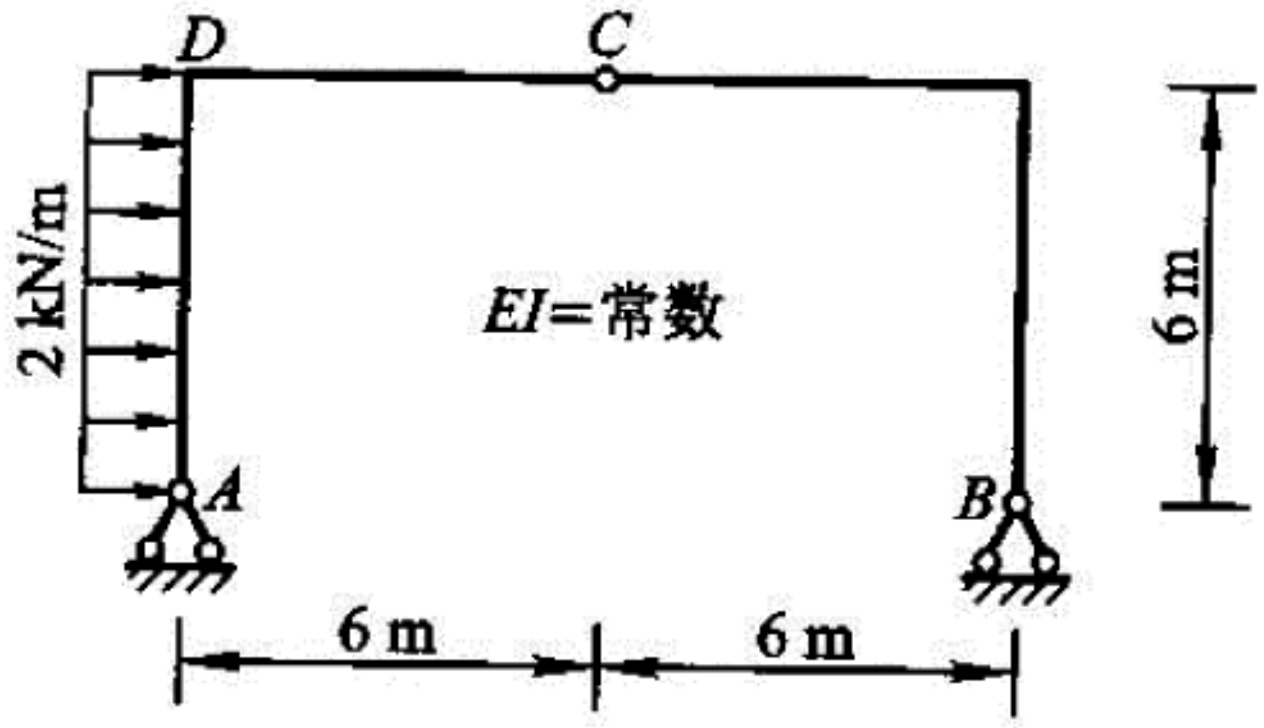


图 6-2-21（题 6-11）

解：在 C 点加上向右方向的力，利用图乘法可以求出 Δ_{Cx}，同理可以求出 Δ_{Cy}、φ_D，对应的实际状态和虚拟状态的弯矩图如图 6-2-22 所示，利用图乘法求解。

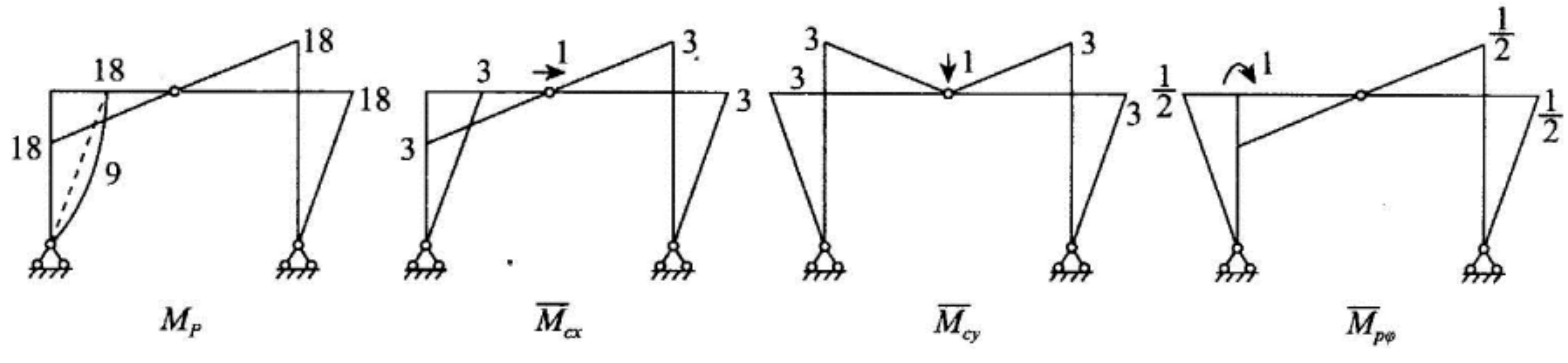


图 6-2-22

计算位移 Δ_{Cx}、Δ_{Cy}、φ_D 具体步骤如下

$$\triangle_{Cx}=\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}\times9\times6\times\frac{3}{2}+4\times\left(\frac{18\times6}{2}\times2\right)\right]=\frac{486}{EI}(\rightarrow)$$

$$\triangle_{Cy}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{2}{3}\times9\times6\times\frac{3}{2}+0\right]=-\frac{54}{EI}(\uparrow)$$

$$\varphi_D=\frac{1}{EI}\left[-\frac{2}{3}\times9\times6\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{18\times6}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{27}{EI}\text{（顺时针）}$$

根据上述计算位移 Δ_{Cx}、Δ_{Cx}、φ_D 的结果，可以绘制出结构的变形曲线图如图 6-2-23 所示。

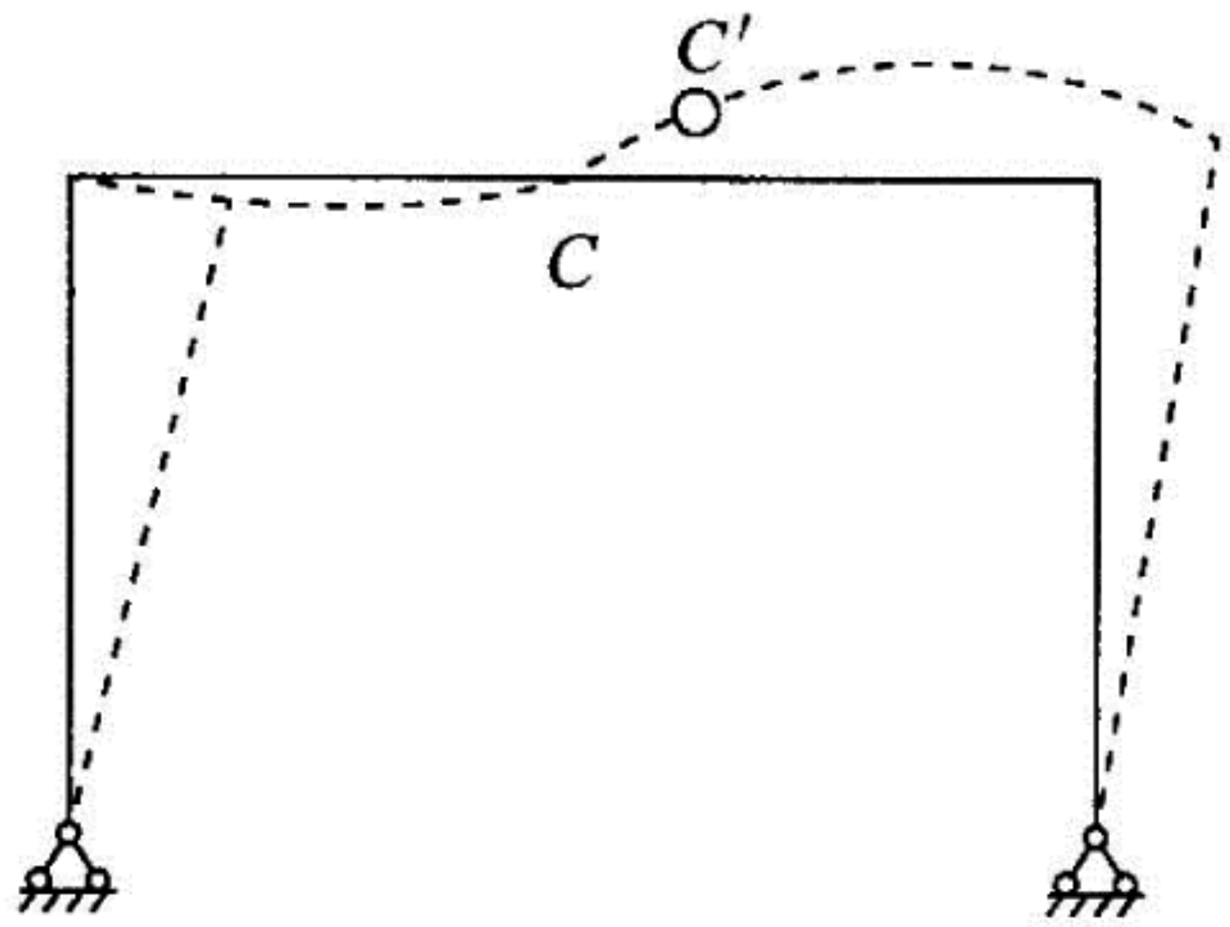


图 6-2-23

6-12 求铰 C 左右两截面相对转角及 CD 两点距离改变，并勾绘变形曲线。

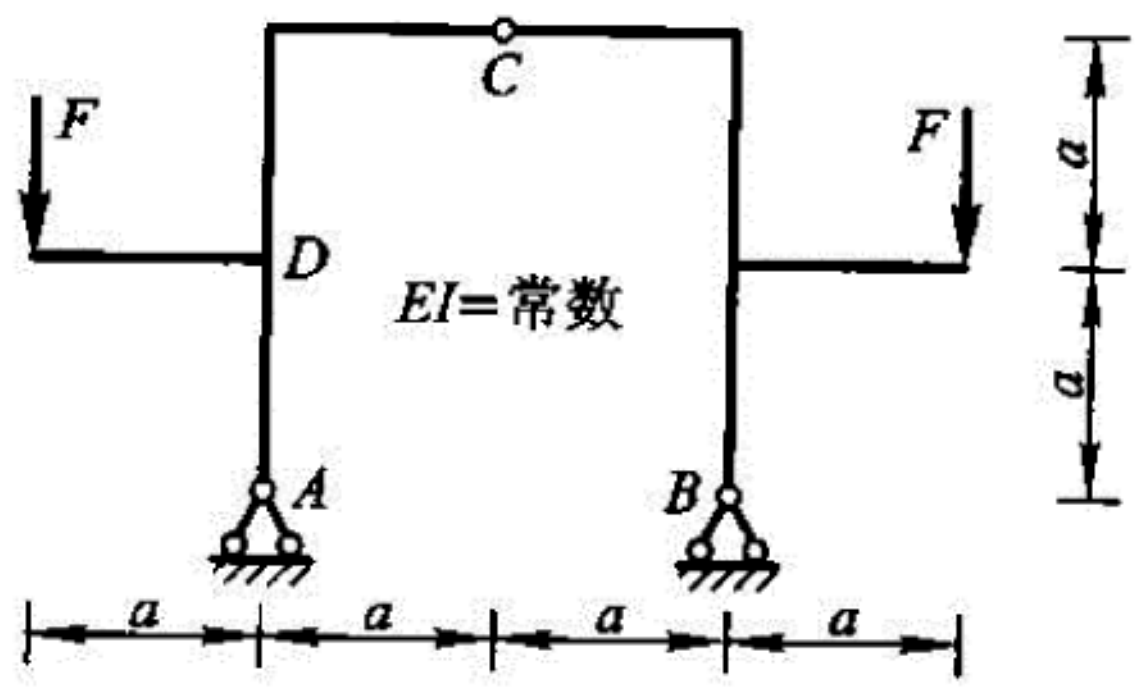


图 6-2-24（题 6-12）

解：求 C 点左右两截面相对转角，须在 C 点加一对单位力偶（反向）；求 C、D 两点距离的改变，在 C、D 两点连一直线，加上一相对方向的单位集中力即可。作出对应的弯矩图 $\overline{M}_{\varphi C}$、$\overline{M}_{CD}$，与实际荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 6-2-25 所示，应用图乘法求解。

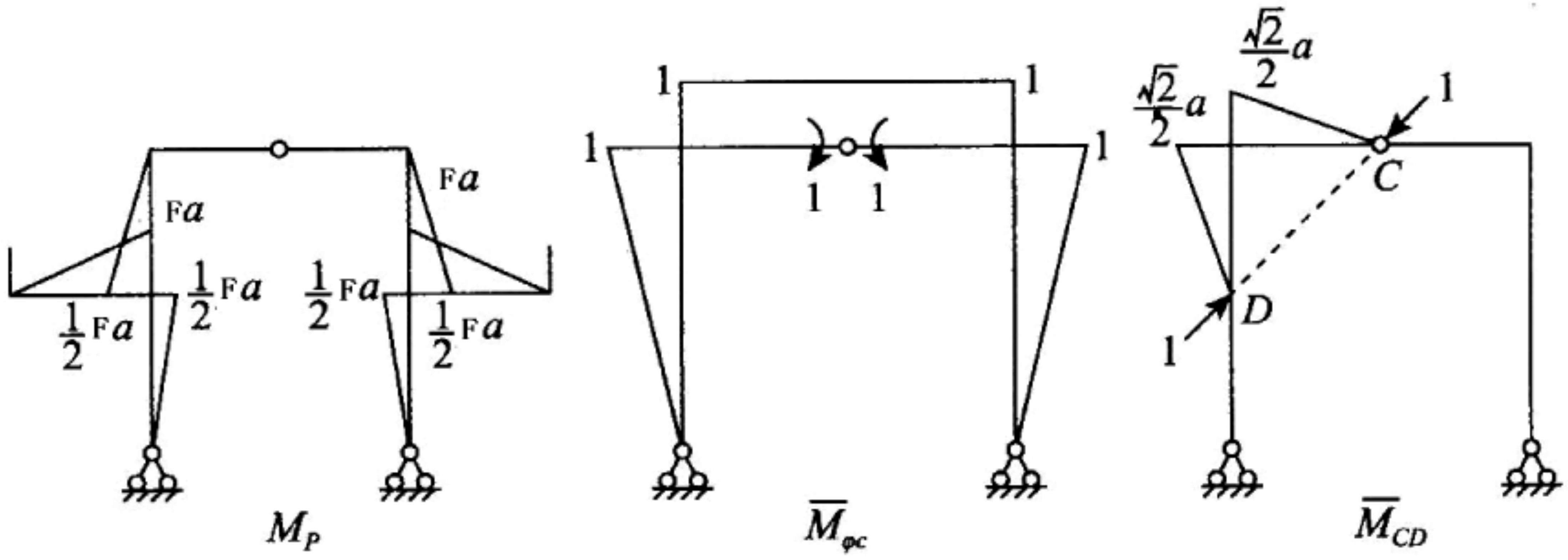


图 6-2-25

具体计算步骤如下

$$\triangle_{\varphi C}=\frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Fa\cdot a\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{Fa^2}{6EI}\text{（下边角度增大）}$$

$$\triangle_{CD}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Fa\cdot a\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{24}\frac{Fa^3}{EI}\text{（缩短）}$$

根据求解出的 $\Delta_{\phi C}$、Δ_{CD} 位移值，画出变形曲线，如图 6-2-26 所示。

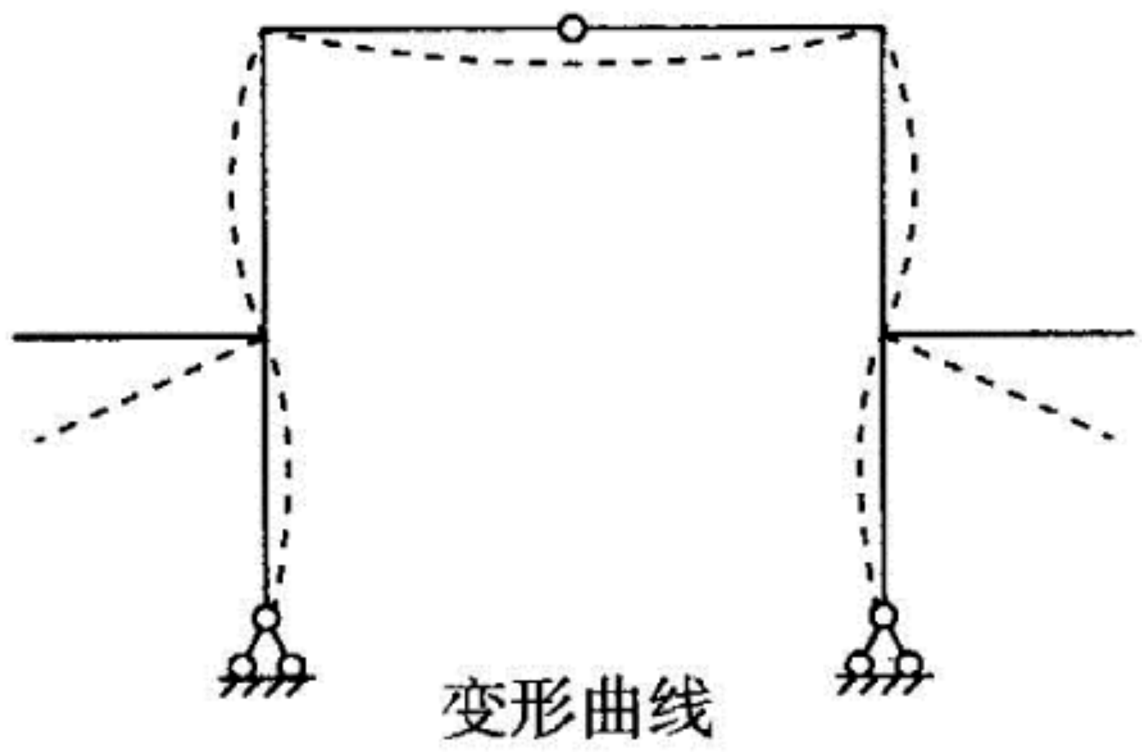


图 6-2-26

6-13　求 AB 两点相对水平位移，并勾绘变形曲线。

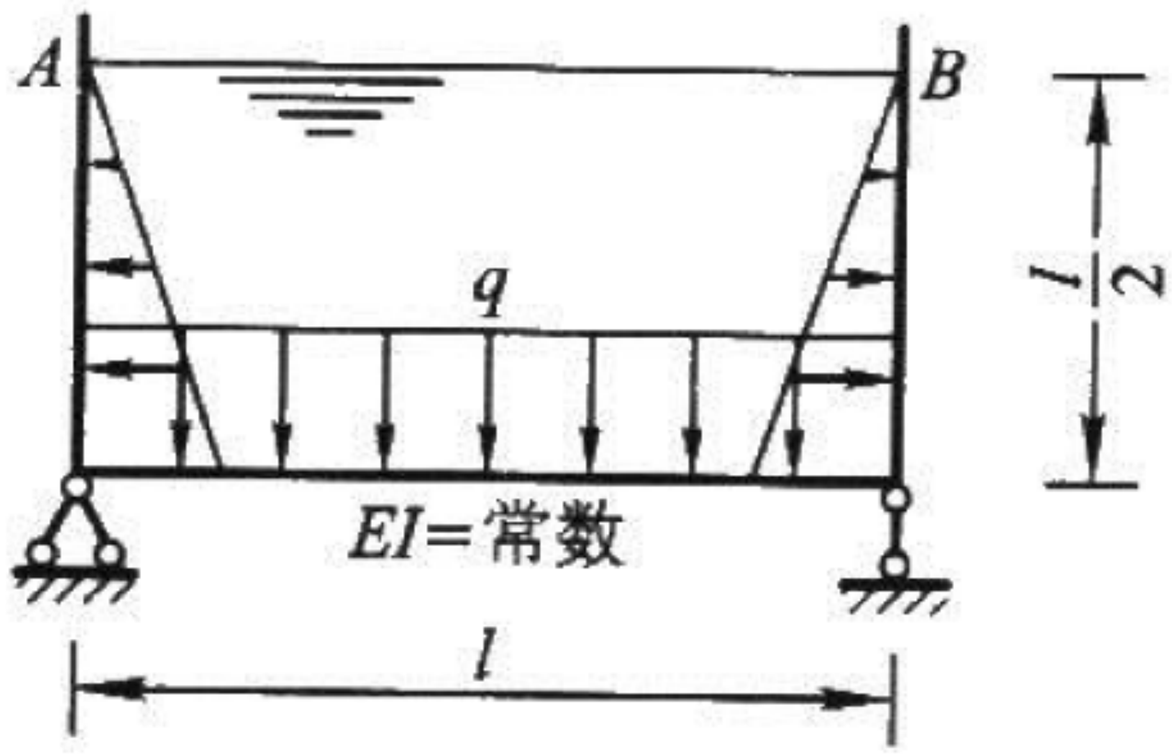


图 6-2-27（题 6-13）

解：在 AB 两端施加一对反向的单位力，作出对应的弯矩图，如图 6-2-28 所示，应用图乘法计算 AB 两点的相对水平位移 Δ_{AB}（注意竖向刚架为 3 次抛物线）。

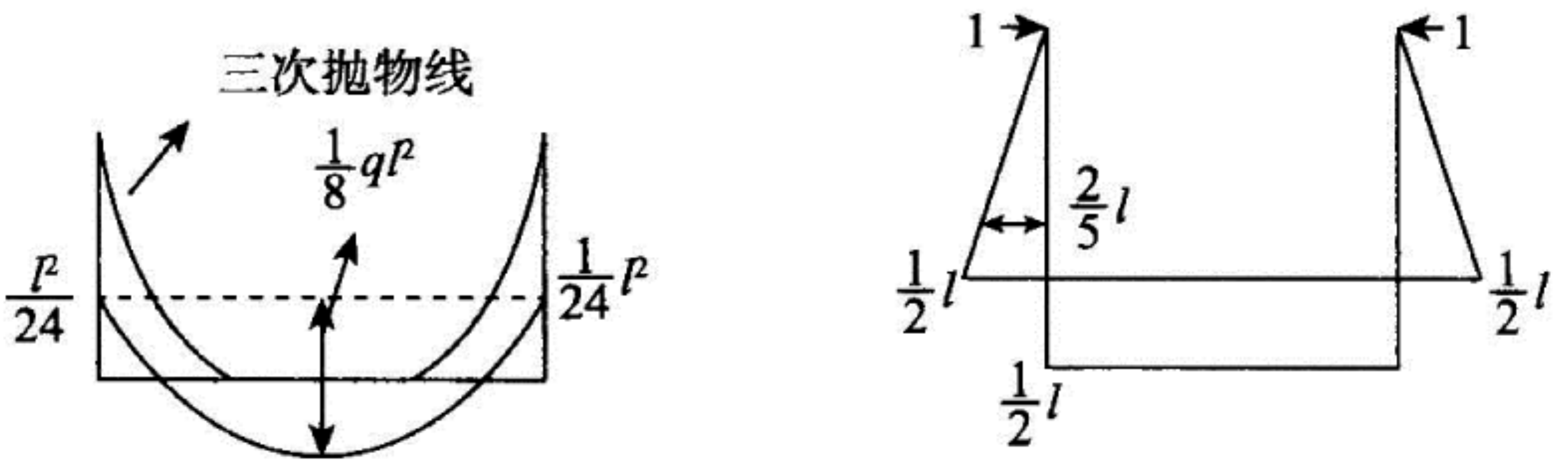


图 6-2-28

$$\triangle_{AB}=\frac{1}{EI}\left[-2\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{24}ql^2\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{2}{5}l+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2\cdot l-\frac{1}{24}ql^2\cdot l\right)\cdot\frac{1}{2}l\right]=\frac{ql^4}{60EI}\quad\text{（靠拢）}$$

根据计算出的相对水平位移 Δ_{AB} 以及结构的对称特性，画出变形曲线如图 6-2-29 所示。

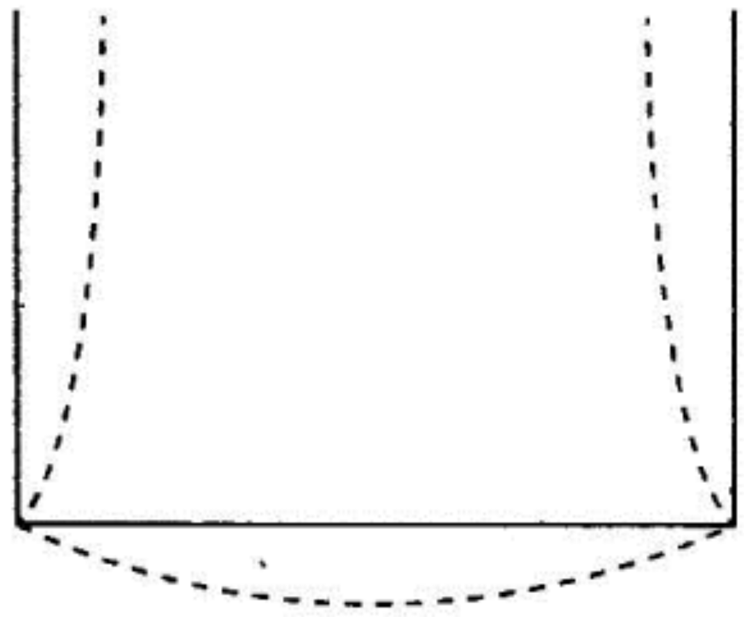


图 6-2-29

6-14　图示梁 EI＝常数，在荷载 F 作用下，已测得截面 A 的角位移为 0.001rad（逆时针）。试求 C 点的竖向线位移。

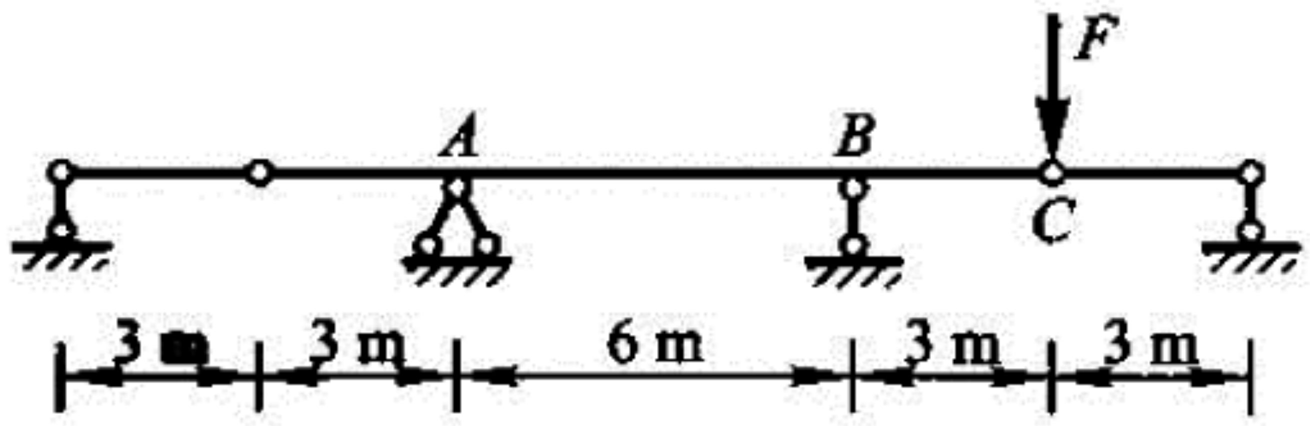


图 6-2-30（题 6-14）

解：由 A 点位移已知，求 C 点竖向位移；需要先列出 A 点位移表达式，求出“未知”参量梁的刚度 EI 和外荷载 F，分别在 A 施加单位力偶、C 点施加单位力，作出对应的弯矩图$\bar{M}_A$和$\bar{M}_C$，如图 6-2-31 所示。应用图乘法求解

$$\varphi_A=\frac{1}{EI}\cdot\frac{3F\times 6}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3F}{EI}=0.001$$

进一步算得

$$\triangle_{Cy}=\frac{1}{EI}\left(\frac{3F\times 3}{2}\times 2+\frac{3F\times 6}{2}\times 2\right)$$
$$=\frac{27F}{EI}=0.009\ \text{m}$$

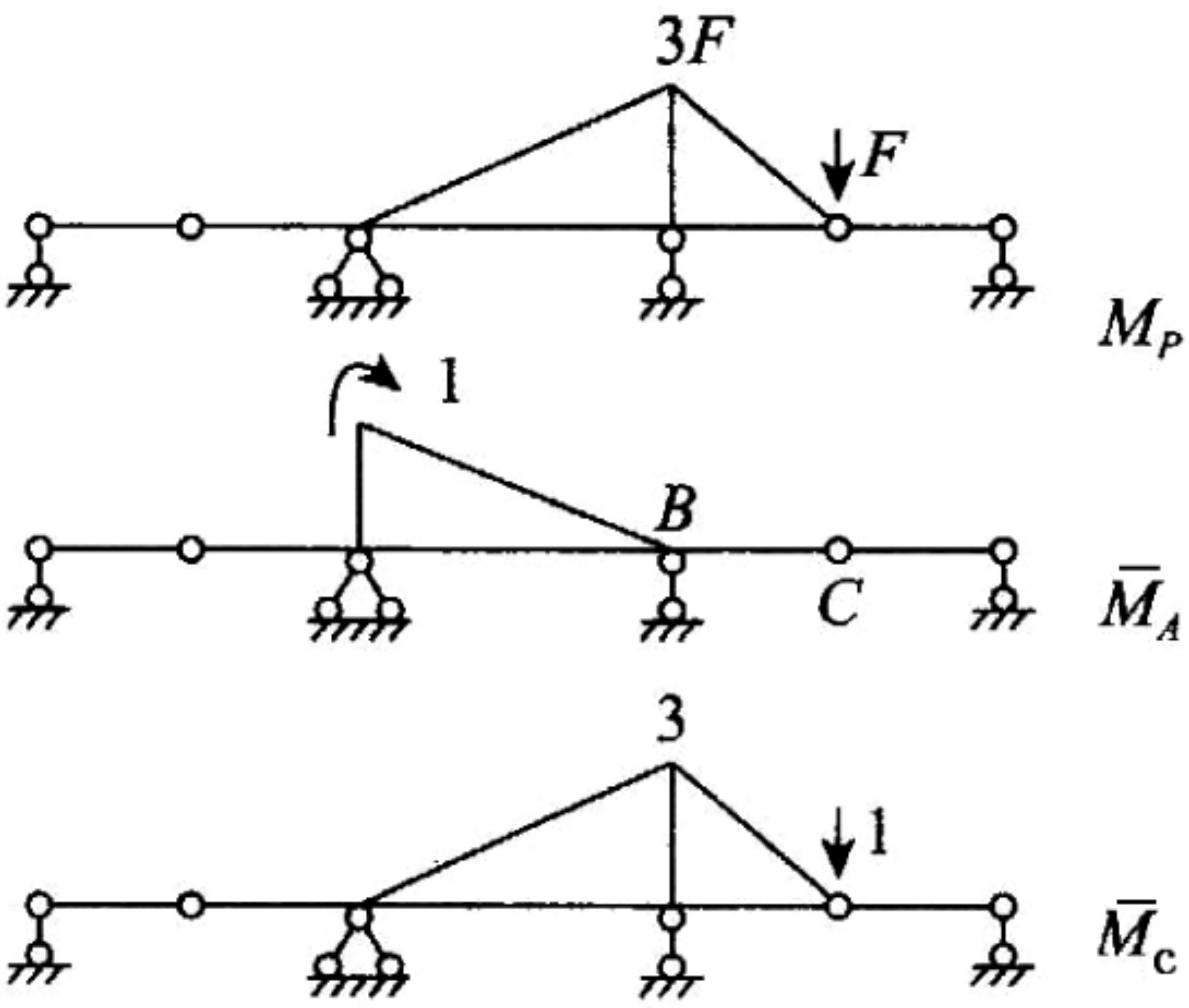


图 6-2-31

6-15　图示组合结构横梁 AD 为 20b 工字钢，$I=2500cm^4$，拉杆 BC 为直径 20mm 的圆钢，材料的弹性模量 E＝210GPa，q＝5kN/m，a＝2m。试求 D 点竖向的位移。

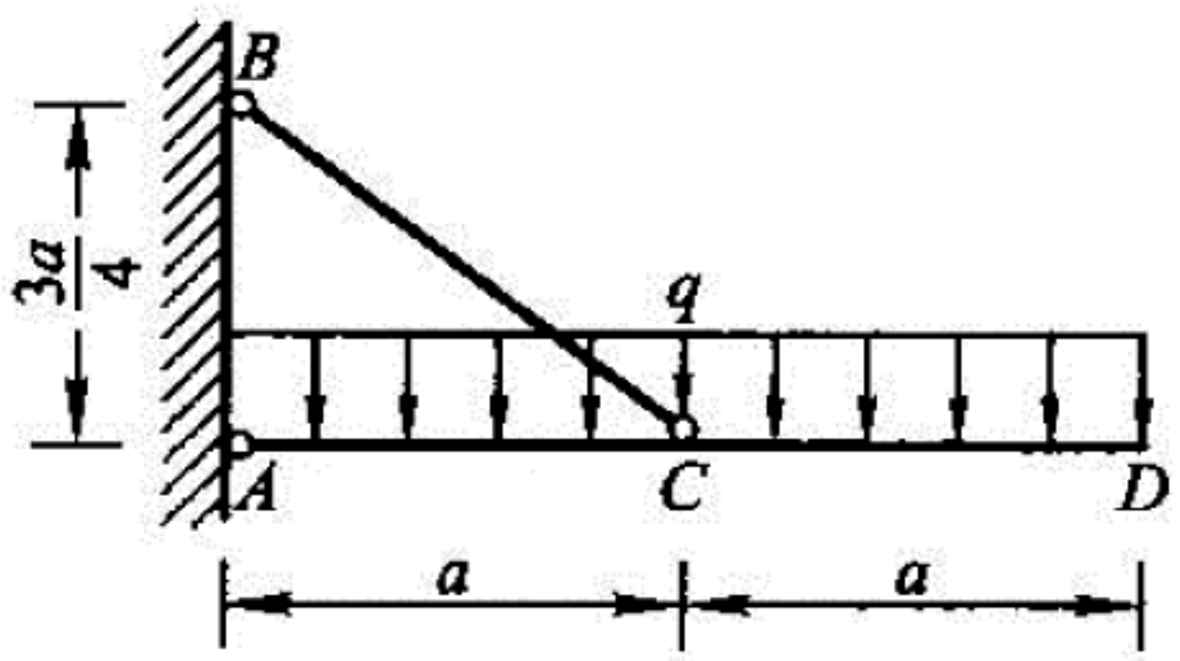


图 6-2-32（题 6-15）

解：在 D 点加一单位集中力 F＝1，作出对应的弯矩图$\overline{M}$；作出实际荷载下的弯矩图 M_P，如图 6-2-33 所示。应用图乘法求解，具体计算如下

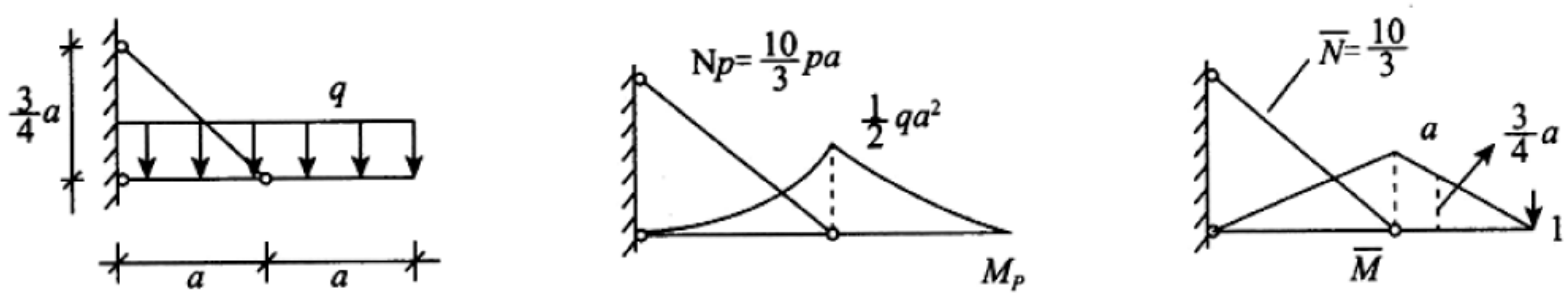


图 6-2-34

$$\triangle_{Dy}=\frac{2}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{qa^2}{2}\cdot a\cdot\frac{3}{4}a+\frac{1}{EA}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{10qa}{3}\cdot\frac{5}{4}a=\frac{qa^4}{4EI}+\frac{125}{q}\cdot\frac{qa^2}{EA}$$

$$=\frac{5\times10^3\times2^4}{4\times210\times10^9\times2500\times10^{-8}}+\frac{125}{9}\cdot\frac{5\times10^3\times2^2}{210\times10^9\times\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}}$$

$$=8.02\times10^{-3}\text{m}\ (\downarrow)$$

6-16　结构的温度改变如图所示，试求 C 点的竖向位移。各杆截面相同且对称于形心轴，其厚度为 h＝l/10，材料的线膨胀系数为 a。

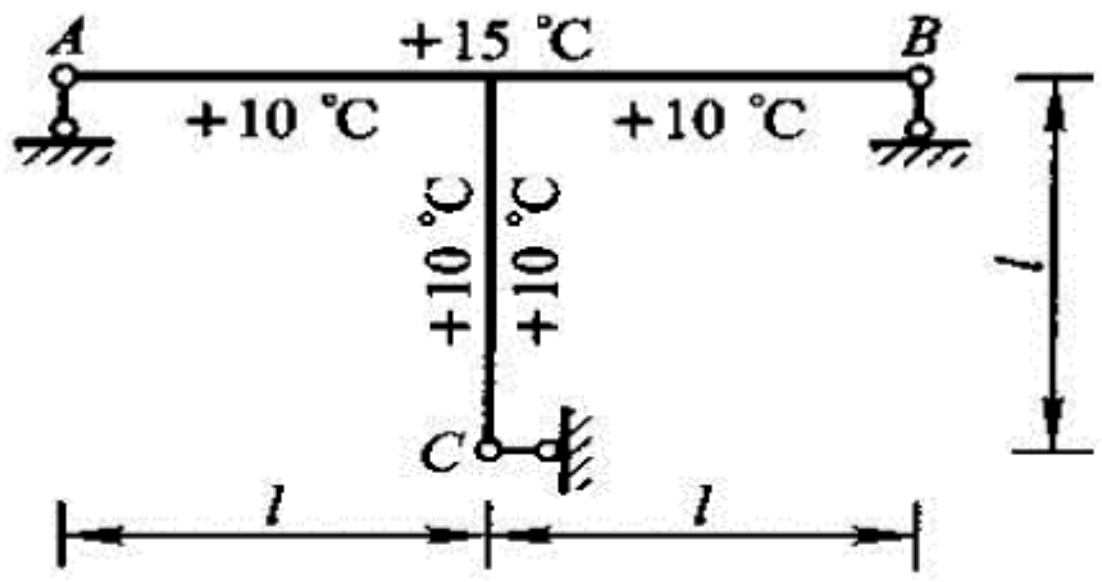


图 6-2-35（题 6-16）

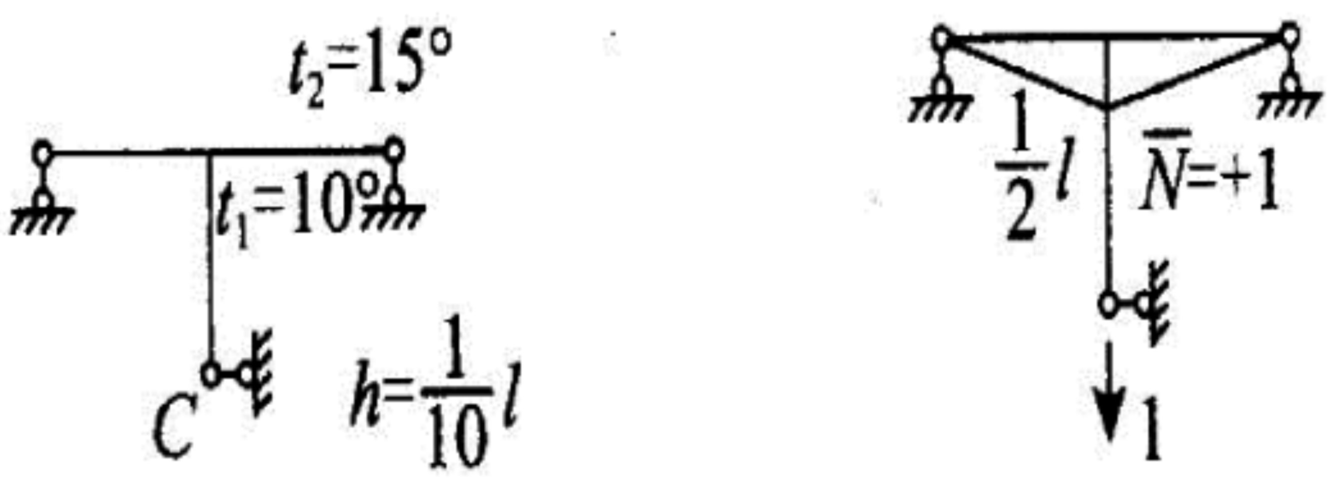


图 6-2-36（题 6-16 解图）

解：在 C 点施加向下单位荷载时，轴力仅存在于竖杆，标出轴力大小和画出弯矩图，如图 6-2-36 所示。

由题意知

$$t=\frac{10^\circ+10^\circ}{2}=10^\circ$$

$$\Delta t=t_2-t_1=15^\circ-10^\circ=5^\circ$$

带入公式可算得 C 点竖向位移Δ_{Cy}

$$\begin{aligned}\Delta_{Cy} &= \sum \alpha t N\cdot l+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int M\,\mathrm{d}s\\ &=\alpha\times 10\times 1\times l+\frac{\alpha}{h}\cdot 5\times\left(-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\right)\\ &=10\alpha l-25\alpha l=-15\alpha l(\uparrow)\end{aligned}$$

6-17　图示等截面简支梁上边温度降低 t，下边温度升高 t，同时两端有一对力偶 M 作用。若欲使梁端转角为零，M 应为多少？

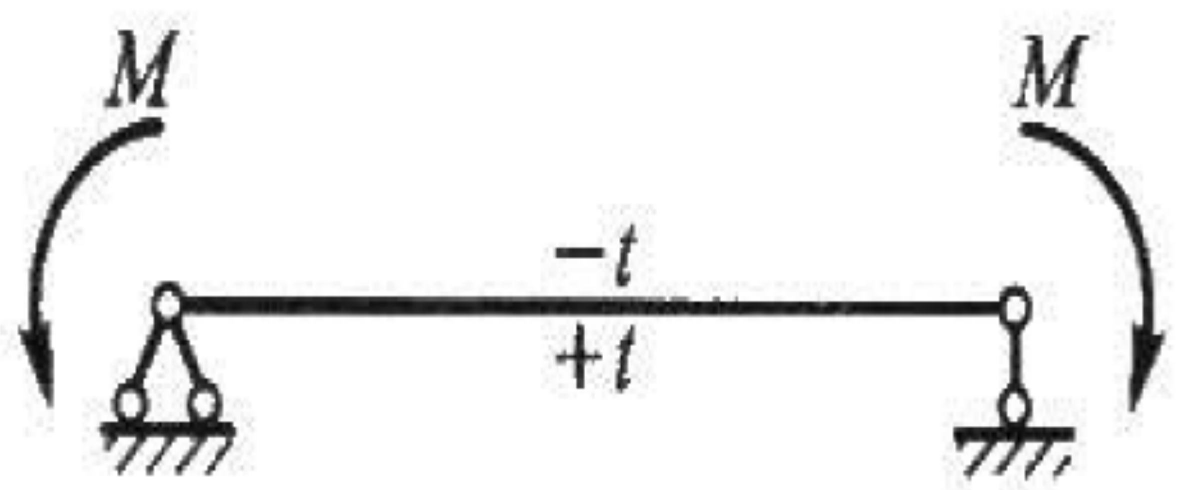


图 6-2-38（题 6-17）

解：该问题的实质仍然是求解位移的问题。可以将问题转化为温度和弯矩共同作用下，使梁端转角位移为 0，即 $\varphi_t+\varphi_m=0$。在梁端施加一个单位力偶，显然不会产生轴力，可做出弯矩图$\overline{M}$，如图 6-2-39 所示。

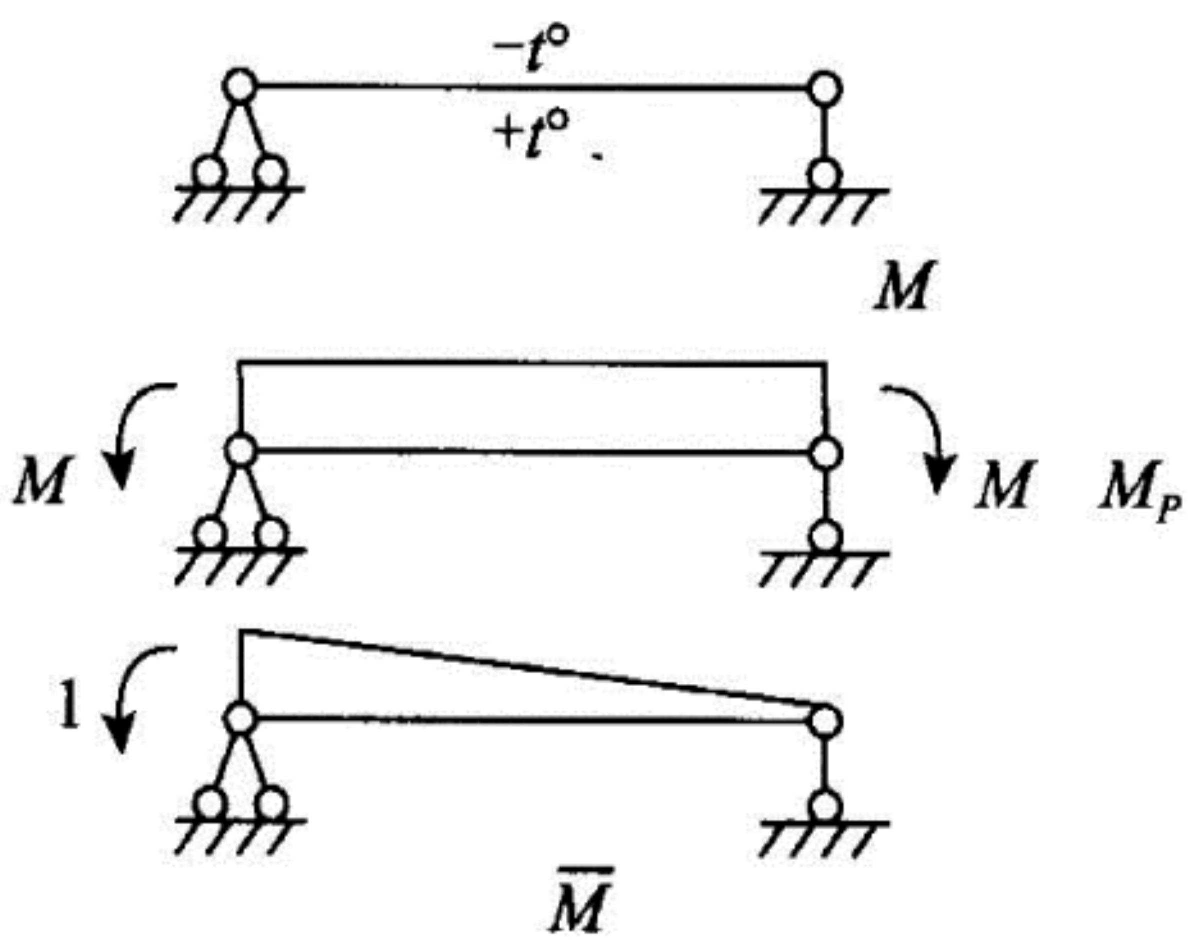


图 6-2-39

可由图乘法计算

$$\frac{\alpha}{h}(2t)\cdot\left(-\frac{l}{2}\right)+\frac{1}{EI}Ml\times\frac{1}{2}=0$$

解得

$$M=\frac{2\alpha tEI}{h}$$

6-18　在图示桁架中，AD 杆的温度上升 t，试求结点 C 的竖向位移。

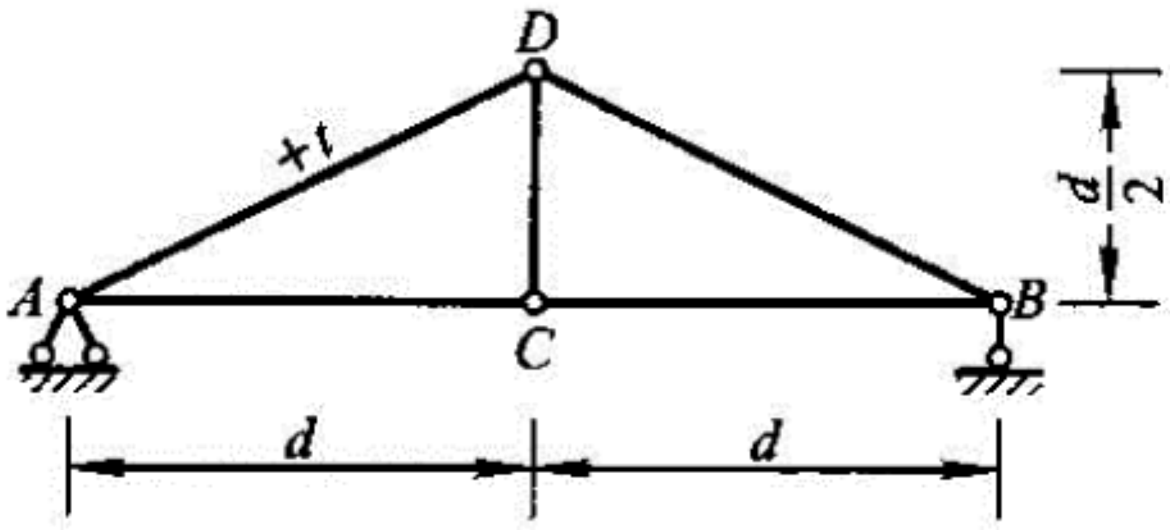


图 6-2-40（题 6-18）

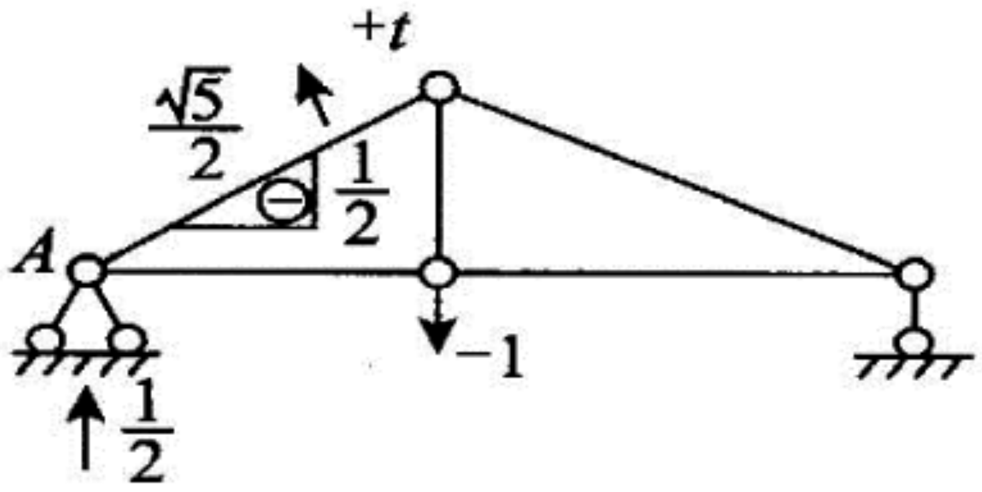


图 6-2-41

解：将问题转化为温度作用下的 C 点位移，在 C 处施加一单位力，在图 6-2-41 中标出轴力，使用图乘法计算得 C 点位移 Δ_{Cy}

$$\triangle_{Cy}=\sum \alpha t A\omega \overline{F}_N=\alpha t\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}d=-\frac{5\alpha t\ d}{4}(\uparrow)$$

6-19　图为 48m 下承式铁路桁架桥简图。为了设置上拱度，在制造时将上弦杆每 16m 加长 16mm，试求由此引起的结点 E_3 的竖向位移。（注：实际制作时，为了制造安装方便，各上弦杆长度仍保持不变，而是在结点 A_1、A_3、A_1'处，将结点板上与上弦杆相联的钉孔位置外移 8mm 来达到上述目的。）

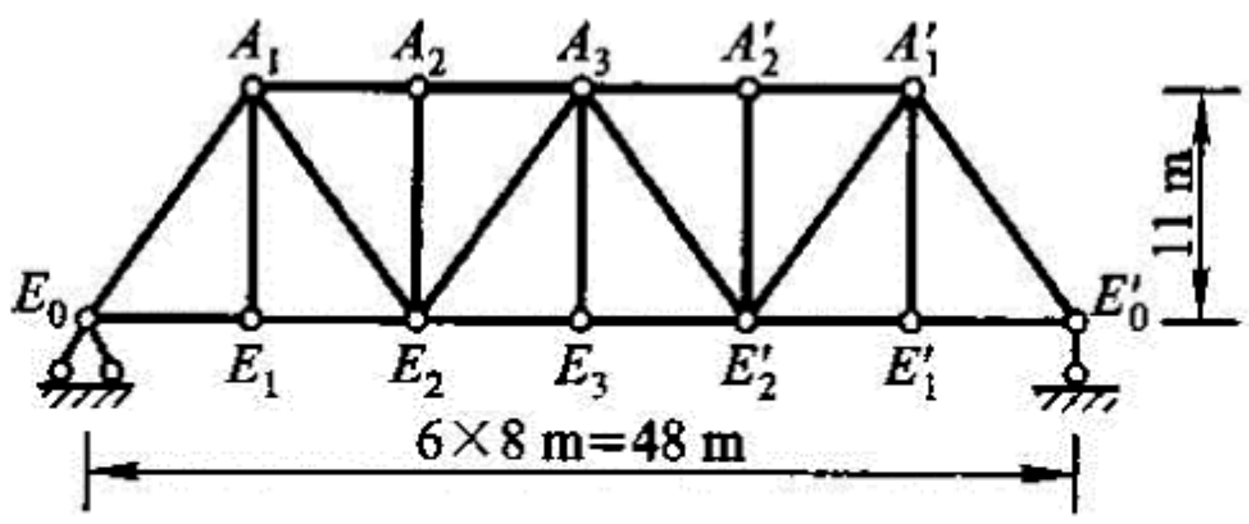


图 6-2-42（题 6-19）

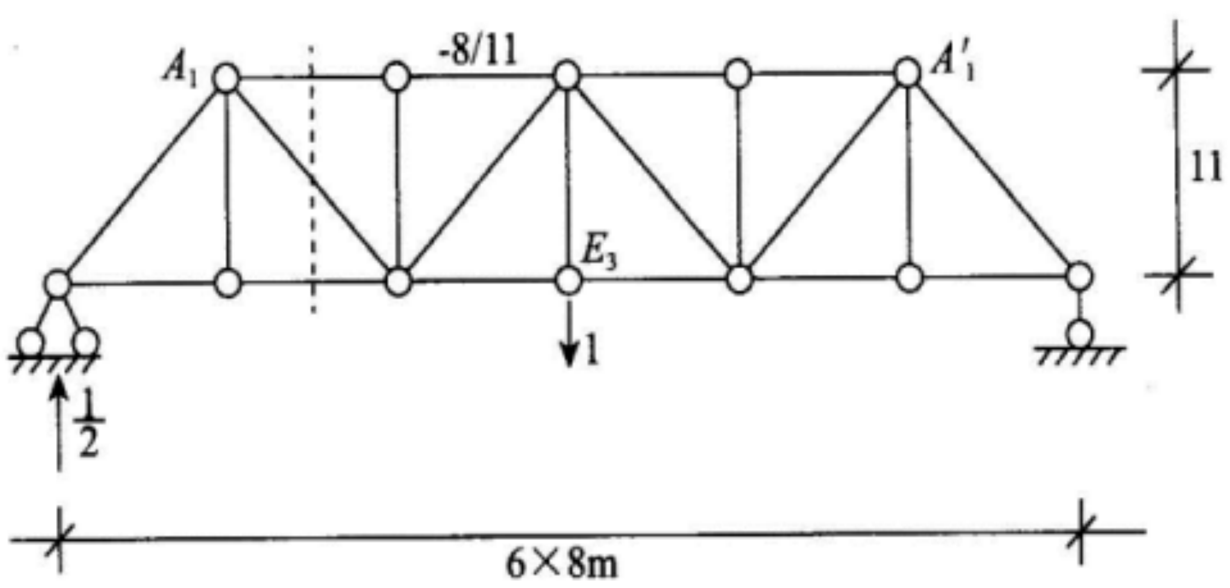


图 6-2-43

解：由制造误差引起的竖向位移的公式

$$\triangle E_3=\sum\overline{N}\cdot\triangle l$$

在 E_3 点施加单位力，求出上弦杆的轴力，标于图 6-2-43 上，带入计算公式得

$$\triangle E_3 = \sum \overline{N} \cdot \triangle l = 2 \times \left(-\frac{8}{11}\right) \times 16$$

$$= -23.27 \text{ mm} (\uparrow)$$

6-20　图示简支刚架支座 B 下沉 b，试求 C 点水平位移。

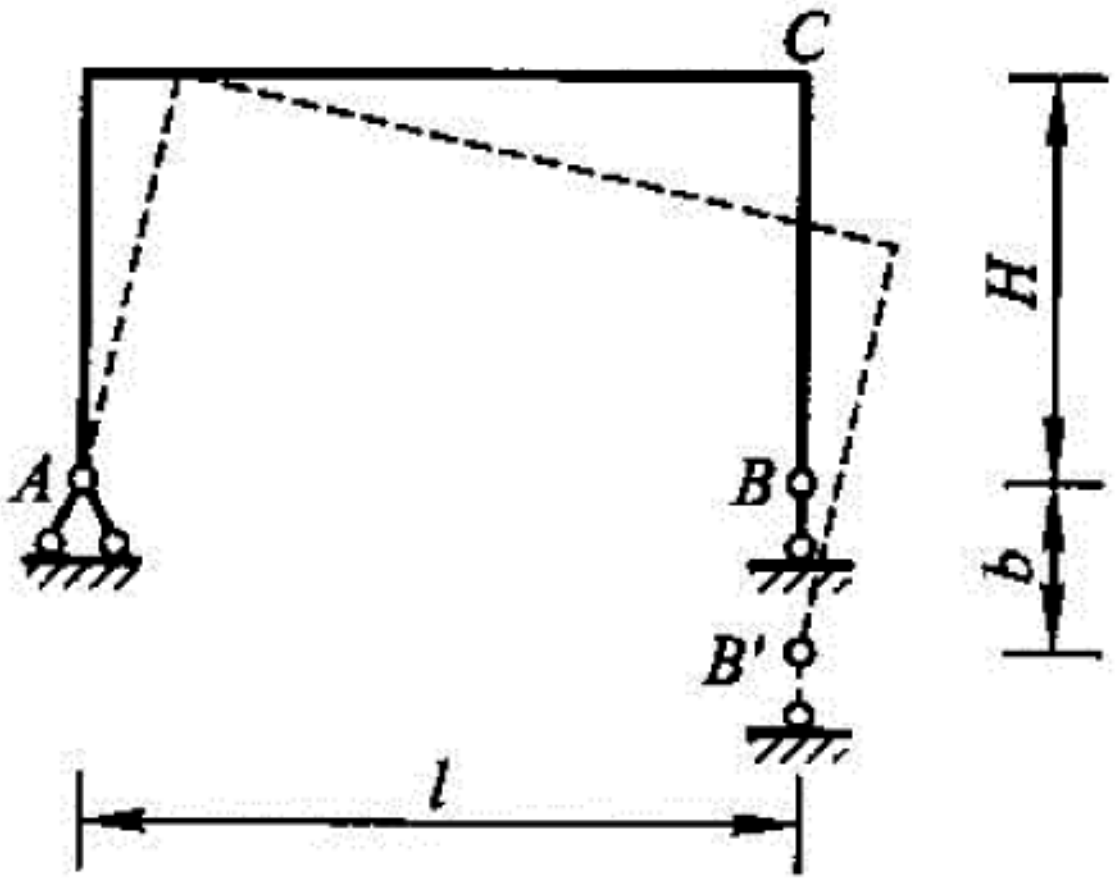


图 6-2-44（题 6-20）

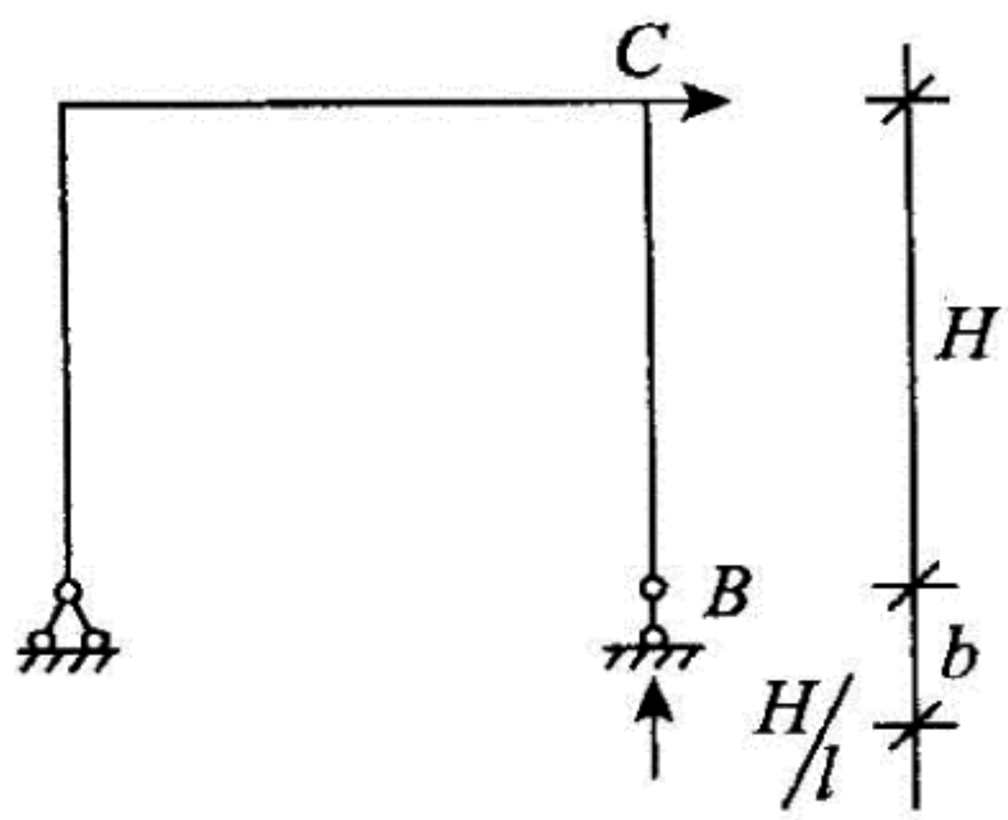


图 6-2-45（题 6-20 解图）

解：虚拟状态如图 6-2-45 所示，由静力计算易知

$$F_B = \frac{H}{l} (\uparrow)$$

故计算得到 C 点水平位移

$$\triangle_{Cx} = -\sum \overline{R}_C = -\left(-\frac{H}{l} \cdot b\right) = \frac{Hb}{l} (\rightarrow)$$

6-21　图示两跨简支梁 l=16m，支座 A、B、C 的沉降分别为 α=40mm、b=100mm、c=80mm。试求 B 铰左右两侧截面的相对角位移 φ。

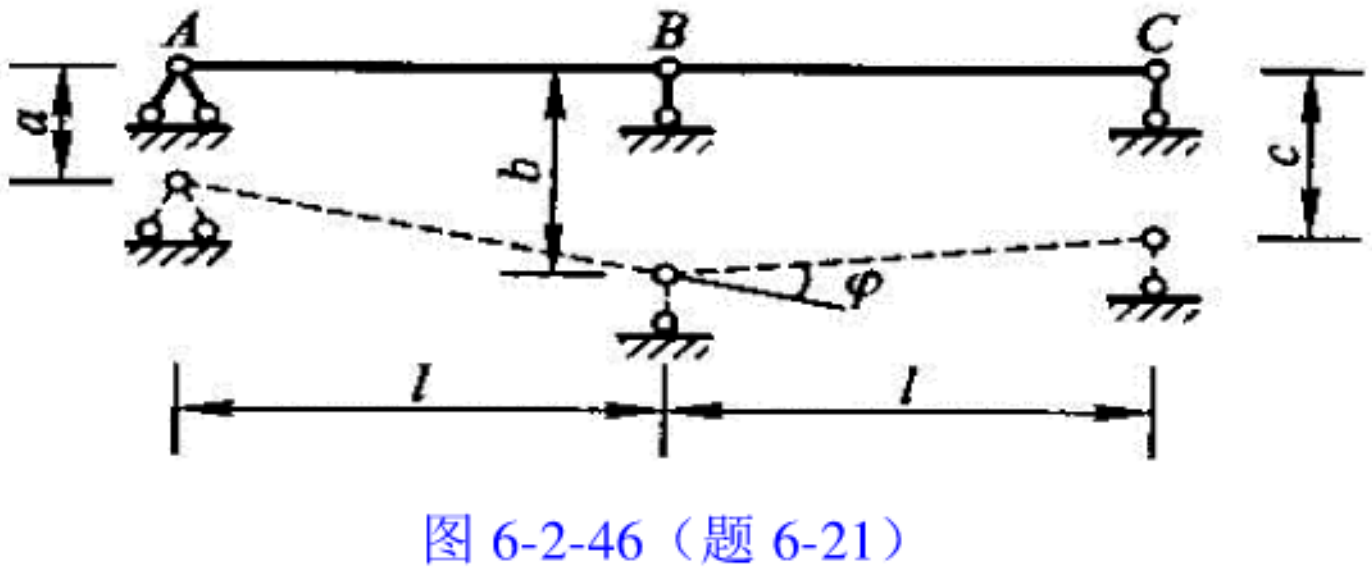


图 6-2-46（题 6-21）

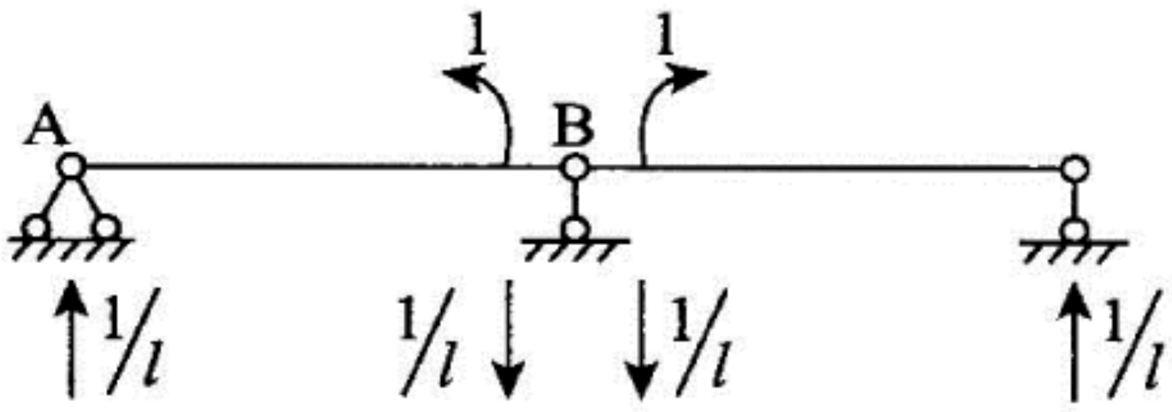


图 6-2-47

解：虚拟状态如图 6-2-47 所示，由静力可以求出各个虚拟力，带入公式计算得

$$\varphi=-\sum\overline{R}_C=-\left(-\frac{a}{l}+\frac{2b}{l}-\frac{c}{l}\right)=\frac{a-2b+c}{l}$$

$$=\frac{40-2\times100+80}{16\times1000}=-0.005\ \text{rad}\text{（上边角度减小）}$$

6-22　图示梁 EI＝常数，B 处有一弹性支座，弹簧的刚度系数（产生单位位移所需的力）为 k（注：弹簧的柔度系数，即单位力作用下的位移，是与刚度系数互为倒数的，即$f=\dfrac{1}{k}$）。试求 C 点竖向位移。已知$k=\dfrac{EI}{a^3}$。

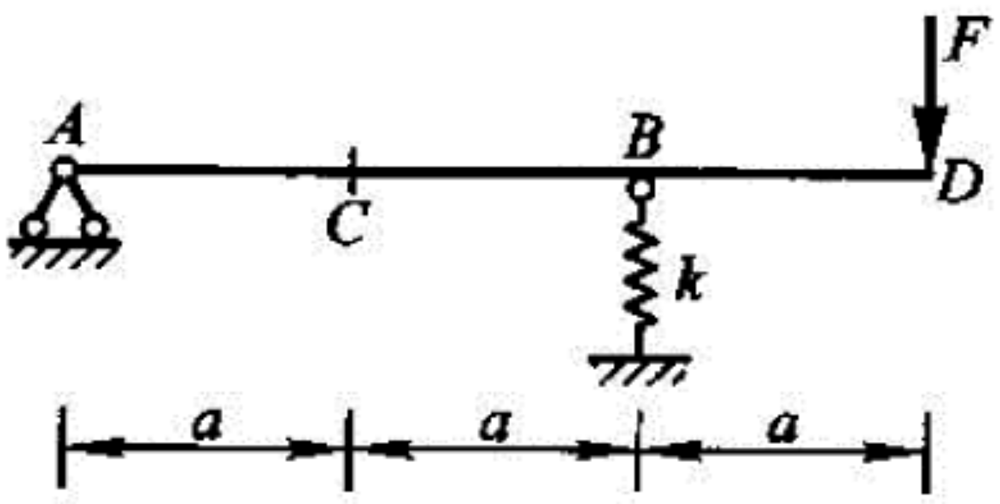


图 6-2-48（题 6-22）

解：由于 B 处为弹性支座，故 B 处有向下的位移。作出 M_P、$\overline{M}$ 图如图 6-2-49 所示。

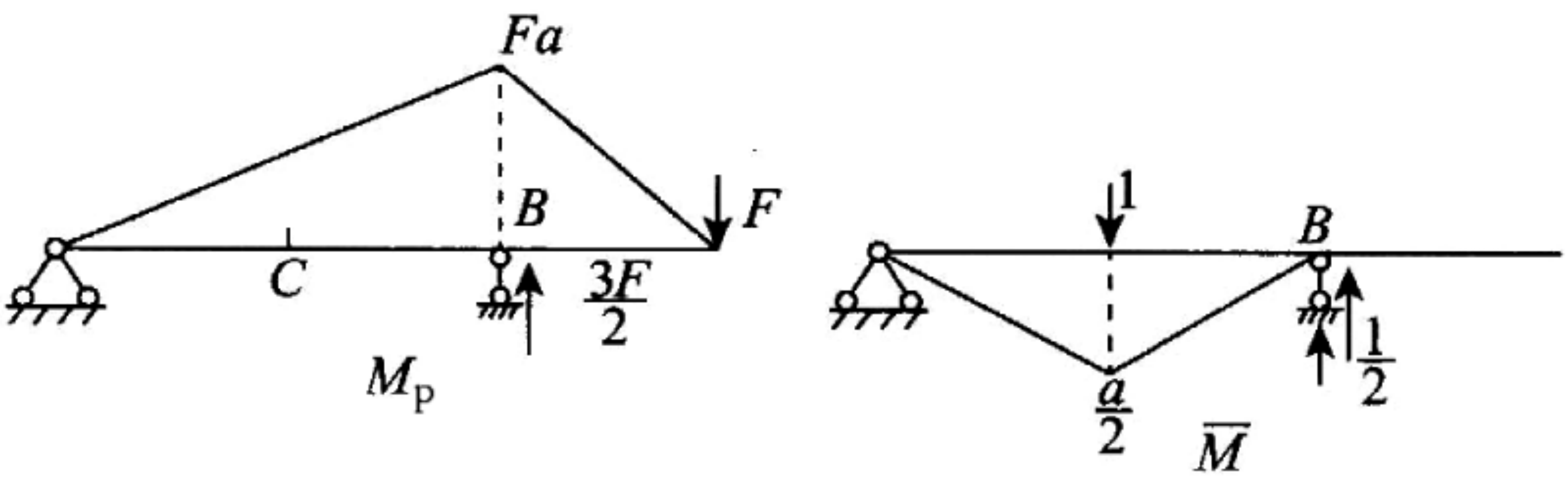


图 6-2-49

B 点位移 Δ_P，则

$$\Delta_P=\frac{F_B}{k}=\frac{3F}{2K}$$

在 C 处施加一单位力，则 C 点位移为

$$\Delta_{Cy}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s-\sum\overline{R}_C=-\frac{Fa^3}{4EI}-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{3F}{2K}\right)=\frac{Fa^3}{2EI}(\downarrow)$$

6-23　图为一水平面内的交叉梁系，A、E 两点为竖向简支，沿 LM 为固定。当 H 点有竖向荷载 10kN 作用时，已测得各结点竖向位移为：0.5mm（结点 B 和 D），0.6mm（结点 F、C、K），1mm（结点 G 与 J），1.2mm（结点 H），方向均向下。若有 100kN 竖向荷载平均分配于 15 个结点上时，H 点的竖向位移为多少？

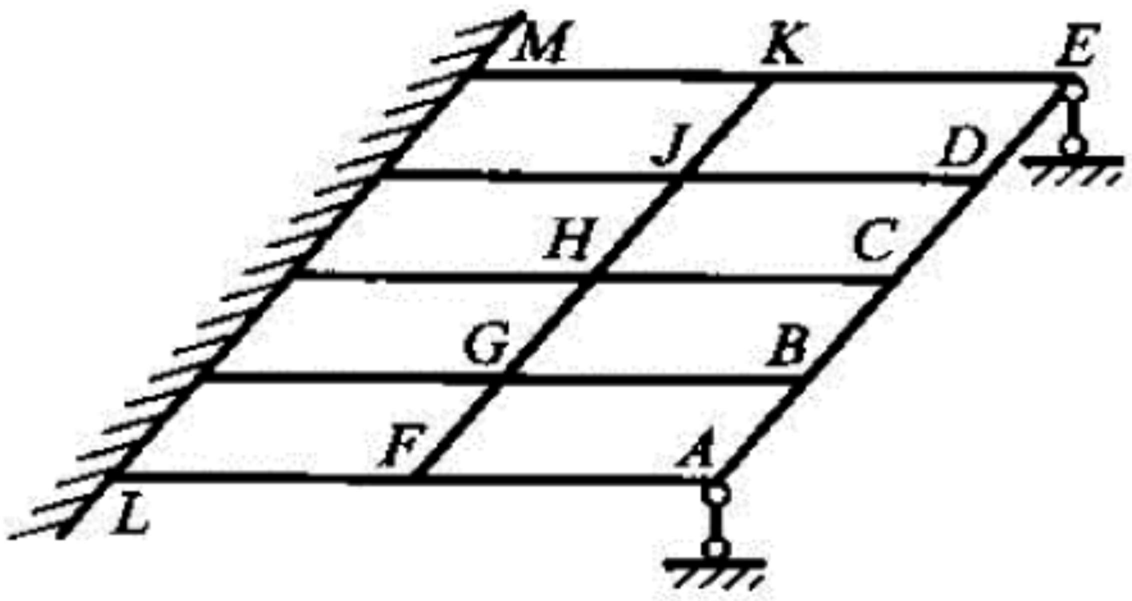


图 6-2-50（题 6-23）

解：由功的互等定理 $W_{12}=W_{21}$ 有

$$10\triangle H=\frac{100}{15}(2\times0.5+3\times0.6+2\times1+1.2)$$

解得 H 点的竖向位移

$$\Delta H=4\text{mm}（\downarrow）$$

6-24 结构分别承受两组荷载作用，如图 a、b 所示，下列等式中哪些是正确的？（各位移均以与相应广义力指向一致为正）。

（1）图 a 中 D 截面的转角＝图 b 中 C 点的水平位移；

（2）图 a 中 C 点的水平位移＝图 b 中 D 截面的转角；

（3）图 a 中 C 铰两侧截面相对转角＝图 b 中 D 点的水平位移；

（4）图 a 中 D 点水平位移＝图 b 中 C 铰两侧截面相对转角。

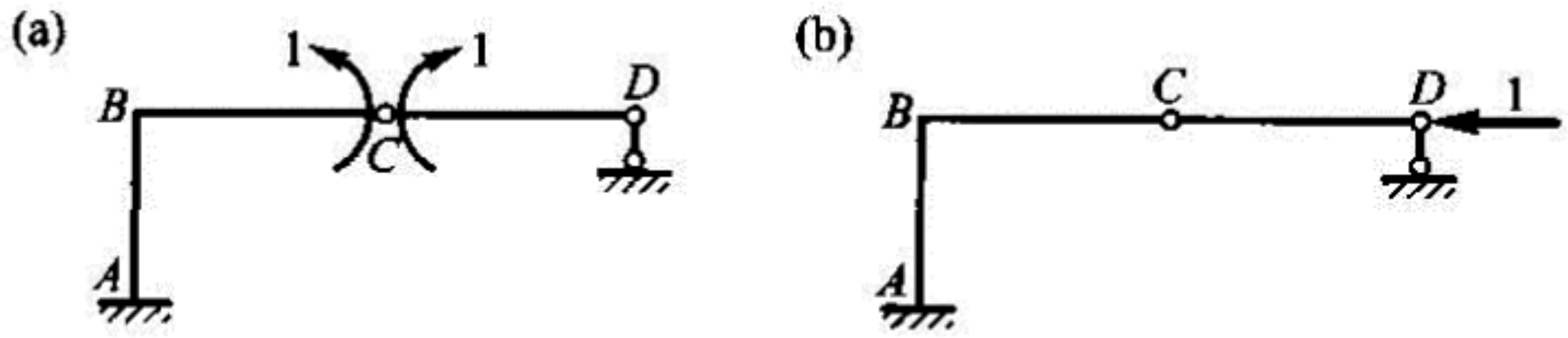


图 6-2-51（题 6-24）

答：由位移互等定理：第 2 个单位力所引起的第 1 个单位力沿其方向的位移，等于第 1 个单位力所引起的第 2 个单位力沿其方向的位移。本题中由 C 点处弯矩引起 C 点两侧截面相对转角等于 D 点水平力处的水平位移，故只有（4）为正确的。

6-25 图为一水平面内的刚架，∠ABC＝90°，BC 杆上承受竖向均布荷载 q。试求 C 点竖向位移。已知 q＝2kN/m，a＝0.6m，b＝0.4m，各杆均为直径 d＝30mm 的圆钢，E＝210GPa，G＝80GPa。

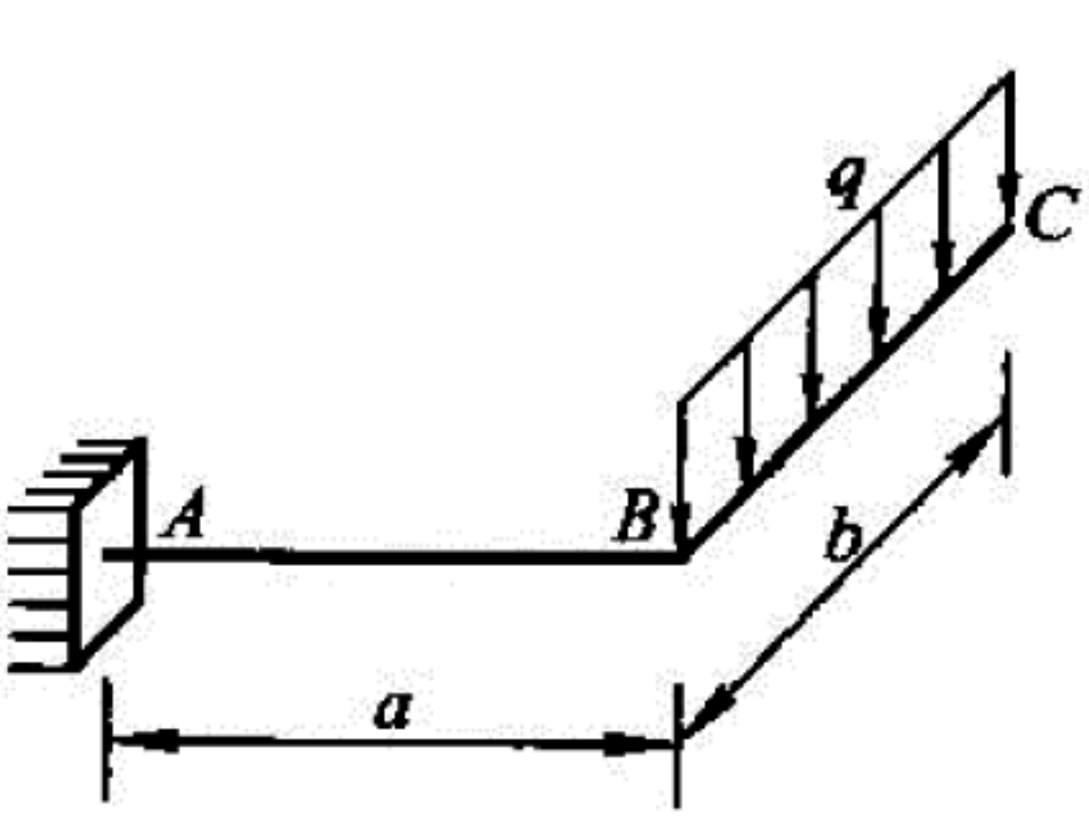


图 6-2-52（题 6-25）

解：本题为空间结构，应计算绕位于刚架平面内的主轴的弯矩和垂直于刚架平面的扭矩所产生的弯矩图，如图 6-2-53 所示。

空间结构的位移计算公式为

$$\triangle_{Kp} = \sum\int \frac{\overline{M}M_P}{EI}ds + \sum\int \frac{\overline{M}_tM_{tp}}{GIt}ds$$

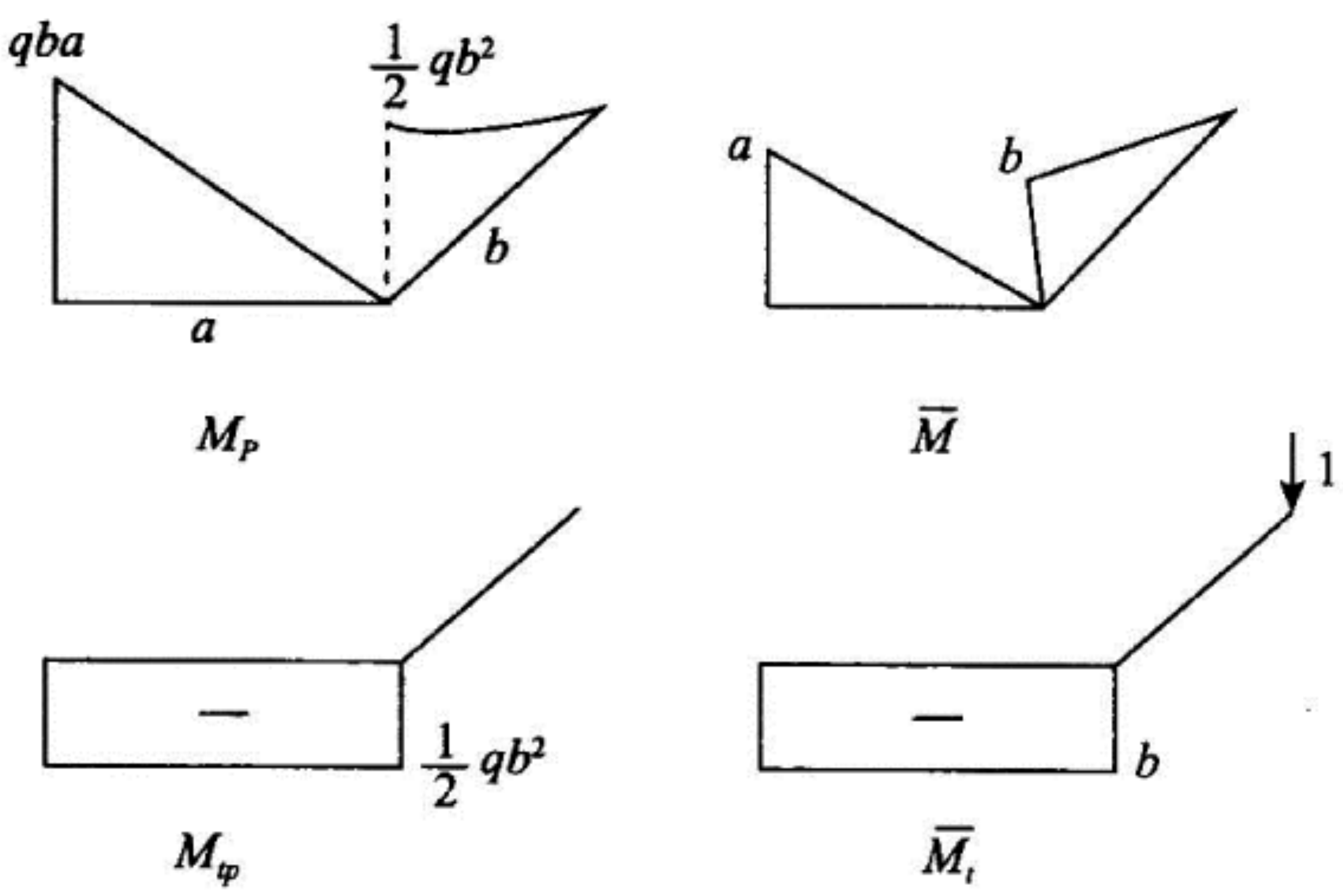


图 6-2-53

应用图乘法计算 C 点竖向位移如下

$$\begin{aligned}\triangle_C &= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times\frac{qb^2}{2}\cdot b\cdot\frac{3b}{4}+\frac{qba\cdot a}{2}\cdot\frac{2}{3}a\right)+\frac{1}{GI_t}\cdot\frac{qb^2a}{2}\cdot b\\ &=\frac{qb}{EI}\left(\frac{b^3}{8}+\frac{a^3}{3}\right)+\frac{qb^3a}{2GI_t}\\ &=\frac{2\times10^3\times0.4}{210\times10^9\times\frac{\pi}{64}\times0.03^4}\left(\frac{0.4^3}{8}+\frac{0.6^3}{3}\right)+\frac{2\times10^3\times0.4^3\times0.6}{2\times80\times10^9\times\frac{\pi}{32}\times0.03^4}\\ &=7.66\times10^{-3}+6.04\times10^{-3}\\ &=13.7\times10^{-3}\,\text{m}(\downarrow)\end{aligned}$$

6-26 图示水平面内的曲杆为 1/4 圆周，B 点受竖向荷载 F 作用。试求 B 点竖向位移。杆的抗弯刚度 EI 及抗扭刚度 GI_t 均分别等于常数。

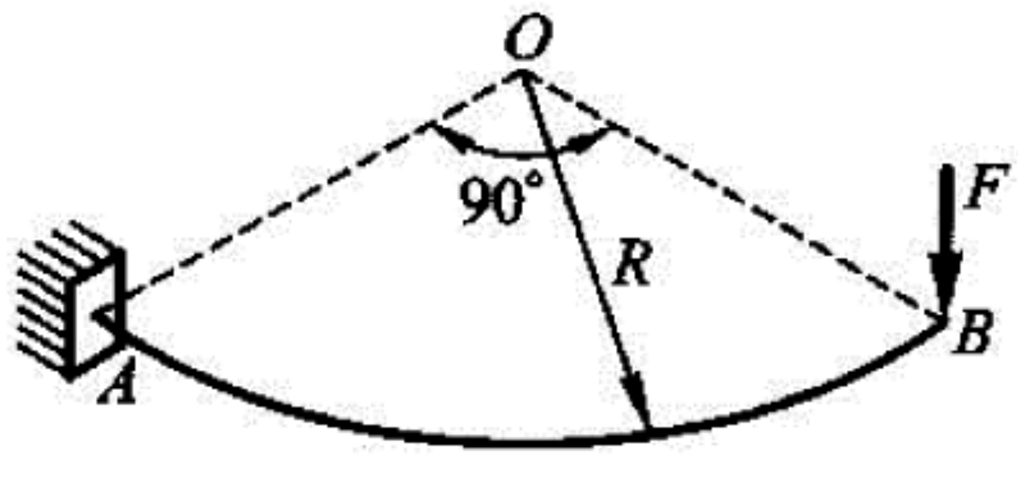


图 6-2-54（题 6-26）

解：此题是空间曲杆位移的计算，应用积分法进行计算如下

$M_P = FR\sin\theta, M_{tp} = -FR(1-\cos\theta)$，令 $P=1, M=-R\sin\theta, M_t=-R(1-\cos\theta)$

$$\triangle_B = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-R\sin\theta)(-FR\sin\theta)Rd\theta + \frac{1}{GI_t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(1-\cos\theta)FR(1-\cos\theta)Rd\theta$$

$$= \frac{FR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta + \frac{FR^3}{GI_t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{FR^3}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta + \frac{FR^3}{GI_t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{\cos\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{FR^3}{2EI}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{FR^3}{GI_t}\left[\theta-2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi FR^3}{4EI} + \frac{3\pi-8}{4}\cdot\frac{FR^3}{GI_t}(\downarrow)$$

6.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．互等定理只适用于_______体系。反力互等定理、位移互等定理是以_______定理为基础导出的。[哈尔滨工业大学 2007 研]

【答案】线弹性；功的互等

【解析】因为互等定理中采用的位移计算公式都是在线弹性假定下求出的，所以最终的功的互等定理、位移互等定理、反力互等定理以及位移反力互等定理皆只适用于线弹性结构。其中反力互等定理、位移互等定理均是以功的互等定理导出的，是功的互等定理的特殊情况。

2．图 6-3-1 所示结构，支座 A 发生了顺时针转动 θ，支座 E 的弹簧刚度为 k，则铰 C 左右截面的相对转角为_______。[浙江大学 2006 研]

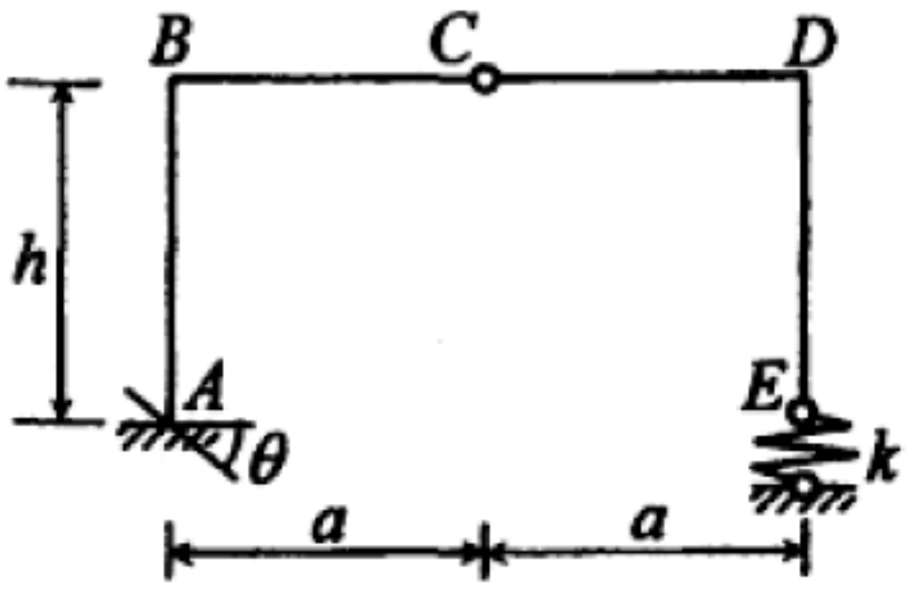


图 6-3-1

【答案】2θ

【解析】在 C 左右两端施加一对单位力偶（），计算出 A 端的弯矩 $M_A=2$（逆时针），根据公式 $\varphi_{CC} = -\sum \overline{R}_A = -(-2\times\theta) = 2\theta$。

3．图 6-3-2 所示结构中，杆 AB、BE 截面抗弯刚度为 EI，杆 DC 的抗拉刚度为 EA，则 D 结点的水平位移为_______。[西南交通大学 2006 研]

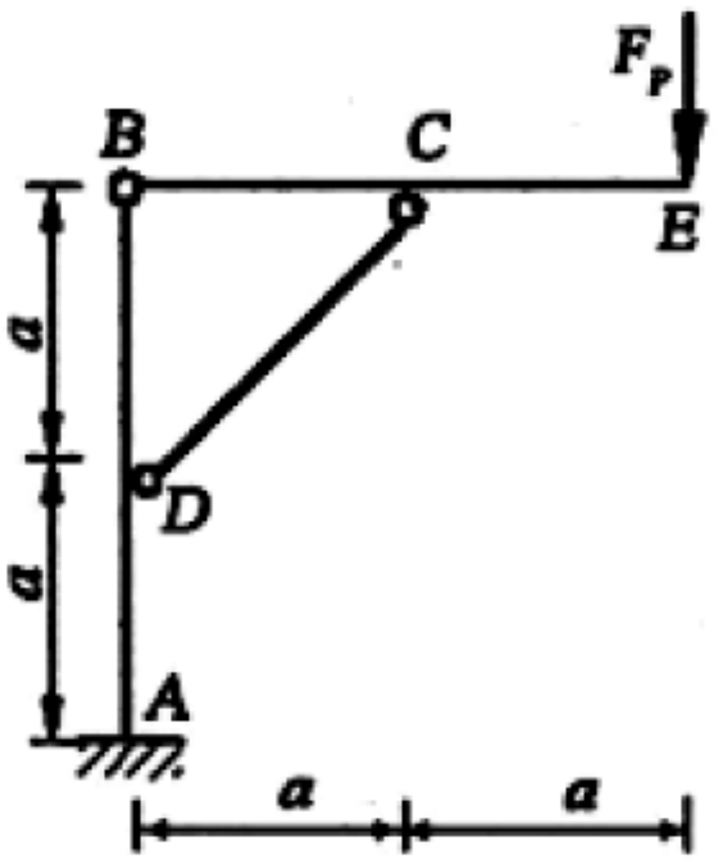


图 6-3-2

【答案】$\left(1/2EI\right)\times a^2\times 2F_P\times a=F_Pa^3/EI\left(\rightarrow\right)$

【解析】在 B 点水平向右的单位集中力，分别作出结构在外荷载 F_P 和单位集中力下的弯矩图 M_P 和 M_1，如图 6-3-3 所示。进行图乘运算可得

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times a\times a\times 2F_Pa\right)=\frac{F_Pa^3}{EI}\left(\rightarrow\right)$$

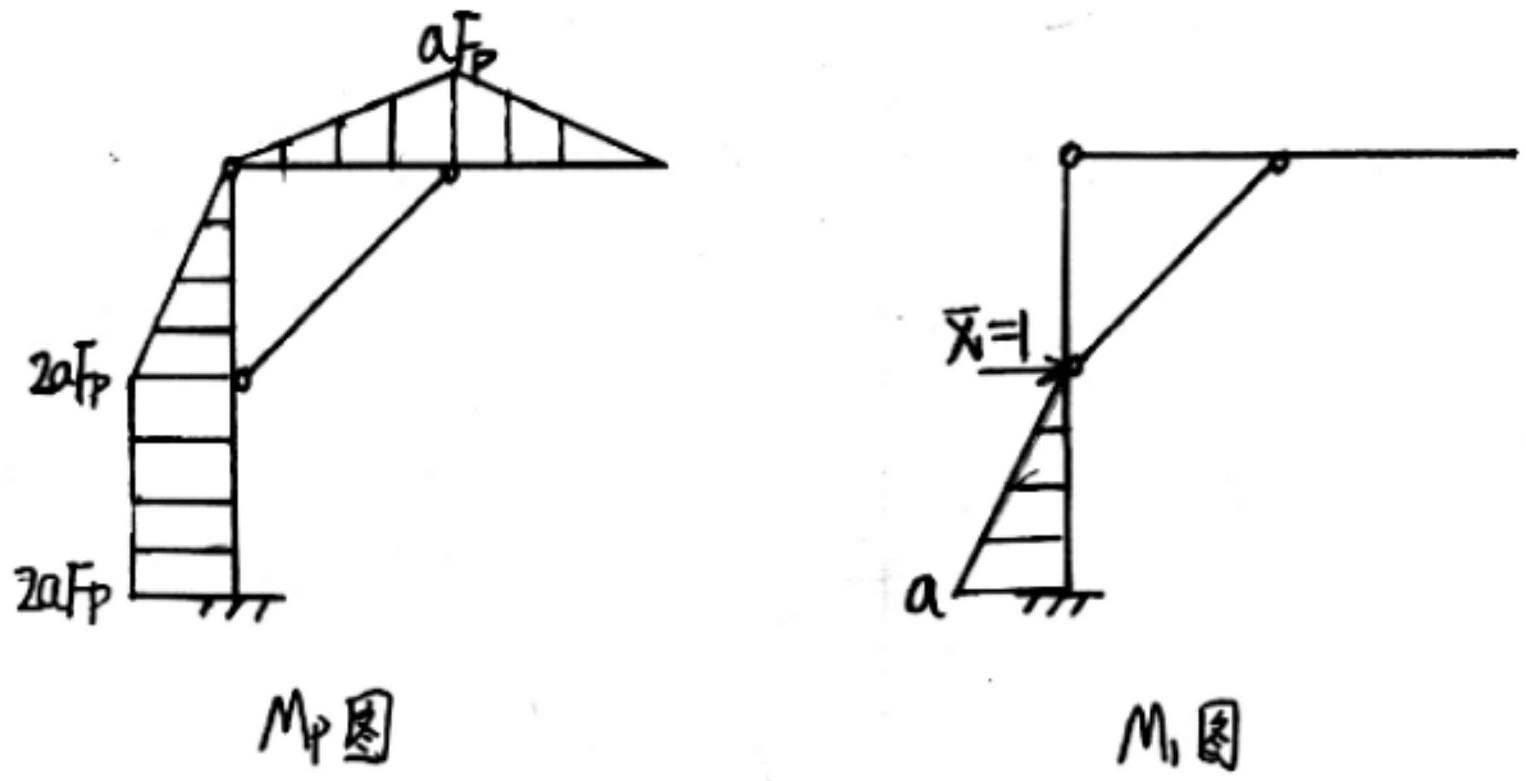


图 6-3-3

4．图 6-3-4 所示两图的图乘结果为_______。[湖南大学 2007 研]

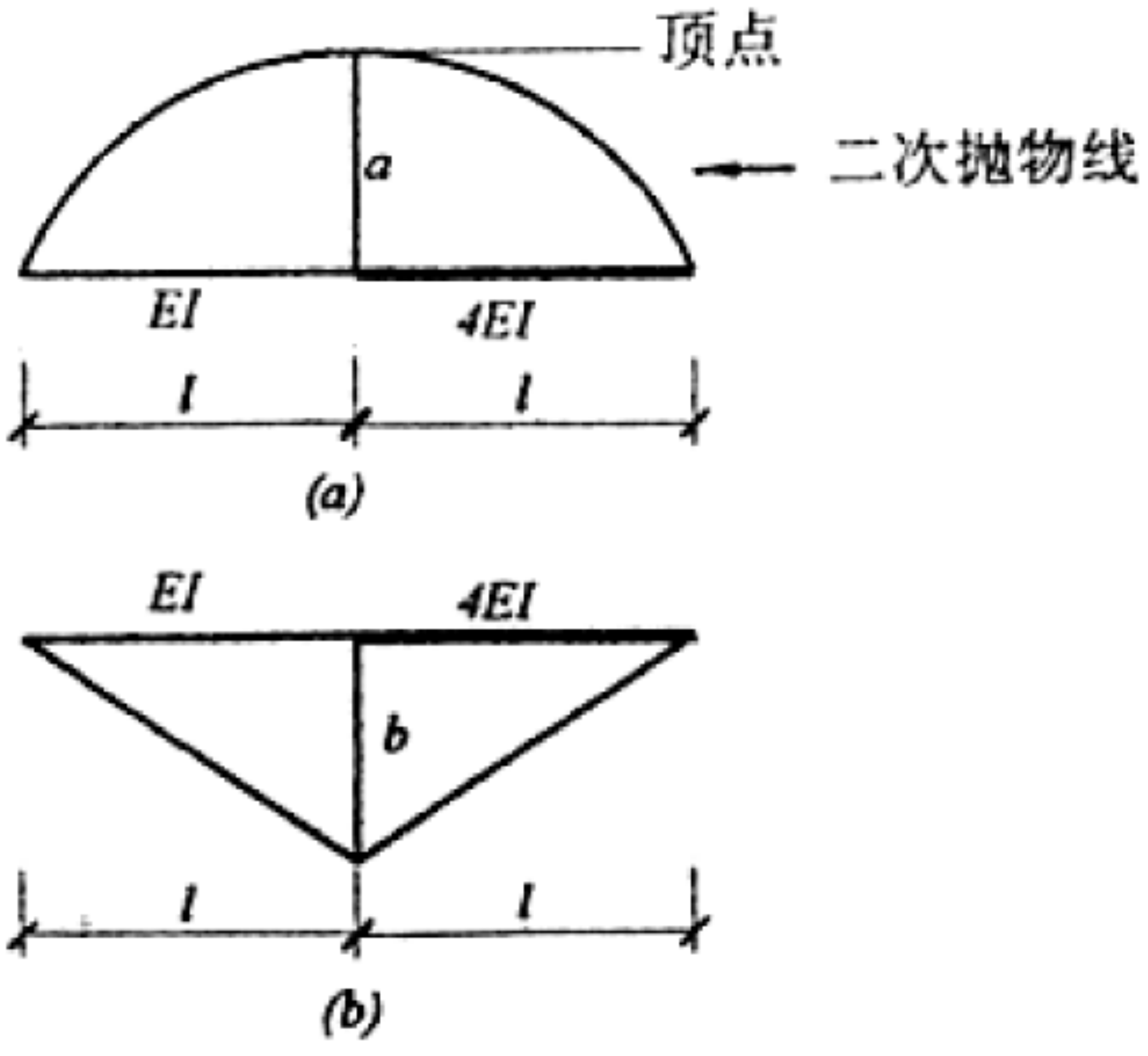


图 6-3-4

【答案】$-\dfrac{25abl}{48EI}$

【解析】根据图乘法的计算原则，需要分段进行图乘

$$-\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}la\times\frac{5}{8}b\right)-\frac{1}{4EI}\left(\frac{2}{3}la\times\frac{5}{8}b\right)=-\frac{25abl}{48EI}$$

5．图 6-3-5 所示桁架各杆的 EA 相同，AB 杆的转角大小为_______，方向为_______。[国防科技大学 2006 研]

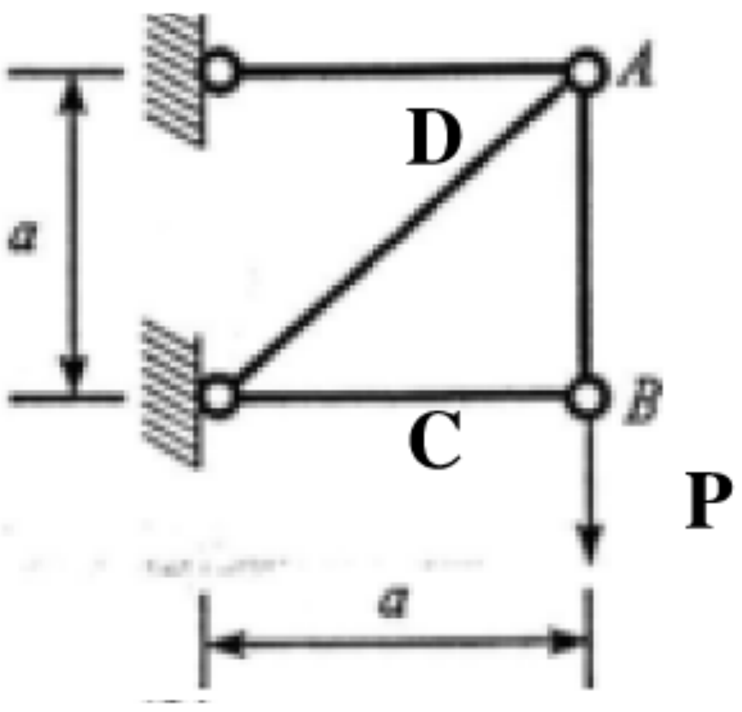


图 6-3-5

【答案】P/EA；顺时针

【解析】在 AB 杆两端施加一对顺时针的集中力大小为 1/a，分别算出结构在外荷载 P 和单位集中力下的各杆的轴力。在外荷载 P 作用下：$N_{AD}=N_{AB}=+P$，$N_{BC}=0$，$N_{AC}=-\sqrt{2}P$；在一对顺时针的单位集中力作用下：$N_{AC}=N_{AB}=0$，$N_{AD}=+\dfrac{1}{a}$，$N_{CB}=-\dfrac{1}{a}$。代入公式得转角：$\theta_{AB}=\dfrac{1}{EA}\sum\bar{N}N_{P}l=\dfrac{1}{EA}P\cdot a\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{P}{EA}$。

6. 图 6-3-6（a）所示结构，各杆长均为 l 各杆刚度均为 EI，弹性刚度系数 $k=3EI/l^3$，A 点的水平位移为_______，方向为_______。[中南大学 2005 研]

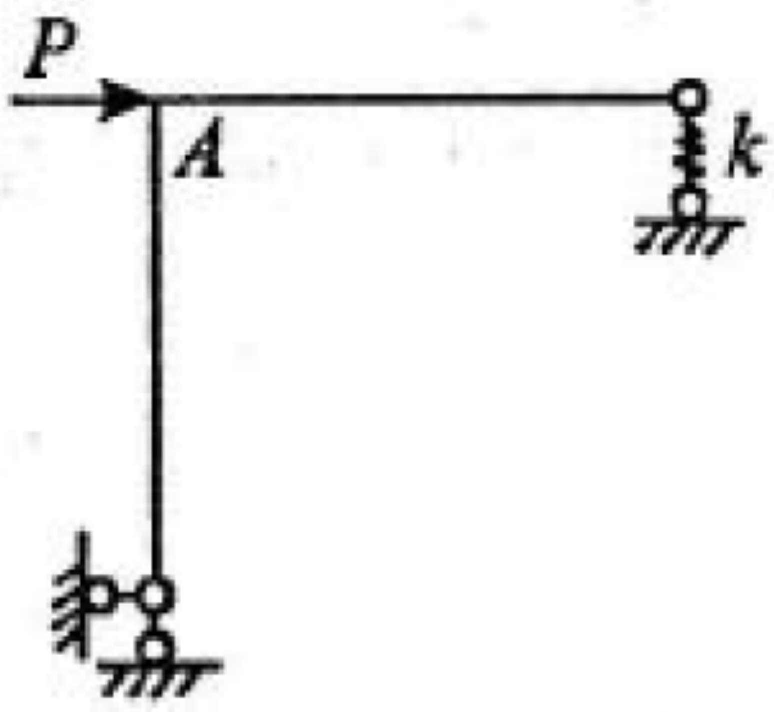


图 6-3-6（a）

【答案】$\dfrac{Pl^3}{EI}$；水平向右

【解析】A 点的水平位移由两部分组成：外荷载 P 产生的位移和和弹簧变形产生的位移。首先求第一部分位移：在 A 点施加一个水平向右的单位力并作出相应的弯矩 M_1 图，还需要作出荷载 P 作用下的弯矩 M_P 图，进行图乘运算，即

$$\Delta_{AH1}=2\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times Pl\times\frac{2}{3}l\right)=\frac{2Pl^3}{3EI}(\rightarrow)$$

然后求第二部分位移，荷载 P 的作用下，弹簧压缩量为 $Pl^3/3EI$，代入公式算得

$$\Delta_{AH2}=-\sum R_C=-\left(-1\times\frac{Pl^3}{3EI}\right)=\frac{Pl^3}{3EI}(\rightarrow)$$

综上，A 点的水平位移为$\Delta_{AH}=\dfrac{2Pl^3}{3EI}+\dfrac{Pl^3}{3EI}=\dfrac{Pl^3}{EI}$，方向水平向右。

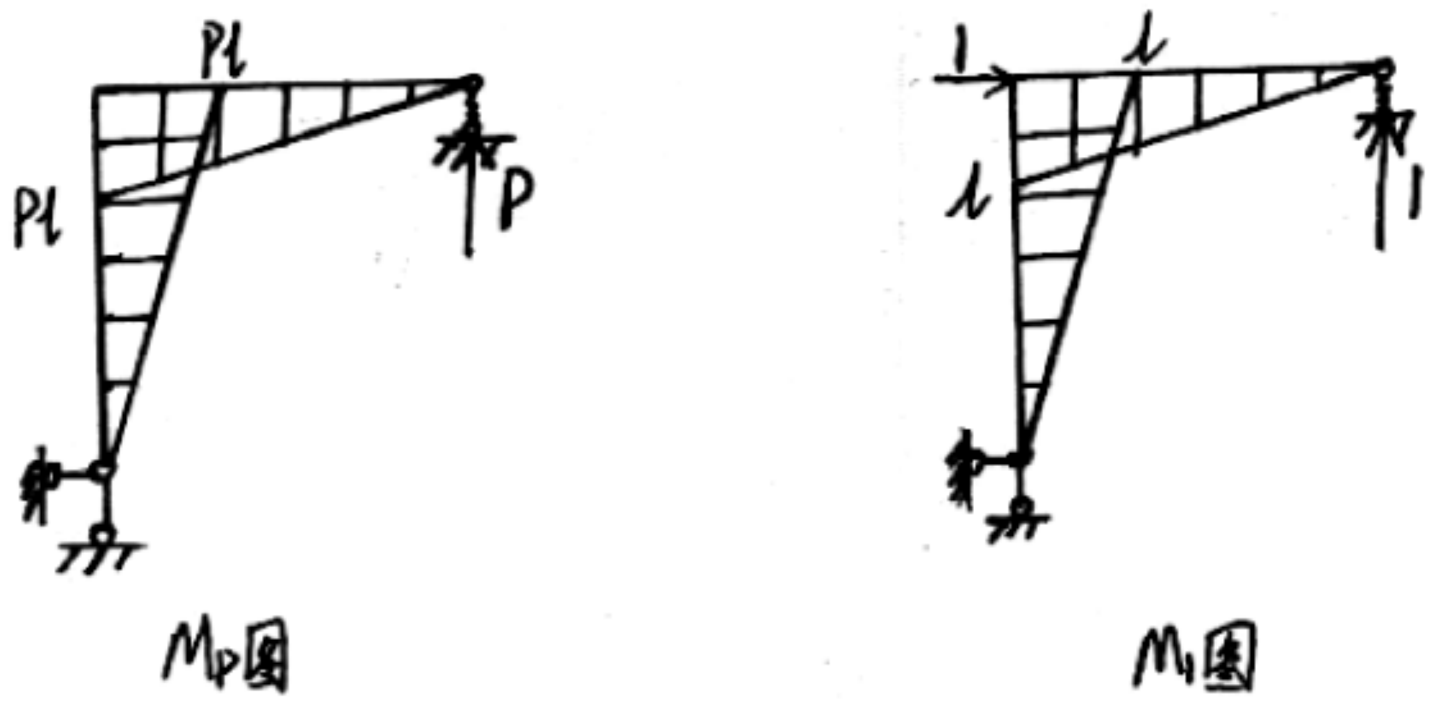


图 6-3-6（b）

二、选择题

1．图 6-3-7（a）所示为刚架在荷载作用下的 M_P 图，曲线为二次抛物线，横梁的抗弯刚度为 2EI，竖柱为 EI，则横梁中点 K 的竖向位移为（　　）。[哈尔滨工业大学 2008 研]

A．87.75/（EI）↓

B．43.875/（EI）↓

C．94.5/（EI）↓

D．47.25/（EI）↓

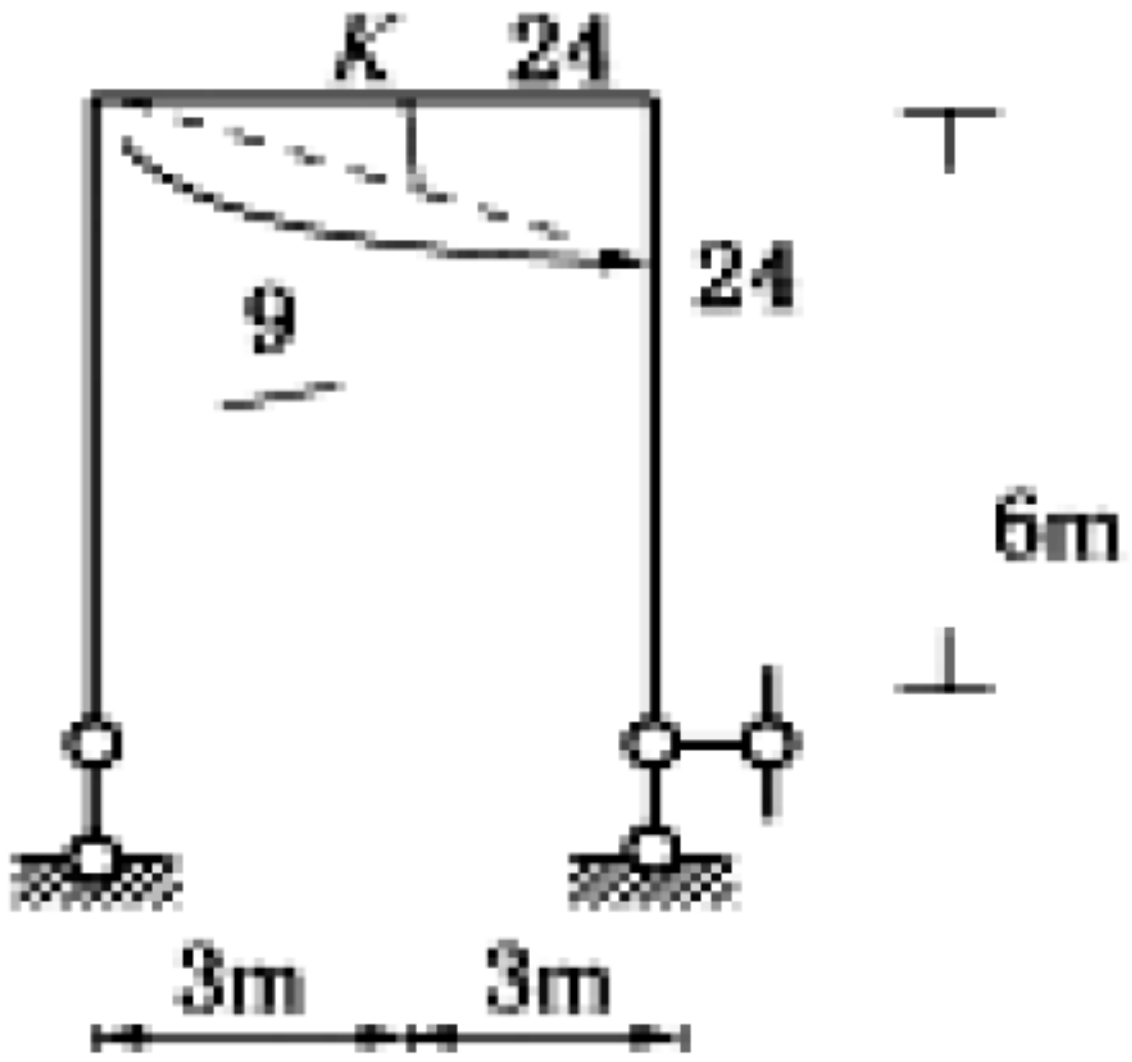


图 6-3-7（a）　M_P 图（kN・m）

【答案】B

【解析】在横梁中点 K 处施加一个竖直向下的单位力，作出对应的弯矩图 M_1 图。利用图乘法（将 M 图分为两个图形的组合），可最终计算得到 K 点处的位移

$$\Delta_K=2\times\frac{1}{2EI}\left(\frac{2}{3}\times3\times9\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2}\times12\right)=\frac{43.875}{EI}(\downarrow)$$

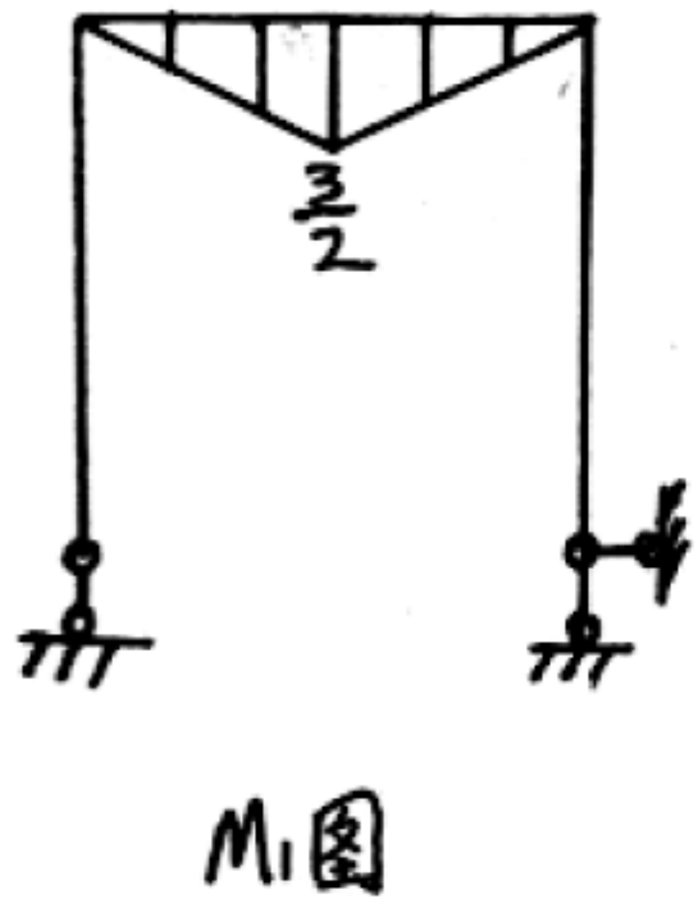


图 6-3-7（b）

2．图 6-3-8（a）所示结构 EI=常数，若要使 B 点水平位移为零，则 P_1/P_2 应为：（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．10/3

B．9/2

C．20/3

D．17/2

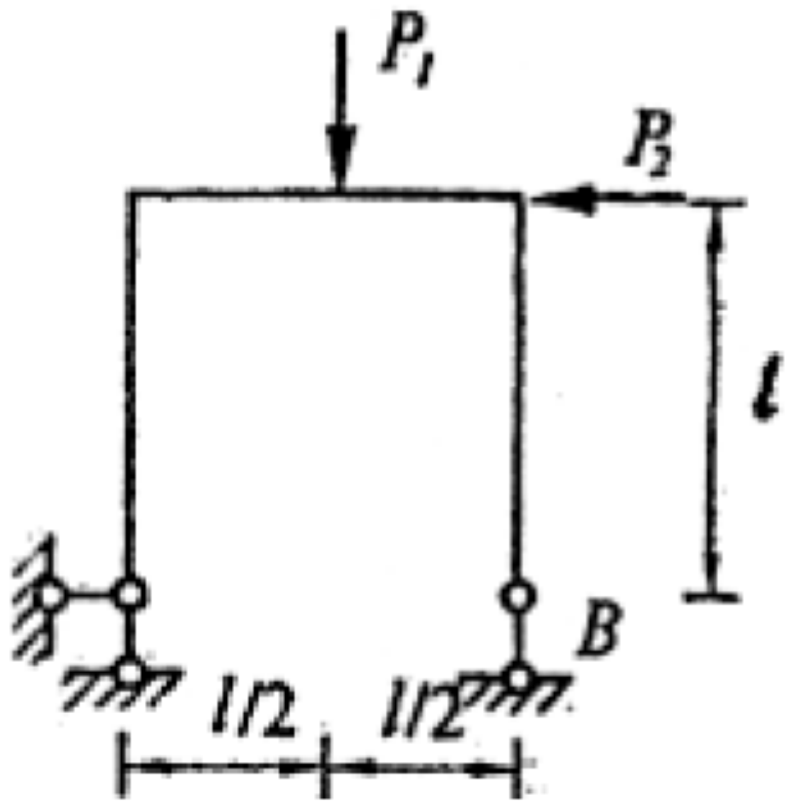


图 6-3-8（a）

【答案】C

【解析】利用结构结构位移计算反推荷载。在 B 点施加一个水平向右的单位力作出对应的弯矩图 M_1，接着画出结构在外荷载作用下的弯矩图 M_P；利用图乘法写出 B 点水平位移的计算式：

$$-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}P_2 l\right)-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times P_2 l\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l\times\frac{P_1 l}{4}\times l\right)=0$$

，可算得：P_1/P_2=20/3。

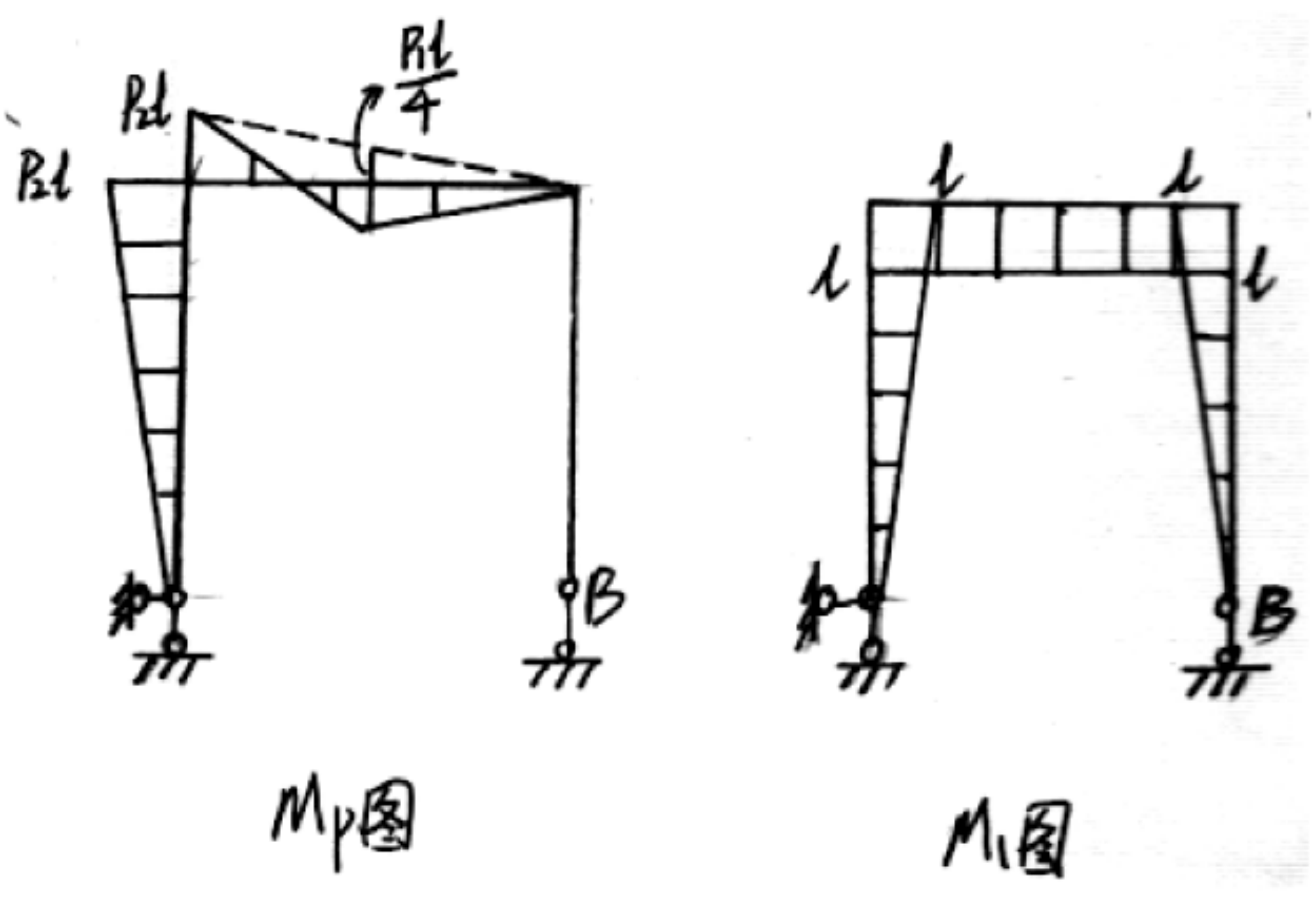


图 6-3-8（b）

3．图 6-3-9 所示桁架，C 点的水平位移（　　）。[西南交通大学 2008 研]

A．向左

B．向右

C．等于零

D．不定，取决于 A_1/A_2 值

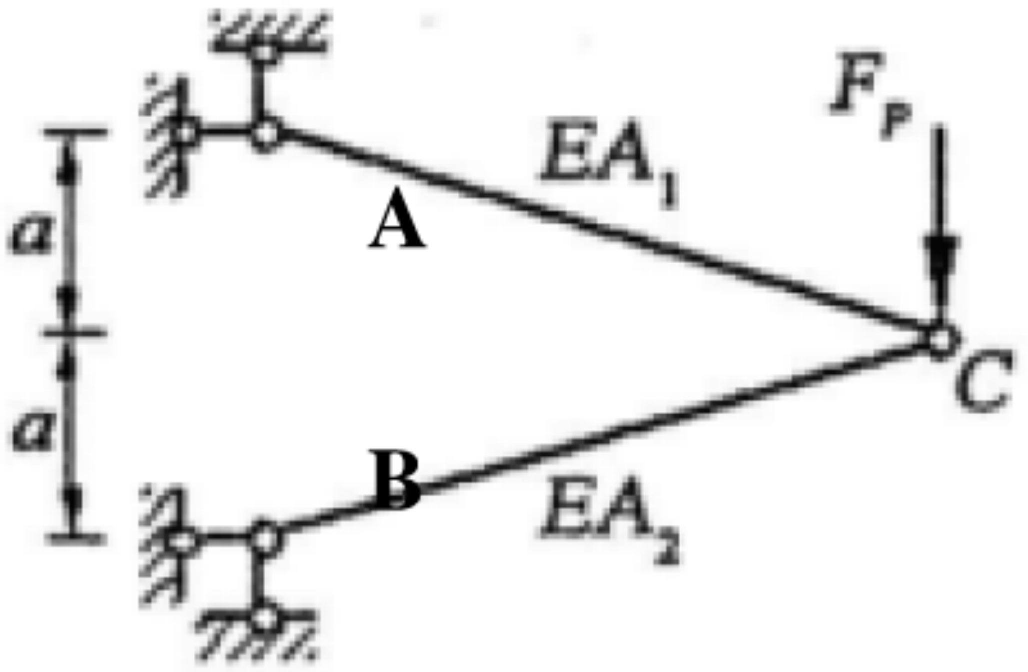


图 6-3-9

【答案】D

【解析】在外荷载 F_P 下，根据结点法可判断出 AC 杆的轴力是拉力为正，BC 杆的轴力是压力为负；在 C 点施加一个水平向右的单位力，可判断出 AC 杆的轴力是拉力为正，BC 杆的轴力也是拉力为正。根据计算桁架位移的公式 $\Delta_{CH}=\frac{1}{EA}\sum \bar{N}N_P l$，可知 C 点水平位移的正负不能确定，取决于于 A_1/A_2 值。

4．图 6-3-10 所示梁两种状态下所产生的支座反力关系为（　　）。[国防科技大学 2006 研]

A. $m_{11}=m_{12}$　　B. $m_{12}=R_{21}$　　C. $R_{21}=R_{22}$　　D. $m_{11}=R_{22}$

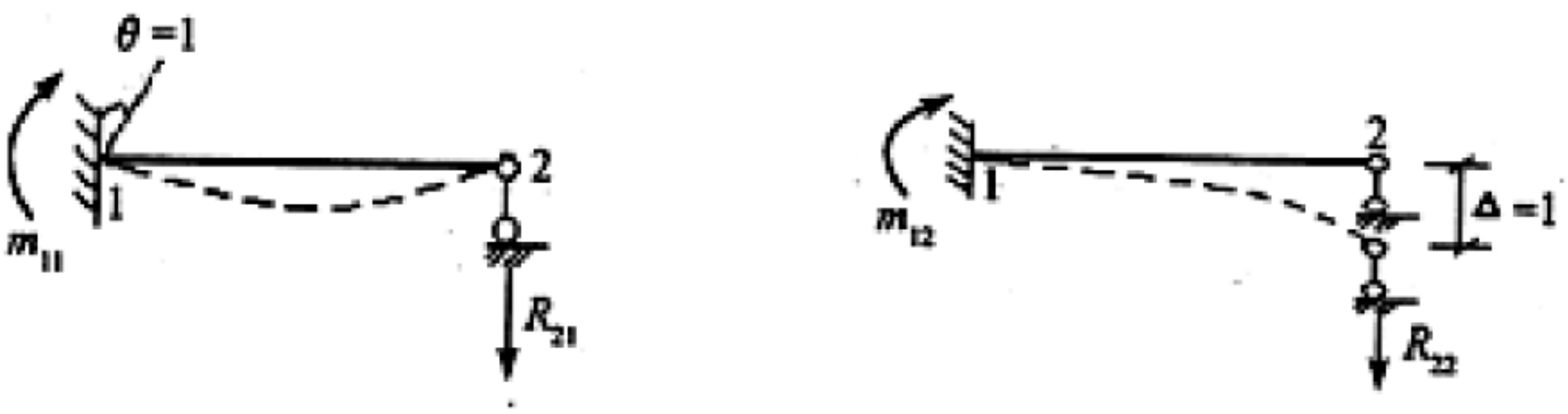


图 6-3-10

【答案】B

【解析】根据反力互等定理，易判断结果；反力互等定理：支座 1 发生单位位移所引起的支座 2 的反力，等于支座 2 发生单位位移所引起的支座 1 的反力。

5．用图乘法求位移的必要条件之一是（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．单位荷载下的弯矩图为一直线；

C．所有杆件 EI 为常数且相同；

B．结构可分为等截面直杆；

D．结构必须是静定的。

【答案】B

【解析】图乘法求位移的必要条件：①杆轴为直线；②EI 为常数；③$\bar{M}$和 M_P两个弯矩图中至少有一个是直线图形。

三、判断题

1．静定结构在产生支座沉降时，其位移与结构的刚度有关。（　　）[中南大学 2003 研]

【答案】错

【解析】静定结构在温度变化、支座沉降时，静定结构不会产生内力，但会产生位移；支座沉降时，结构产生刚体位移，其位移与结构的刚度无关。

2．图 6-3-11 所示结构 EI=常数，求 K 点的竖向位移时，由图乘法得：$\Delta_K=(1/EI)\times\omega_1 y_1$。（　　）[天津大学 2003 研]

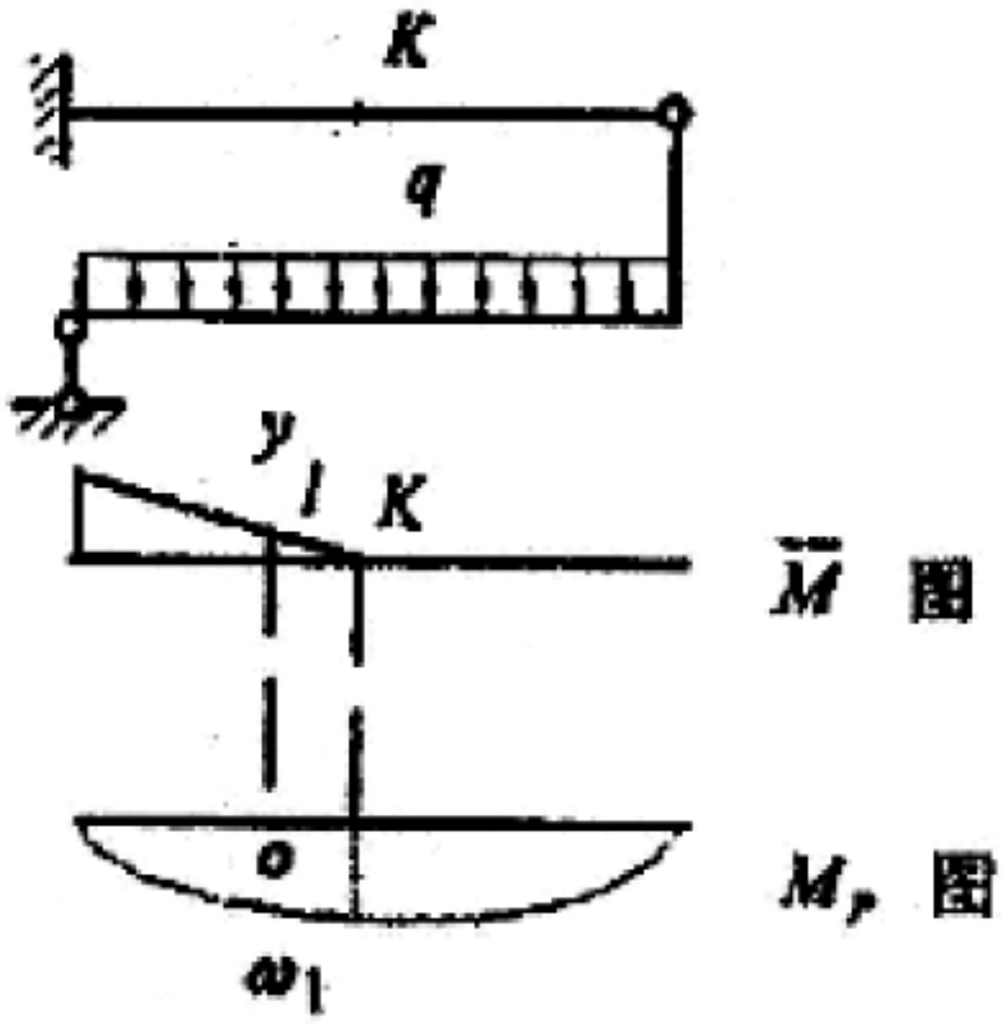


图 6-3-11

【答案】错

【解析】在图示情况下进行图乘运算，不能直接相乘；应该分段进行，$\bar{M}$ 图的三角形部分对应与 M_P 图相同的范围内的弯矩图进行图乘，此时的 M_P 图应按照叠加法重新画出，方可进行计算。

四、计算题

1.图 6-3-12 所示桁架各杆刚度为 EA，弹性支座刚度为 EA/a，试计算桁架各杆的轴力，并求结点 7 的竖向位移。[武汉科技大学 2007 研]

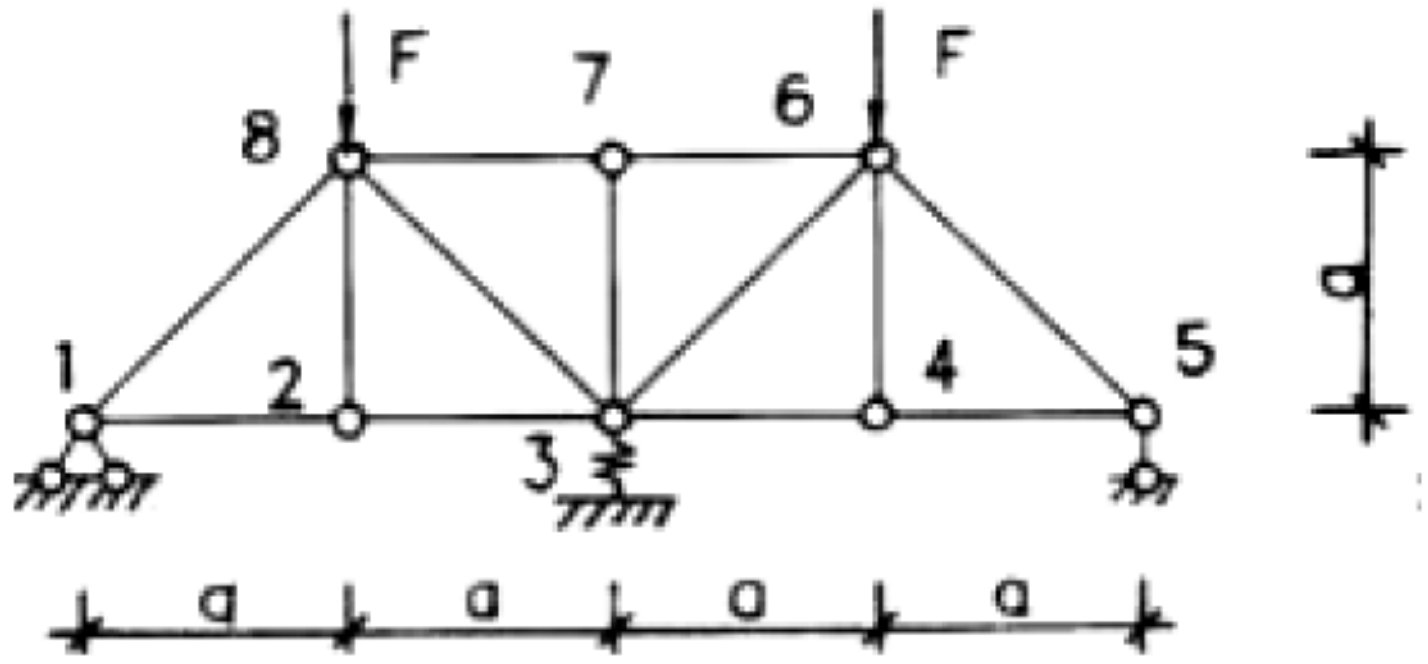


图 6-3-12

解：取基本体系如下图 6-3-13 所示。

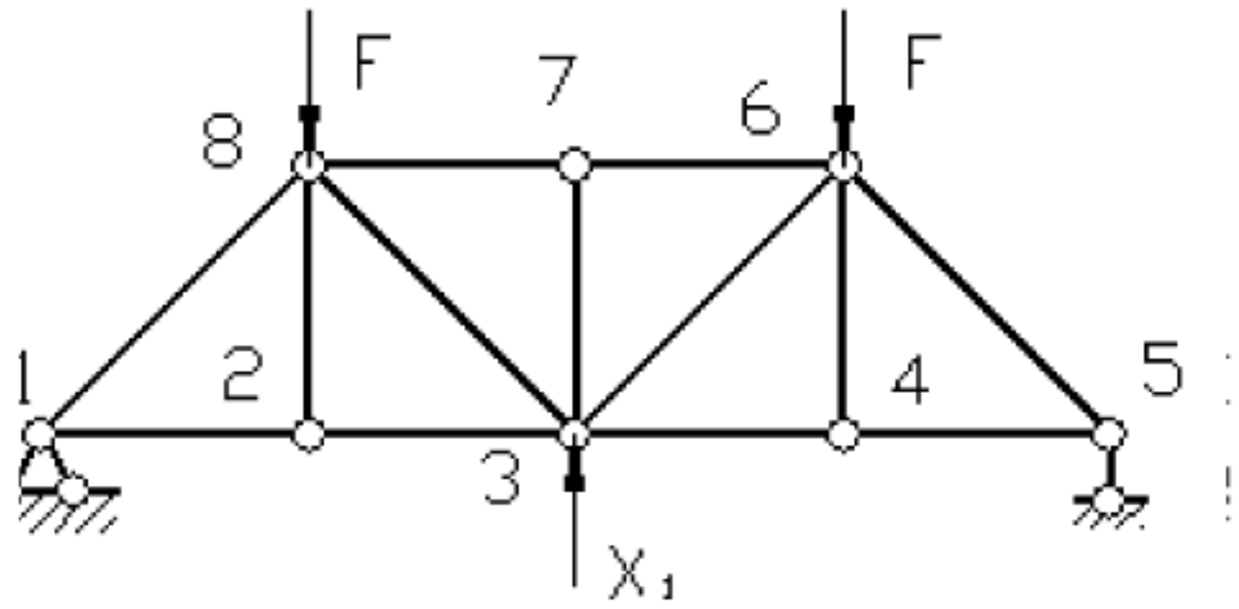


图 6-3-13

由于结构是对称的，所以只需研究半边结构，如下表 6-3-1 所示。

表 6-3-1

序号	杆件	长度	$\bar{F}_N$	F_{NP}	F_N
1	12	a	$-\frac{1}{2}$	F	$\frac{F}{2}$
2	23	a	$-\frac{1}{2}$	F	$\frac{F}{2}$
3	18	$\sqrt{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$
4	28	a	0	0	0
5	38	$\sqrt{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$
6	78	a	1	$-F$	0
7	37	a	0	0	0
		$\delta_{11}=\sum\frac{\bar{F}_N^2 l}{EA}=\frac{(3+2\sqrt{2})a}{EA}$			
		$\Delta_{1P}=\sum\frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}=-\frac{(4+2\sqrt{2})Fa}{EA}$			

代入力法基本方程中可求得

$$X_1=F$$

表的最后一列是各个桁架的内力。
节点 7 的位移为

$$\Delta_{7V}=\frac{X_1 a}{EA}=\frac{Fa}{EA}(\downarrow)$$

2.求图 6-3-14 所示结构 A、B 相对竖向线位移，EI=常数，a=2m。[宁波大学 2009 研]

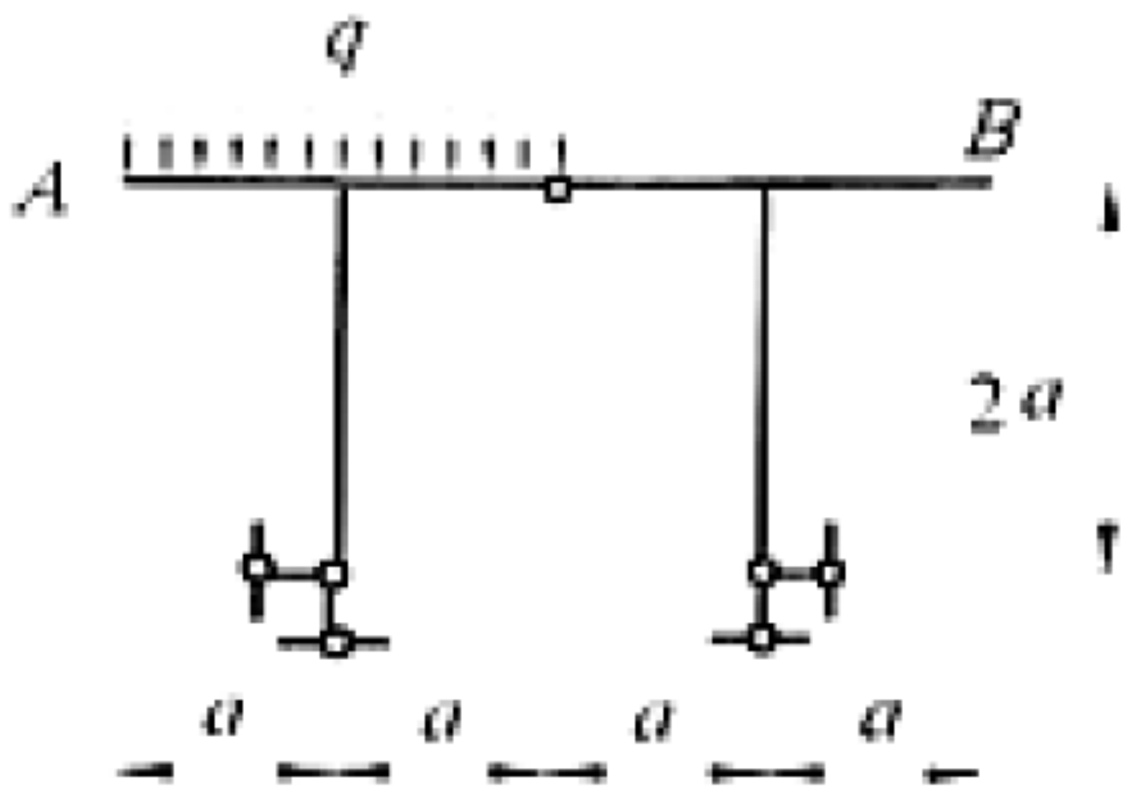
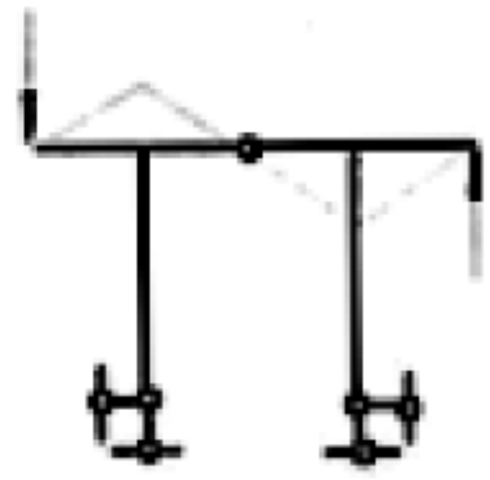


图 6-3-14

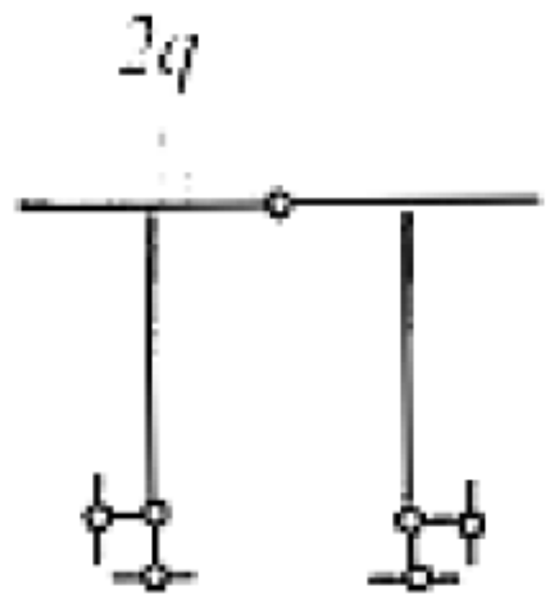
解:（1）若求 AB 的相对竖向位移，要分别在 AB 两点加一对单位力，其中 A 点的力竖直向下，B 点的力竖直向上.由静力平衡条件可知，此时结构的支座反力为 0，故此时的弯矩图如下图 6-3-15 所示。



M 图

图 6-3-15

（2）另外，绘制结构在原荷载作用下的弯矩图，如下图 6-3-16 所示。



M_P 图

图 6-3-16

（3）由图乘法可得 AB 的相对竖直位移

$$\Delta=\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{3}\times2\times2q\right)\times\frac{3}{4}\times2=\frac{4q}{EI}(\downarrow\uparrow)$$

3.求图 6-3-17 所示结构 A 点竖向位移Δ_{Ay}，已知 EI 为常数。[西南交通大学 2007 研]

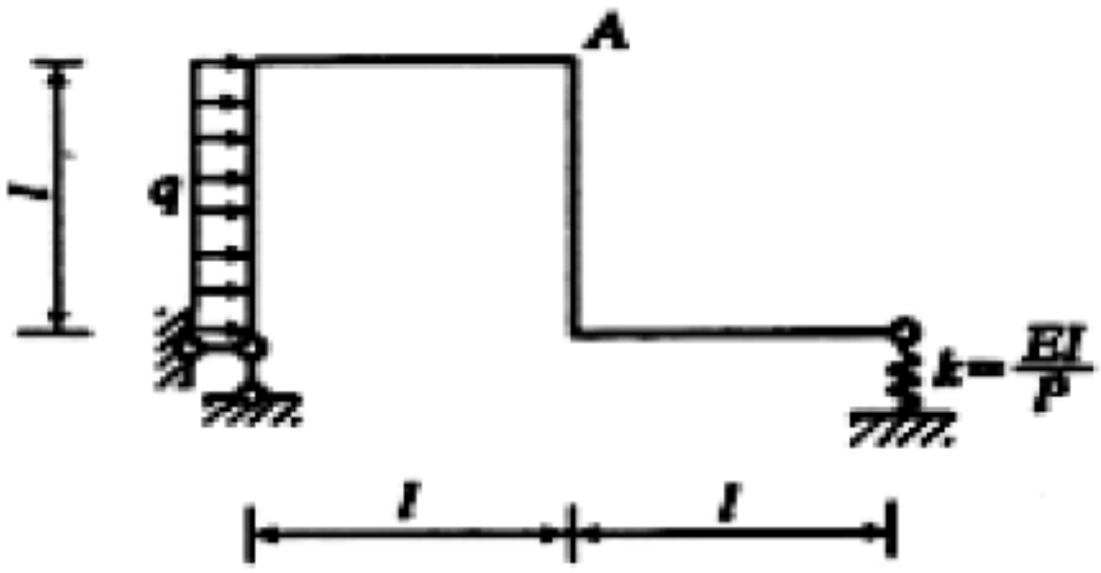
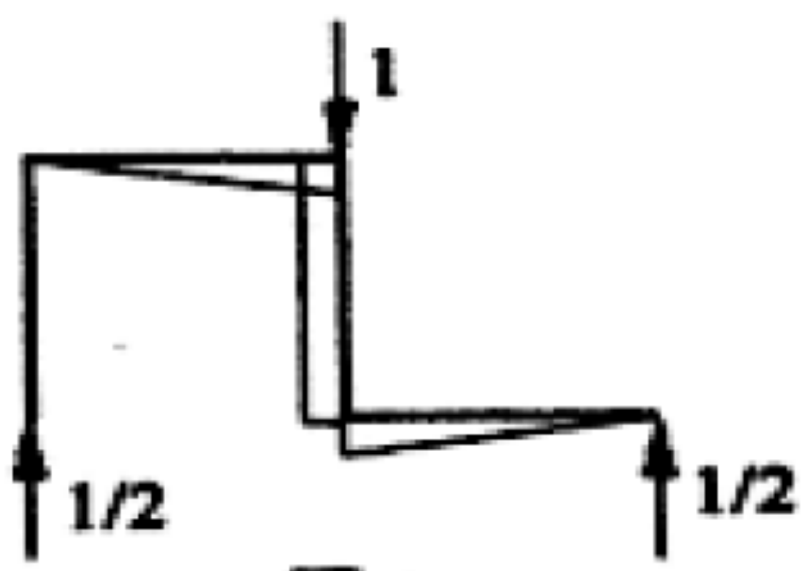


图 6-3-17

解：在 A 处加一个竖直向下的单位力，求解支座反力。由静力平衡条件可得两端支座均为 1/2，以绘制此时的弯矩图，如下图 6-3-18 所示。



$\overline{M}$ 图

图 6-3-18

原荷载作用下，求解支座反力为$F_{Ex}=ql$，$F_{Ey}=\frac{ql}{4}$，$F_{R}=\frac{ql}{4}$。绘制弯矩图，如下图 6-3-19 所示：

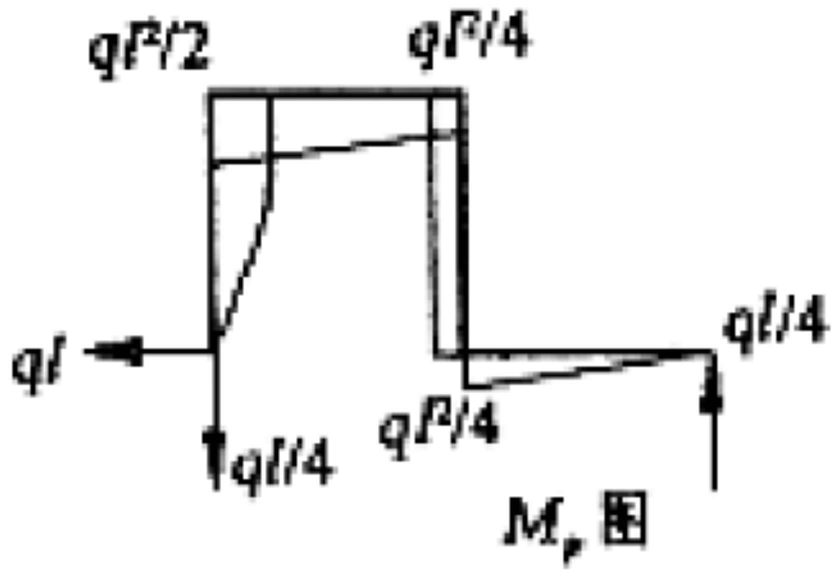


图 6-3-19

利用图乘法，可求得 A 的竖直位移为

$$\Delta_{AY}=\int\frac{M_P\bar{M}dx}{EI}-\sum\bar{F}_R c=\frac{3ql^4}{8EI}(\downarrow)$$

4.结构的支座移动情况如图 6-3-20 所示。求铰 B 两侧截面的相对转角 φ_{BB}。[国防科技大学 2006 研]

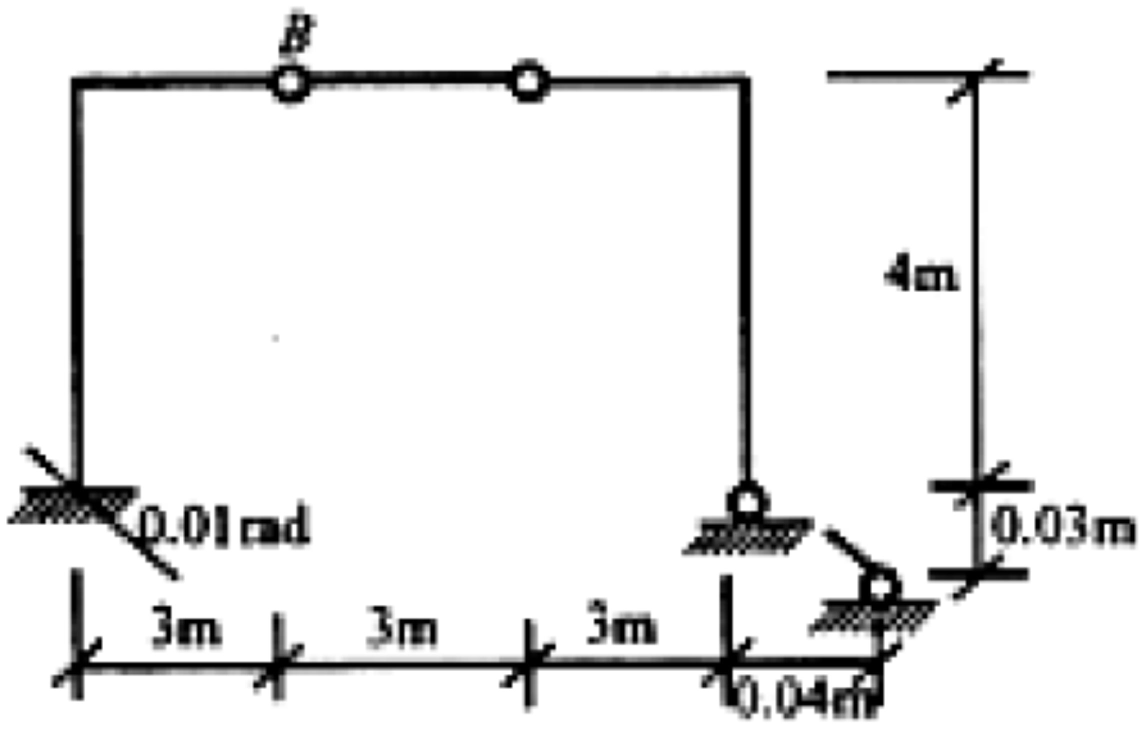


图 6-3-20

解：在支座移动下求结构某一截面的位移。具体计算：在 B 铰处加一对力偶，基本体系如下图 6-3-21 所示。

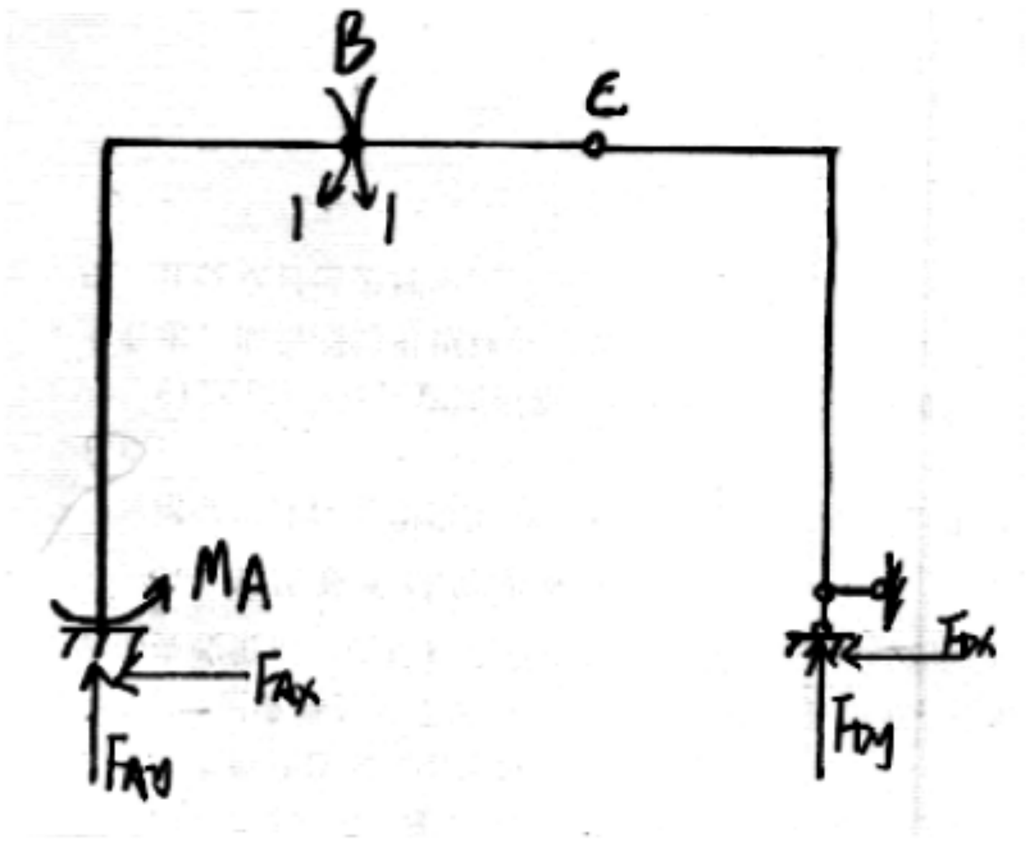


图 6-3-21

由图示结构可看出，弯矩作用在基本结构上。因此 D 支座的反力为 0.取 AB 段为隔离体，并对 B 点取矩有 $\sum M_B=0$，解得 $M_A=1$。所以相对转角为

$$\Delta\varphi_{AB}=-\sum F_{RC}\cdot\varphi=0.001rad$$ (顺)

第 7 章　力　法

7.1　复习笔记

【知识框架】

- 力法
  - 超静定结构的概述
    - 超静定结构的定义
    - 多余联系的描述
    - 超静定结构类型：超静定梁、超静定桁架、超静定刚架等
    - 求解超静定问题应考虑的条件：平衡条件、几何条件、物理条件
    - 计算方法
      - 基本方法：力法（柔度法）、位移法（刚度法）
      - 其他演变方法：力矩分配法、混合法、矩阵位移法等
    - 超静定次数的确定
      - 超静定次数的定义
      - 确定方法
  - 力法的基本概念
    - 力法的定义
    - 相关概念
      - 力法的基本结构
      - 力法的基本体系
      - 力法的基本方程
    - 力法的典型方程
  - 力法的求解步骤
    - 力法的计算步骤
      - 确定力法的基本体系
      - 建立力法典型方程
      - 计算方程中的系数和自由项
      - 解算典型方程求出多余未知力
      - 由平衡条件或叠加法求得最后内力
    - 力法的相关结论
  - 对称性的利用
    - 对称结构的条件
    - 对称的类型：正对称、反对称
    - 对称的特点
    - 未知力分组及荷载分组
    - 取一半结构计算：奇数跨对称刚架、偶数跨对称刚架
  - 超静定结构的位移计算
    - 理论基础
    - 方法步骤
  - 最后内力图的校核
    - 平衡条件的校核
    - 位移条件的校核
  - 温度变化时超静定结构的计算
    - 温度变化对超静定结构的影响
    - 温度变化时超静定结构内力分析
  - 支座位移时超静定结构的计算
    - 支座位移对超静定结构的影响
    - 支座位移对超静定结构的影响
  - 弹性中心法计算无铰拱
    - 拱轴线方程及截面变化规律
    - 无铰拱的力法计算的相关步骤及弹性中心法
    - 无铰拱的一些结论
  - 两铰拱及系杆拱
    - 两铰拱的相关概念和力法求解步骤
    - 系杆拱的相关概念和力法求解步骤
    - 系杆拱的其他情况及桁架拱的简单介绍
  - 超静定的结构特性
    - 外界变化的影响
    - 内力的确定
    - 多余联系的影响

【重点难点归纳】

一、超静定结构

1．定义

单靠平衡条件还不能确定全部反力和内力的结构，称为超静定结构，如图 7-1-1（a）、7-1-2（b）所示。

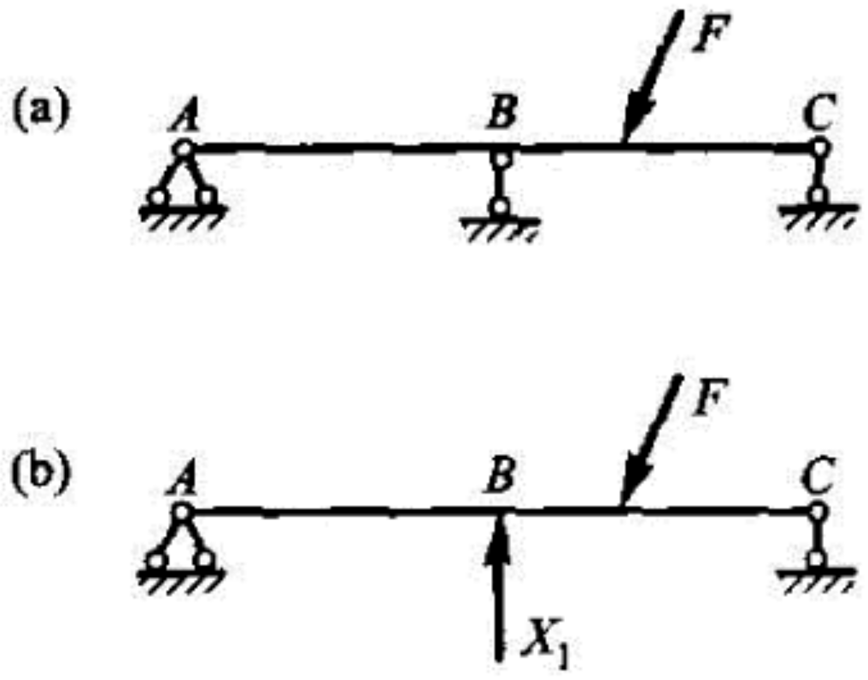


图 7-1-1

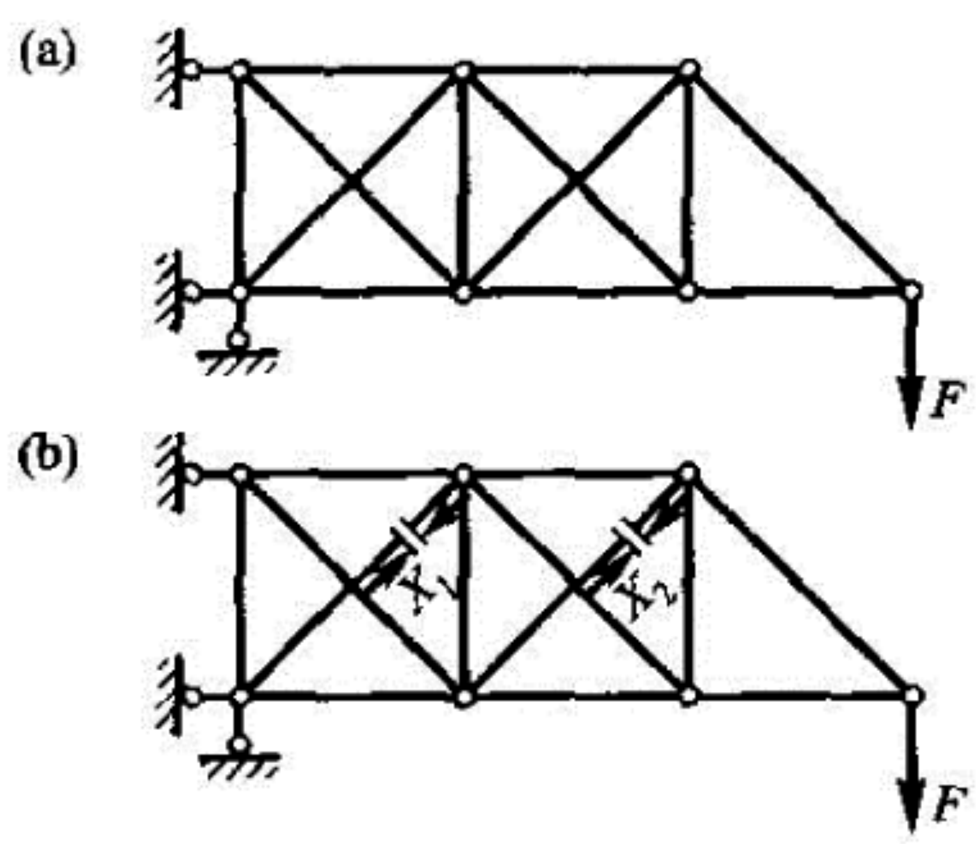


图 7-1-2

2．多余联系

（1）定义

在超静定结构（几何不变）中，对保持结构的几何不变性没有必要的联系称为多余联系。

（2）多余未知力

多余联系中产生的力称为多余未知力，又称赘余力或冗力，如图 7-1-1（b）、7-1-2（b）所示。

3．类型

（1）超静定梁（图 7-1-1（a））；

（2）超静定桁架（图 7-1-2（a））；

（3）超静定拱（图 7-1-3（a））；

（4）超静定刚架（图 7-1-3（b））；

（5）超静定组合结构（图 7-1-3（c））。

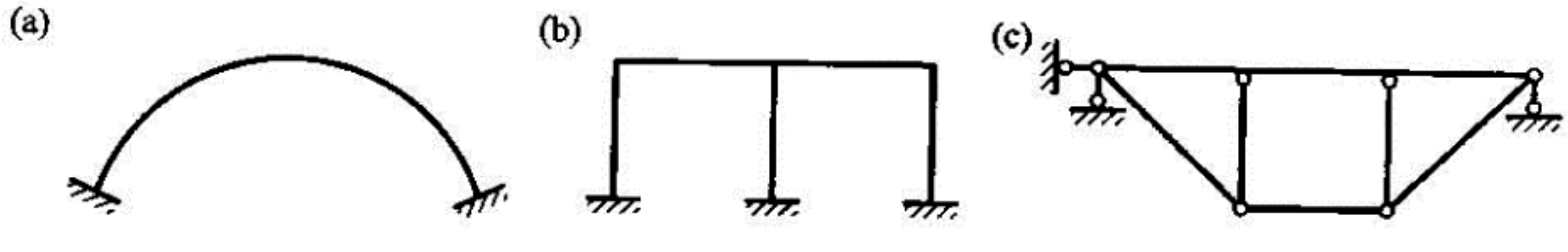


图 7-1-3

4．求解超静定问题应考虑的条件

（1）平衡条件：结构的整体及任何一部分的受力状态都应满足平衡方程。

（2）几何条件（变形条件或位移条件、协调条件、相容条件等）：结构的变形和位移必须符合支承约束条件和各部分之间的变形连续条件。

（3）物理条件：变形或位移与力之间的物理关系。

5．计算方法

（1）基本未知量

求出其值后可以用来求出其他未知量的未知量称为基本未知量。

（2）基本方法

①力法（柔度法）：以多余未知力作为基本未知量；
②位移法（刚度法）：以某些位移作为基本未知量。
（3）其他演变方法
①力矩分配法；
②混合法；
③矩阵力法；
④矩阵位移法。

6．超静定次数的确定

（1）超静定次数的定义
多余联系或多余未知力的数目，称为超静定结构的超静定次数。
注：有多少个多余联系，相应地便有多少个多余未知力，也就需要建立同样数目的补充方程，才能求解。
（2）确定方法
解除多余联系，具体为：
①去掉或切断一根链杆，相当于去掉一个联系（图 7-1-4（a））；
②拆开一个单铰，相当于去掉两个联系（图 7-1-4（b））；
③在刚结处作一切口，或去掉一个固定端，相当于去掉三个联系（图 7-1-4（c））；
④将刚结改为单铰联结，相当于去掉一个联系（图 7-1-4（d））；
⑤将固定端改为滑动支座，相当于去掉一个联系（图 7-1-4（e））；
⑥将固定端改为可动铰支座，相当于去掉两个联系（图 7-1-4（f））；
⑦将滑动支座改为可动铰支座，相当于去掉一个联系（图 7-1-4（g））。
同一个超静定结构，可用不同的方式拆除多余约束得到不同的静定结构，但其超静定次数是不变的。

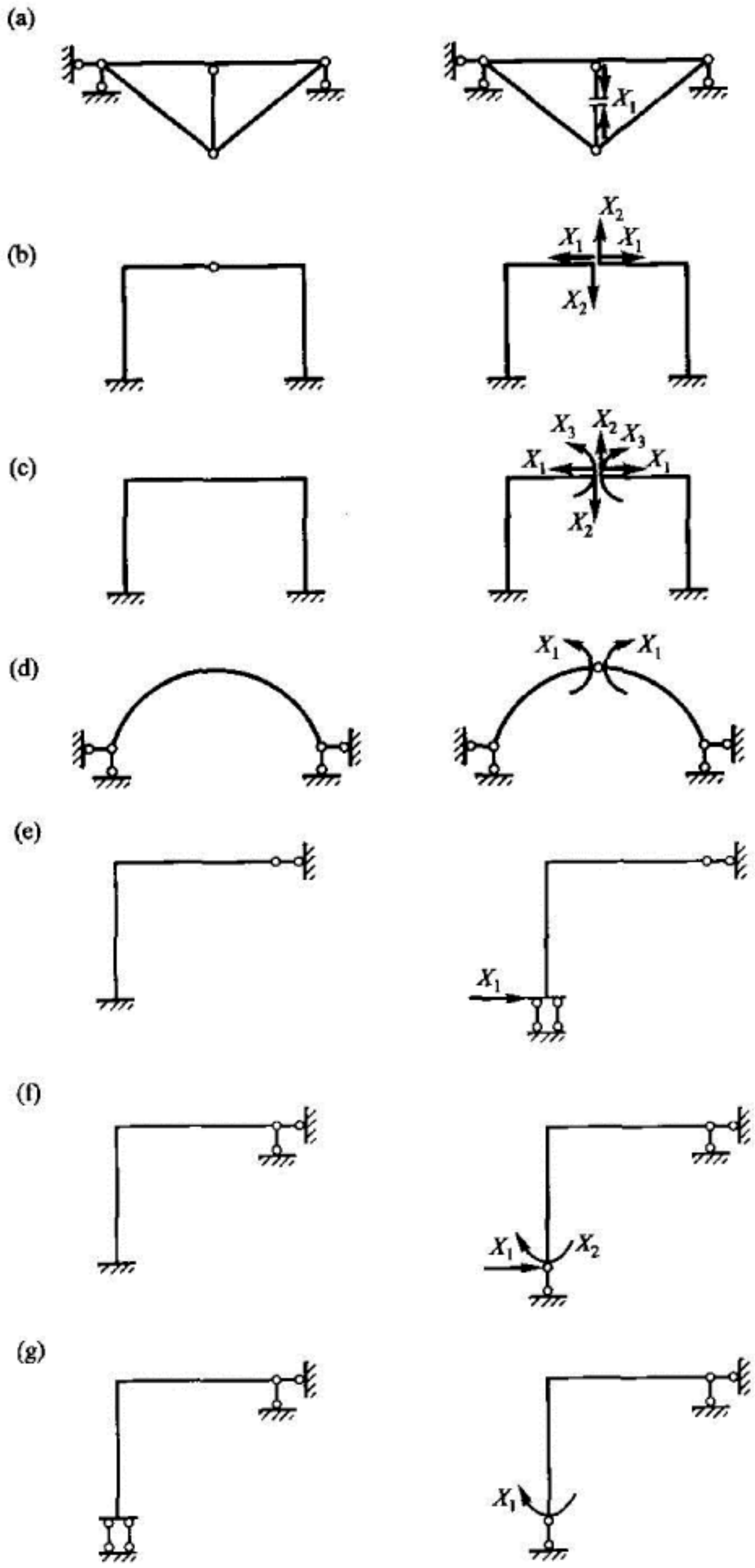


图 7-1-4

（3）其他方法

①对于具有较多框格的结构，按框格的数目来确定超静定次数。

a．一个封闭无铰的框格，其超静定次数等于 3（图 7-1-4（c））。

b．当结构有 n 个封闭无铰框格时，其超静定次数 n＝3f（图 7-1-5（a））。

c．当结构上还有若干铰结处时，设单铰（复铰转化后）数目为 h，则超静定次数 n＝3f－h。例如图 7-1-5（b）所示结构的超静定次数为 n＝3×7－5＝16。

注：在确定封闭框格数目时，应注意由地基本身围成的框格不应计算在内，也就是地基应作为一个开口刚片。图 7-1-5（c）所示结构，其封闭框格数是 3 而不是 4。

②由结构的计算自由度 W 来确定超静定次数 n。

对几何不变体系有 n＝－W。图 7-1-5（a）所示结构，由计算公式得 W＝3×4－（2×5＋3）＝－1，故 n＝1；

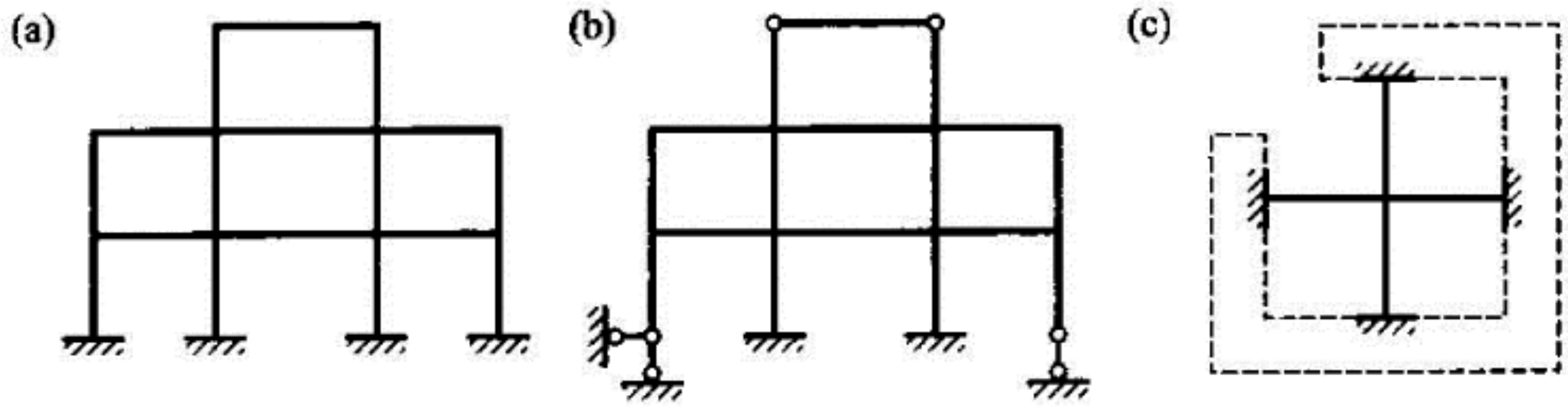


图 7-1-5

二、力法的基本概念

1．定义

解除超静定结构的多余联系而得到静定的基本结构，以多余未知力作为基本未知量，根据基本体系应与原结构变形相同而建立的位移条件，首先求出多余未知力，然后由平衡条件计算其余反力、内力的方法，称为力法。

2．相关概念

（1）力法的基本结构

将原超静定结构中去掉多余联系后所得到的静定结构称为力法的基本结构（图 7-1-6（b））。

（2）力法的基本体系

基本结构在原有荷载和多余未知力共同作用下的体系称为力法的基本体系（图 7-1-6（b））。

（3）力法的基本方程

下式（7-1）称为一次超静定结构的力法基本方程。

3．举例

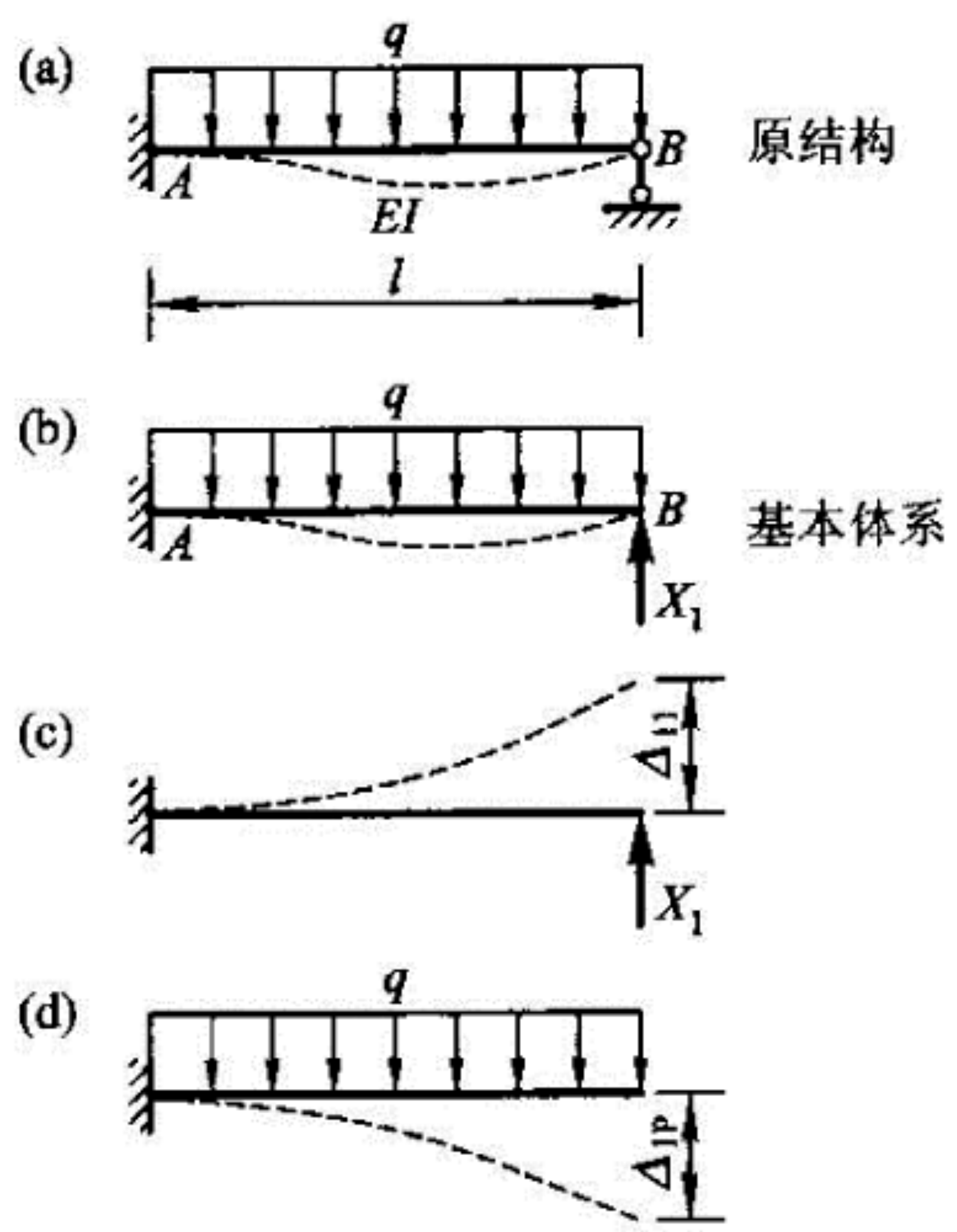


图 7-1-6

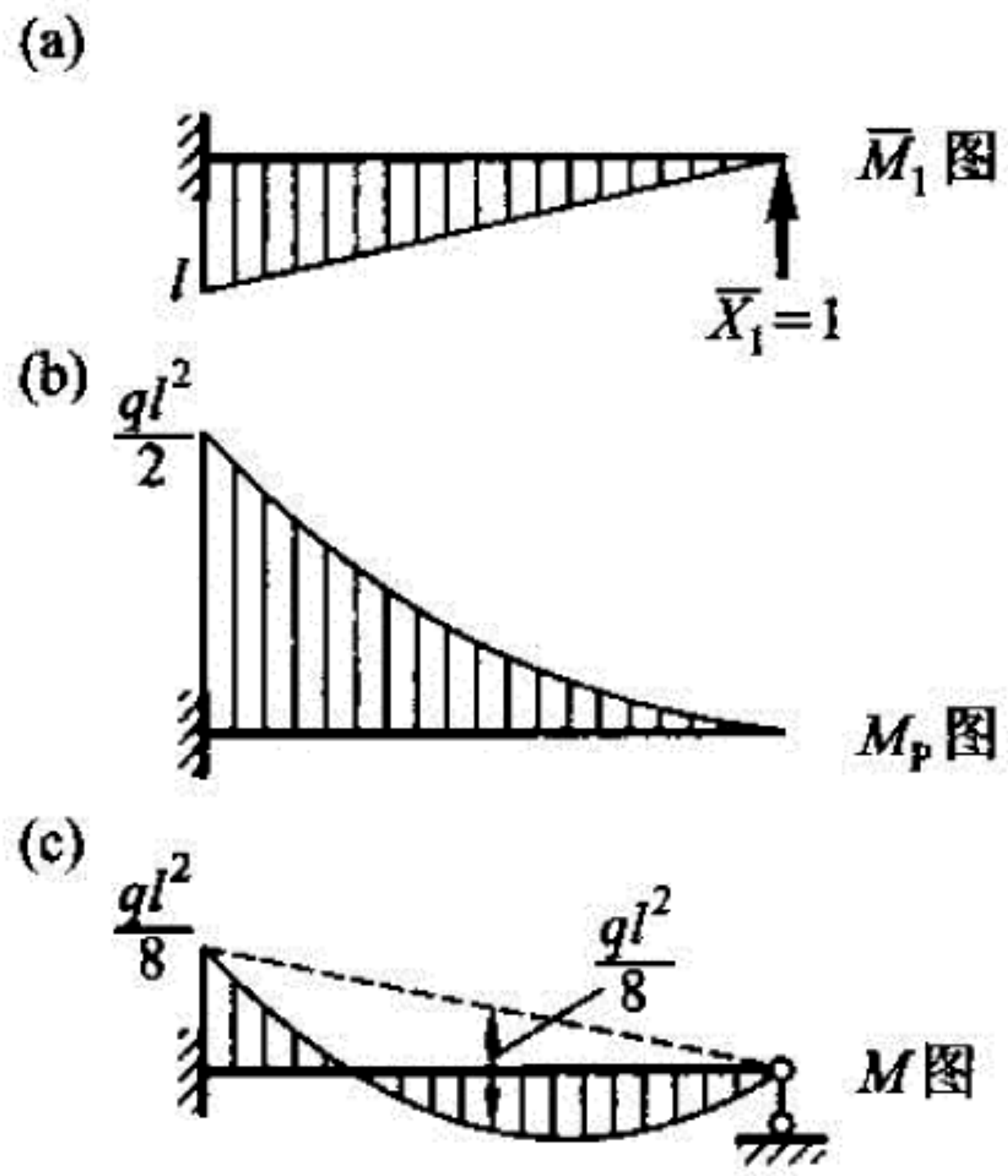


图 7-1-7

图 7-1-6（a）所示梁是一次超静定结构。

（1）基本结构和基本力系

把支座 B 作为多余联系去掉，以未知力 X_1 代替，得到如图 7-1-6（b）中的基本结构和基本力系。

（2）变形条件（位移条件）

考虑变形条件以建立补充方程

$$\Delta_1 = 0$$

可写成

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

或

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \tag{7-1}$$

式中，Δ_1为在载荷 q 和未知力X_1共同作用下 B 点沿X_1方向上的位移；Δ_{11}为 B 点在未知力X_1的作用下沿该力方向的位移；Δ_{1P}为 B 点在载荷 q 作用下沿未知力方向上的位移；δ_{11}表示 B 点在未知力X_1的单位力$\overline{X}_1$作用下沿该力方向上的位移。

注：Δ_{11}和Δ_{1P}都以假定的X_1方向为正。

（3）求解 X_1

①绘出弯矩图

分别绘出基本结构在$\overline{X}_1 = 1$和 q 作用下的弯矩图 $\overline{M}_1$ 图和M_P图（图 7-1-7（a）、（b））。

②图乘法计算δ_{11}和Δ_{1P}

a．求δ_{11}时应为$\overline{M}_1$图乘$\overline{M}_1$图，称为$\overline{M}_1$图“自乘”，即

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2 \mathrm{d}s}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{l^2}{2} \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI}$$

b．求Δ_{1P}则为$\overline{M}_1$图与M_P图相乘，即

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P \mathrm{d}s}{EI} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l\right)\frac{3l}{4} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

③解方程

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\left(-\frac{ql^4}{8EI}\right)\Big/\frac{l^3}{3EI} = \frac{3ql}{8} \ (\uparrow)$$

正号表明 X_1 的实际方向与假定相同，即向上。

（4）求出其余反力和内力

其余反力和内力的计算都是静定结构的力分析问题。

（5）绘制最后的弯矩图

利用 $M = \overline{M}_1 X_1 + M_P$ 按叠加法绘制弯矩图，如图 7-1-7（c）所示。基本体系的弯矩图和原结构的弯矩图相同。

三、力法的典型方程

1．举例

图 7-1-8（a）所示是三次超静定结构。

（1）拆除多余联系，并以相应的多余未知力 X_1、X_2 和 X_3 代替，得到基本结构和基本力系如图 7-1-8（b）所示。

（2）位移条件

$$\begin{cases}\Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0\end{cases} \quad 即 \quad \left.\begin{aligned}\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \Delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0\end{aligned}\right\}$$

式中，Δ_1 为在 X_1、X_2、X_3 和 F 作用下 A 点沿 X_1 方向上的位移；Δ_2 为在 X_1、X_2、X_3 和 F 作用下 A 点沿 X_2 方向上的位移；Δ_3 为在 X_1、X_2、X_3 和 F 作用下 A 点沿 X_1 方向上的位移。

（3）求解方程，画出弯矩图，求出在单位力作用下的位移 δ_{ij}，求出 X_1、X_2、X_3。

（4）求出其余未知内力和反力。

2．n 次超静定结构

（1）位移条件（力法基本方程）

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1i}X_i + \cdots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots + \delta_{ii}X_i + \cdots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{ni}X_i + \cdots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0$$

（2）物理意义

基本结构在全部多余未知力和荷载共同作用下，在去掉各多余联系处沿各多余未知力方向的位移，应与原结构相应的位移相等。

（3）基本概念

①主位移（主系数）

单位多余未知力 $\overline{X}_i = 1$ 单独作用时所引起的沿其本身方向上的位移 δ_{ii} 称为主位移，又称主系数，其值恒为正，且不会等于零。

②副位移（副系数）

单位多余未知力 $\overline{X}_j = 1$ 单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移 δ_{ij} 称为副位移，其值可能为正、负或零，根据位移互等定理可知，负系数满足 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$。

③自由项

荷载 F 单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移 Δ_{iP} 为自由项，其值可能为正、负或零。

④力法的典型方程

力法基本方程在组成上具有一定规律，并有副系数互等的性质，又称力法的典型方程。

（4）位移计算公式

对于平面结构，这些位移的计算式可写为

$$\delta_{ii}=\sum\int\frac{\overline{M}_i^2\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}^2\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}^2\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}=\sum\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}\overline{F}_{Nj}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}\overline{F}_{Sj}\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\Delta_{iP}=\sum\int\frac{\overline{M}_iM_P\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}F_{NP}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}F_{SP}\mathrm{d}s}{GA}$$

（5）其他概念

①力法典型方程中的每个系数都是基本结构在某单位多余未知力作用下的位移，结构的刚度愈小，其数值愈大，又称柔度系数；

②力法典型方程是表示位移条件，又称结构的柔度方程；

③力法又称柔度法。

四、力法的计算步骤

1．计算步骤

（1）确定原结构的超静定次数，去掉多余联系，得出一个静定的基本结构，并以多余未知力代替相应多余联系的作用。

（2）根据基本结构在多余未知力和荷载共同作用下，在所去各多余联系处的位移应与原结构各相应位移相等的条件，建立力法的典型方程。

（3）作出基本结构的各单位内力图和荷载内力图（或内力表达式），按求位移的方法计算典型方程中的系数和自由项。

（4）解算典型方程，求出各多余未知力。

（5）按分析静定结构的方法，由平衡条件或叠加法求得最后内力。

2．相关结论

（1）在荷载作用下，超静定结构的内力只与各杆的刚度相对值有关，而与其刚度绝对值无关；

（2）对于不同材料组成的结构，内力也与材料性质 E 无关；

（3）去掉多余约束而得到的基本结构，必须是几何不变的，不能是几何可变或瞬变的；

（4）对于同一超静定结构，用不同的方式去掉多余约束后得到不同的基本体系。不论用哪一种基本体系求解，最后得到的内力图都是一样的。

五、典型方程的简化

当超静定结构次数多时，应用力法计算太繁琐，为此需从典型方程入手进行简化。

1．简化的原则

使尽可能多的副系数以及自由项等于零。

2．简化的方法

（1）利用对称性简化；

（2）弹性中心法。

3．简化方法的关键

选择合理的基本结构，以及设置适宜的基本未知量。

六、对称性的利用

1．对称结构的条件

（1）结构的几何形状和支承情况对称于此轴。

（2）各杆的刚度（EI、EA 等）也对称于此轴。如图 7-1-8（a）所示。

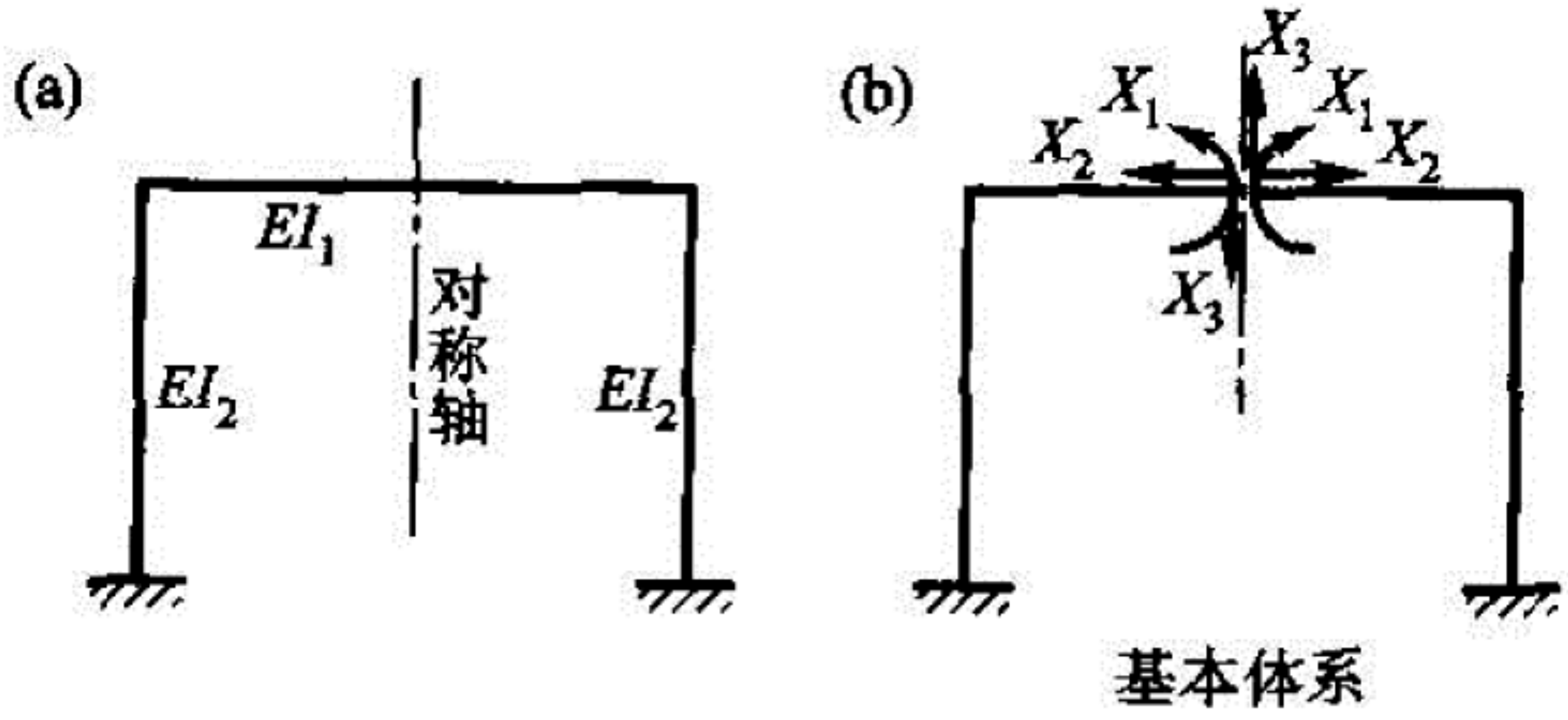


图 7-1-8

2．对称的类型

（1）正对称

如果对称轴两边的力大小相等，绕对称轴对折后作用点和作用线均重合且指向相同，则称为正对称（或简称对称）的力。

（2）反对称

若对称轴两边的力大小相等，绕对称轴对折后作用点和作用线均重合但指向相反，则称为反对称的力。如图 7-1-8（b）所示，X_1 和 X_2 是正对称的，X_3 是反对称的。

3．对称的特点

（1）对称结构在对称荷载作用下，其内力和位移都是正对称的（剪力图是反对称的，而剪力的实际方向则是正对称的）；

（2）对称结构在反对称荷载作用下，其内力和位移都是反对称的（剪力图是正对称的，而剪力的实际方向则是反对称的）。

4．未知力分组及荷载分组

（1）未知力分组的适用情况

基本结构对称，但多余未知力对结构的对称轴来说不是正对称或反对称的，相应的单位内力图也就既非正对称也非反对称，其有关的副系数不等于零，如图 7-1-9 所示。

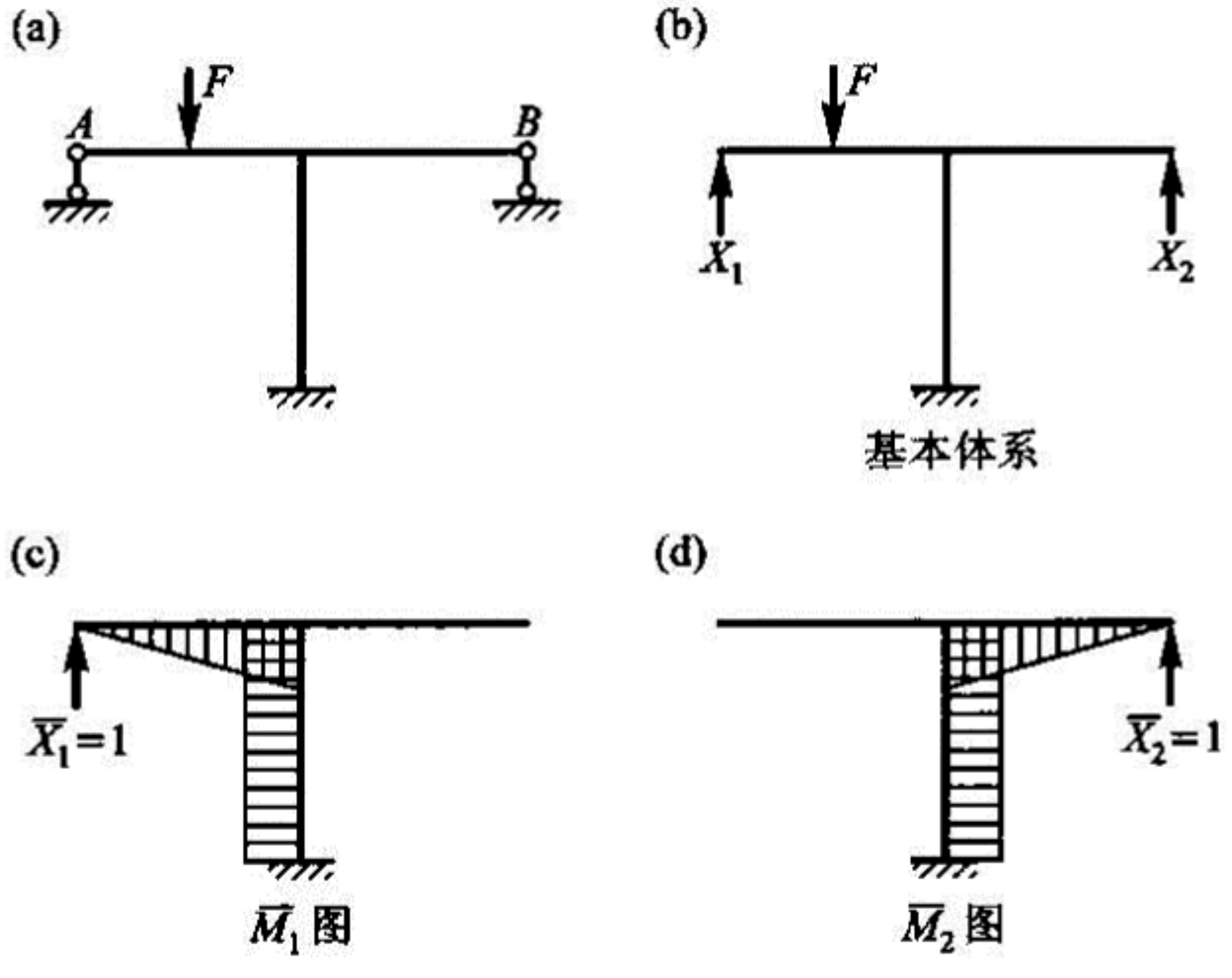


图 7-1-9

（2）未知力分组的方法

将原有在对称位置上的两个多余未知力 X_1 和 X_2 分解为新的两组未知力：一组为两个成正对称的未知力 Y_1，另一组为两个成反对称的未知力 Y_2（图 7-1-10（a））。新的未知力与原有未知力之间具有如下关系，即

$$X_1 = Y_1 + Y_2, \quad X_2 = Y_1 - Y_2$$

或

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$$

式中，Y_1、Y_2 均为广义力。

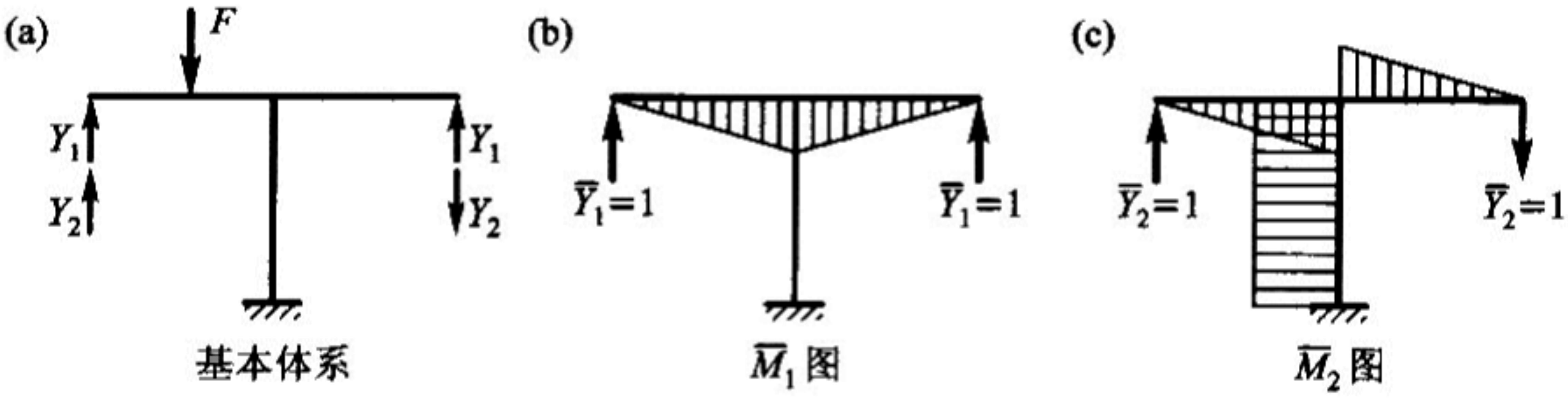


图 7-1-10

（3）未知力分组后的处理

①作弯矩图

a．作 $\overline{M_1}$ 图时要把这两个正对称的单位力同时加上去，所得的 $\overline{M_1}$ 图是正对称的（图 7-1-10（b））。

b．可作出 $\overline{M_2}$ 图（图 7-1-10（c））。

②位移条件

由于 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$ 两图分别为正、反对称，故副系数 $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$。典型方程简化为

$$\delta_{11} Y_1 + \Delta_{1P} = 0 \tag{7-2}$$

$$\delta_{22} Y_2 + \Delta_{2P} = 0 \tag{7-3}$$

③位移方程的物理意义

a．式（7-2）代表基本结构上与广义力 Y_1 相应的广义位移为零，即 A、B 两点同方向的竖向位移之和为零；

b．式（7-3）代表 A、B 两点反方向的竖向位移之和等于零。

（4）其他情况

①对称结构承受一般非对称荷载

a．方法

当对称结构承受一般非对称荷载时，还可以将荷载分解为正、反对称的两组，将它们分别作用于结构上求解，然后将计算结果叠加（图 7-1-11）。

b．结论

若取对称的基本结构计算，则在正对称荷载作用下将只有正对称的多余未知力，反对称荷载作用下只有反对称的多余未知力。

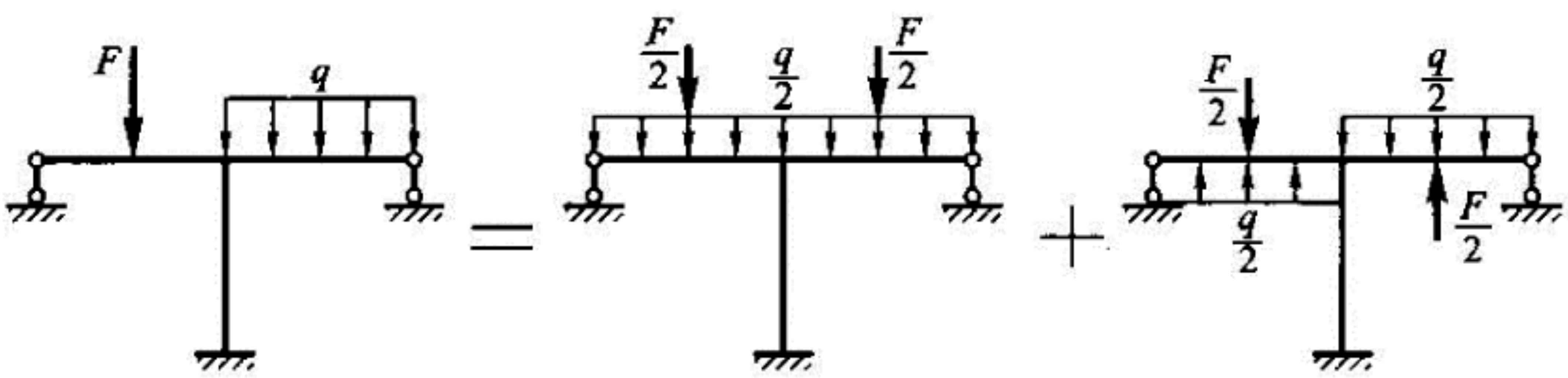


图 7-1-11

5．取一半结构计算

（1）奇数跨对称刚架

①在正对称载荷作用下

a．在正对称荷载作用下，只产生正对称的内力和位移，在对称轴上的截面 C 处不可能发生转角和水平线位移，但可有竖向线位移。同时还有弯矩和轴力，而无剪力，如图 7-1-12（a）所示。

b．截取刚架的一半时，在该处应用滑动支座（又称定向支座）来代替原有联系，从而得到图 7-1-12（b）所示的计算简图。

②在反对称载荷作用下

a．在反对称荷载作用下，只产生反对称的内力和位移，在对称轴上的截面 C 处不可能发生竖向线位移，但可有水平线位移及转角。同时还有剪力而无弯矩、轴力,如图 7-1-12（c）所示。

b．截取一半时该处用一竖向支承链杆来代替原有联系，从而得到图 7-1-12（d）所示的计算简图。

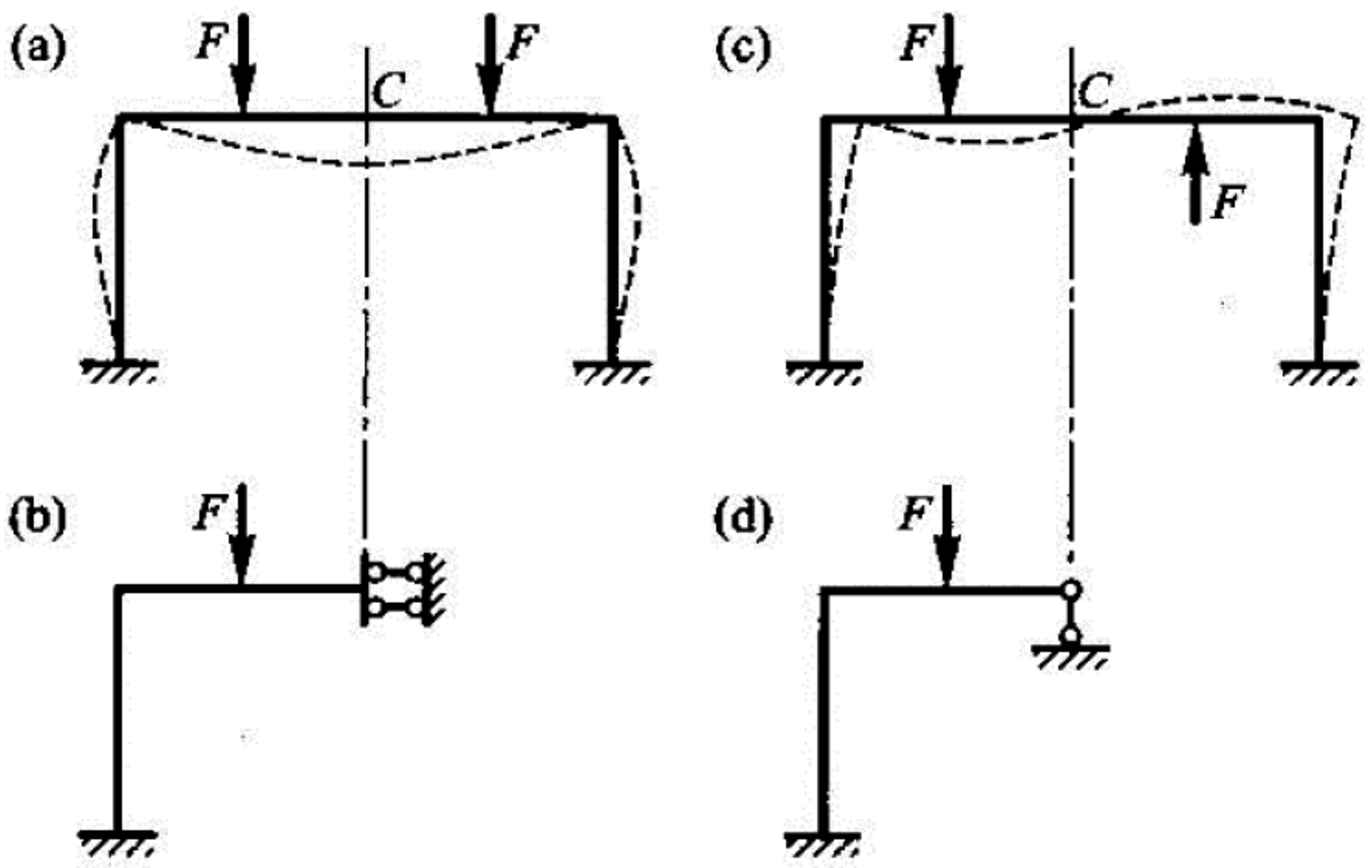


图 7-1-12

（2）偶数跨对称刚架

①在正对称载荷作用下

a．在正对称荷载作用下，若忽略杆件的轴向变形，则在对称轴上的刚结点 C 处将不可能产生任何位移。同时，在该处的横梁杆端有弯矩、轴力和剪力存在。

b．截取一半时该处用固定支座代替，从而得到图 7-1-13（b）所示的计算简图。

②在反对称载荷作用下

在反对称荷载作用下（图 7-1-13（e）），可将其中间柱设想为由两根刚度各为 I/2 的竖柱组成，它们在顶端分别与横梁刚结（图 7-1-13（e）），将中间杆分成两根杆，剪力（7-1-13（f））对原结构没有影响，去掉不计，取一半刚架的计算简图如图 7-1-13（d）所示。

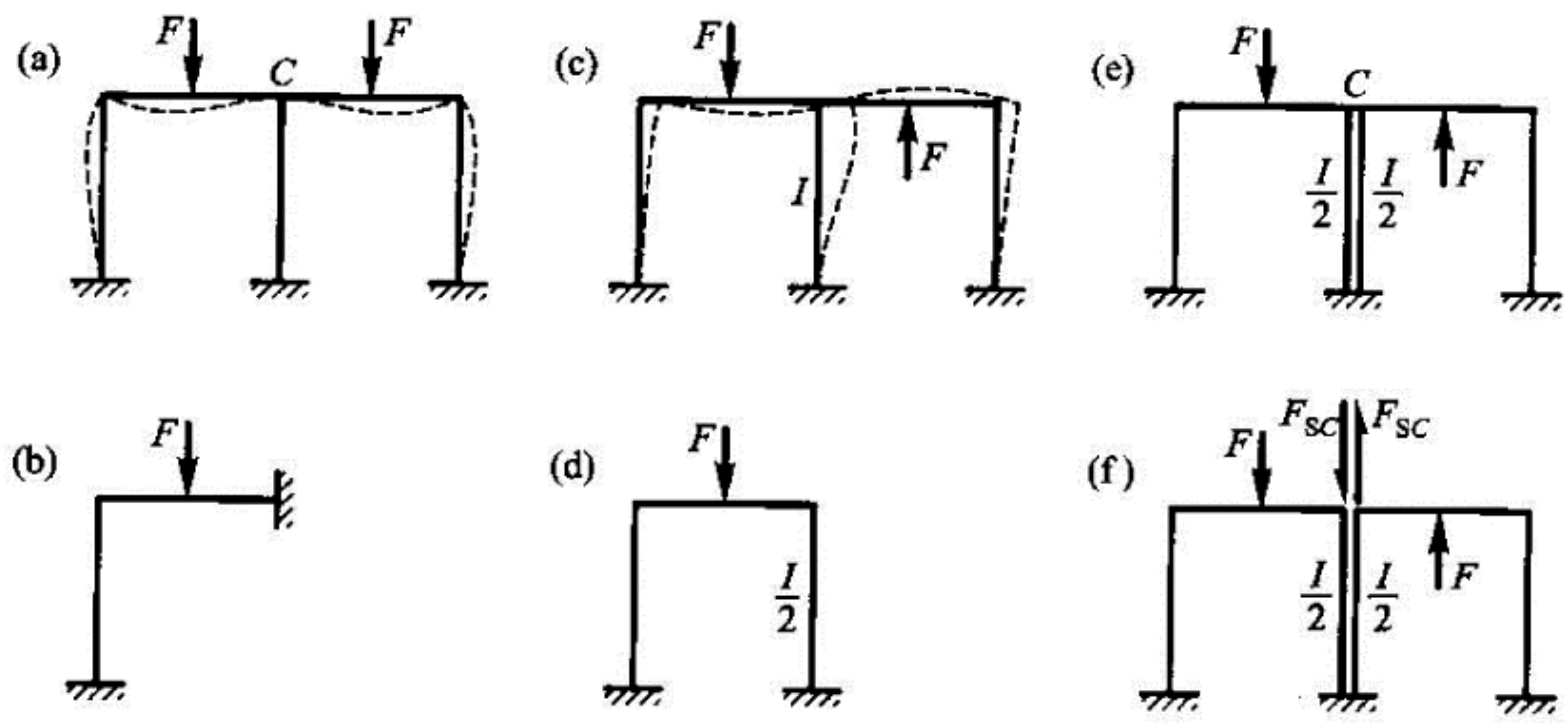


图 7-1-13

七、超静定结构的位移计算

1．理论基础

根据基本结构在荷载和多余未知力共同作用下其位移应与原结构相同这个条件，求超静定结构的位移，完全可以用求基本结构的位移来代替。

2．方法步骤

（1）解算超静定结构，求出最后内力，此为实际状态；

（2）任选一种基本结构，加上单位力求出虚拟状态的内力；

（3）按位移计算公式或图乘法计算所求位移。

八、最后内力图的校核

1．平衡条件校核

取结构的整体或任何部分为隔离体，其受力均应满足平衡条件，如不满足，则表明内力图有错误。

（1）对于刚架的弯矩图，通常应检查刚结点处所受弯矩是否满足 $\sum M=0$ 的平衡条件；

（2）剪力图和轴力图的校核，可取结点、杆件或结构的某一部分为隔离体，考查是否满足 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 的平衡条件。

2．位移条件校核

校核位移条件，就是检查各多余联系处的位移是否与已知的实际位移相符。

（1）对于刚架，可取基本结构的单位弯矩图与原结构的最后弯矩图相乘，看所得位移是否与原结构的已知位移相符。

注：一个 n 次超静定结构需要 n 个位移条件才能检核出全部多余未知力，故位移条件的校核也应进行 n 次。但通常只需抽查少数的位移条件即可，而且也不限于在原来求解时所用的基本结构上进行。

（2）对于具有封闭无铰框格的刚架，利用框格上任一截面处的相对角位移为零的条件来校核弯矩图是很方便的（可简化为校核弯矩图的面积除以相应的刚度代数和应为零）。

九、温度变化时超静定结构的计算

1．温度变化对结构的影响

（1）静定结构

对于静定结构，温度变化将使其产生变形和位移，但不引起内力。如图 7-1-14（a）所示静定梁，当温度改变时，梁将自由地伸长及弯曲而不受到任何阻碍，其变形如 7-1-14（a）图中虚线所示。

（2）超静定结构

对于超静定结构，如图 7-1-14（b）所示，当温度改变时，梁的变形将受到两端支座的限制，因此必将引起支座反力，同时产生内力。

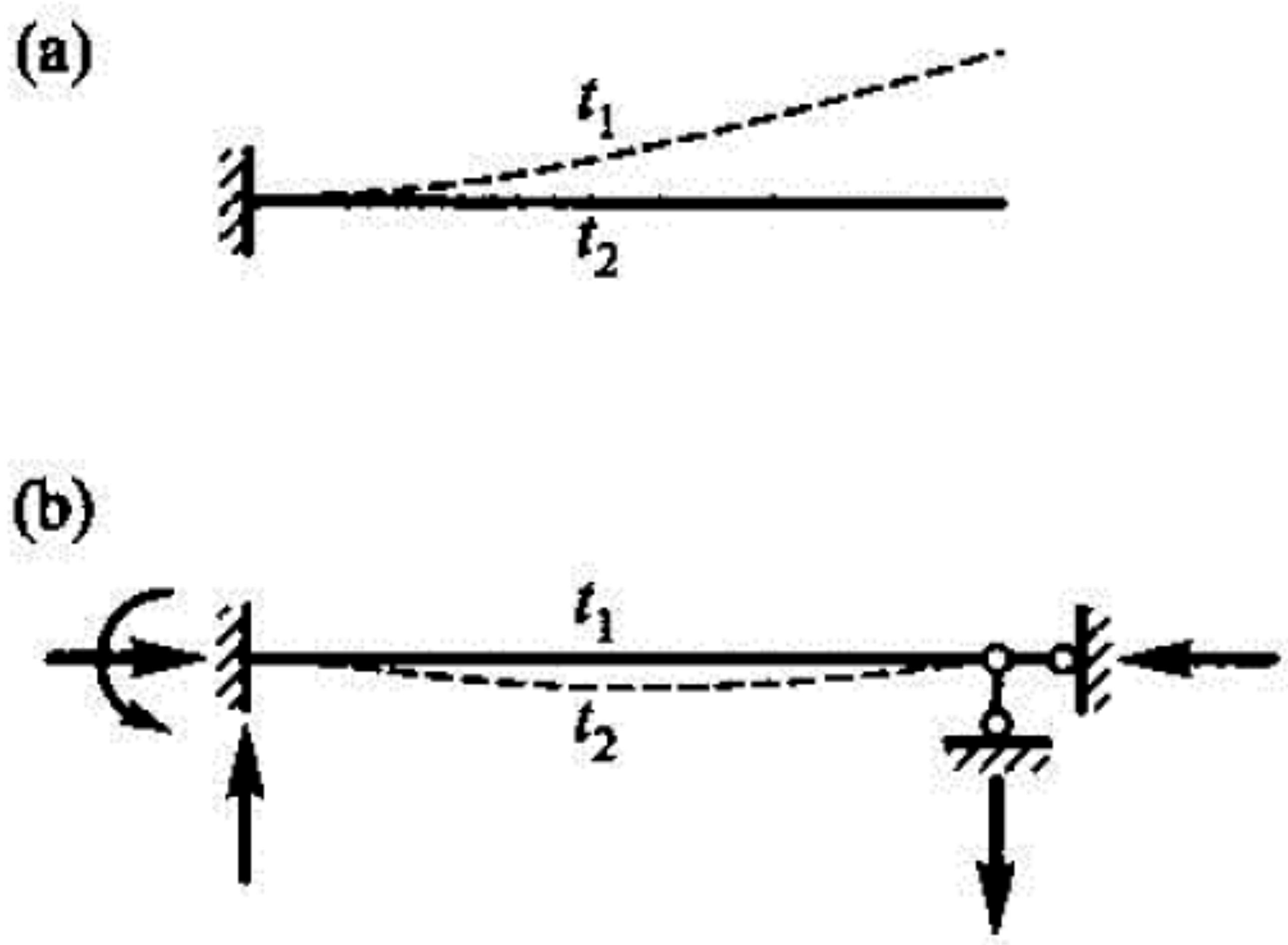


图 7-1-14

2．温度变化时超静定结构中的内力分析

（1）原则

基本结构在外因和多余未知力共同作用下，在去掉多余联系处的位移应与原结构的位移相符。

（2）分析

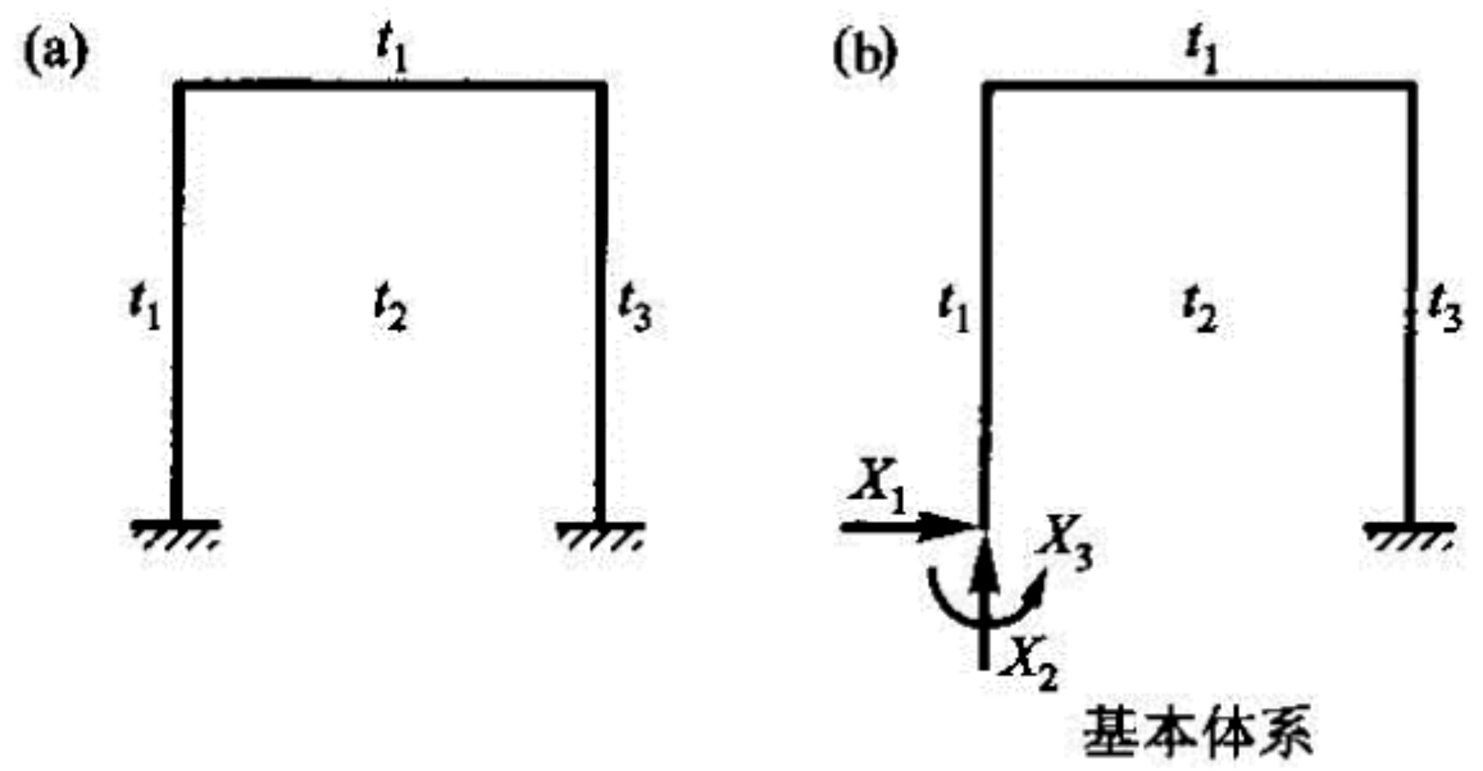


图 7-1-15

①原结构

如图 7-1-15（a）所示刚架，其温度变化如图所示。

②基本体系

取图 7-1-15（b）所示基本体系。

③典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1t}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2t}=0$$
$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3t}=0$$

式中，系数的计算与以前相同，它们是与外因无关的；自由项Δ_{1t}、Δ_{2t}、Δ_{3t}则分别为基本结构由于温度变化引起的沿X_1、X_2、X_3方向的位移。

④Δ_{it}的计算

$$\Delta_{it}=\sum\overline{F}_{Ni}\alpha tl+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\overline{M}_i\mathrm{d}s$$

⑤多余未知力

将系数和自由项求得后代入典型方程即可解出多余未知力。

⑥内力的计算

基本结构是静定的，温度变化并不使其产生内力，故最后内力只是由多余未知力所引起的，即

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\overline{M}_3X_3$$

⑦位移的计算

温度变化却会使基本结构产生位移，除了考虑由于内力而产生的弹性变形所引起的位移外，还要加上由于温度变化所引起的位移。对于刚架，位移计算公式一般可写为

$$\Delta_K=\sum\int\frac{\overline{M}_KM\mathrm{d}s}{EI}+\Delta_{Kt}$$
$$=\sum\int\frac{\overline{M}_KM\mathrm{d}s}{EI}+\sum\overline{F}_{NK}\alpha tl+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\overline{M}_K\mathrm{d}s$$

⑧内力图位移校核

在对最后内力图进行位移条件校核时，应把温度变化所引起的基本结构的位移考虑进去。对多余未知力 X_i 方向上的位移校核式一般为

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\overline{M}_i M ds}{EI} + \Delta_{it} = 0$$

十、支座位移时超静定结构的计算

1．支座位移对结构的影响

（1）静定结构

对于静定结构，支座移动将使其产生位移，但并不产生内力。如图 7-1-16（a）所示静定梁。

（2）超静定结构

如图 7-1-16（b）所示超静定梁，当支座 B 发生位移时，将受到 AC 梁的牵制，因而使各支座产生反力，同时梁产生内力并发生弯曲。

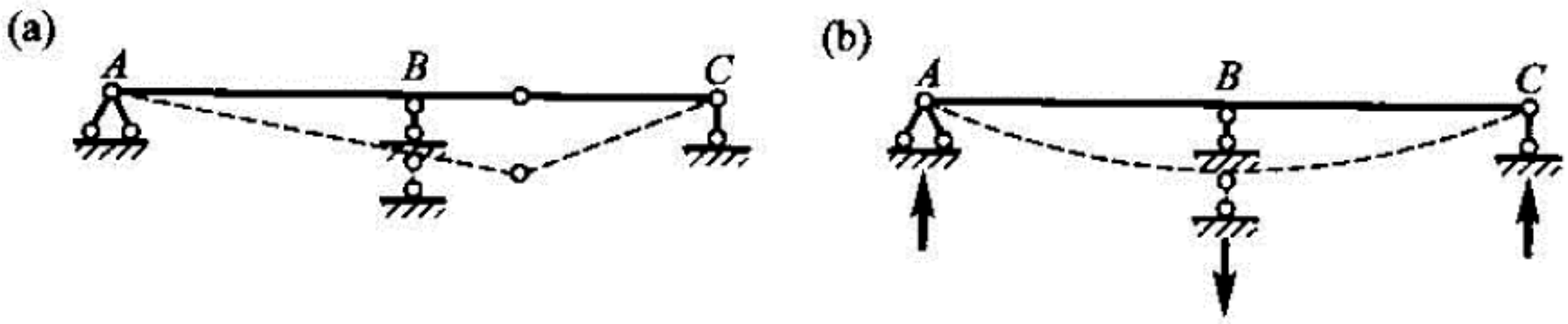


图 7-1-16

2．支座位移时超静定结构的内力分析

（1）原则

基本结构在外因和多余未知力共同作用下，在去掉多余联系处的位移应与原结构的位移相符。

（2）分析

①原结构

如图 7-1-17（a）所示刚架。

②基本体系

设其支座 B 由于某种原因产生了水平位移 a、竖向位移 b 及转角 φ，基本体系如图 7-1-17（b）所示。

③建立典型方程

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1\Delta} &= 0 \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2\Delta} &= -\varphi \\
\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3\Delta} &= -a
\end{aligned}$$

式中，系数与外因无关，其计算同前；自由项 $\Delta_{1\Delta}$、$\Delta_{2\Delta}$、$\Delta_{3\Delta}$ 则分别代表基本结构上由于支座移动所引起的沿 X_1、X_2、X_3 方向的位移。

④ $\Delta_{i\Delta}$ 的计算

$$\Delta_{i\Delta} = -\sum \overline{F}_{Ri} c$$

由图 7-1-17（c）、（d）和（e）所示的虚拟反力，按上式可求得

$$\Delta_{1\Delta}=-\left(-\frac{1}{l}b\right)=\frac{b}{l}$$

$$\Delta_{2\Delta}=-\left(\frac{1}{l}b\right)=-\frac{b}{l}$$

$$\Delta_{3\Delta}=0$$

⑤内力的计算

自由项求出后，其余计算则可仿照温度变化下的情况来进行。此时，最后内力也只是由多余未知力所引起的，即

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\overline{M}_3X_3$$

⑥位移的计算

在求位移时，应加上支座移动的影响，即

$$\Delta_K=\sum\int\frac{\overline{M}_KM\mathrm{d}s}{EI}+\Delta_{K\Delta}$$

$$=\sum\int\frac{\overline{M}_KM\mathrm{d}s}{EI}-\sum\overline{F}_{RK}c$$

⑦位移校核

沿 X_i 方向的位移条件校核式为 $\Delta_i=\sum\int\frac{\overline{M}_iM\mathrm{d}s}{EI}-\sum\overline{F}_{Ri}c=0$ 或已知值。

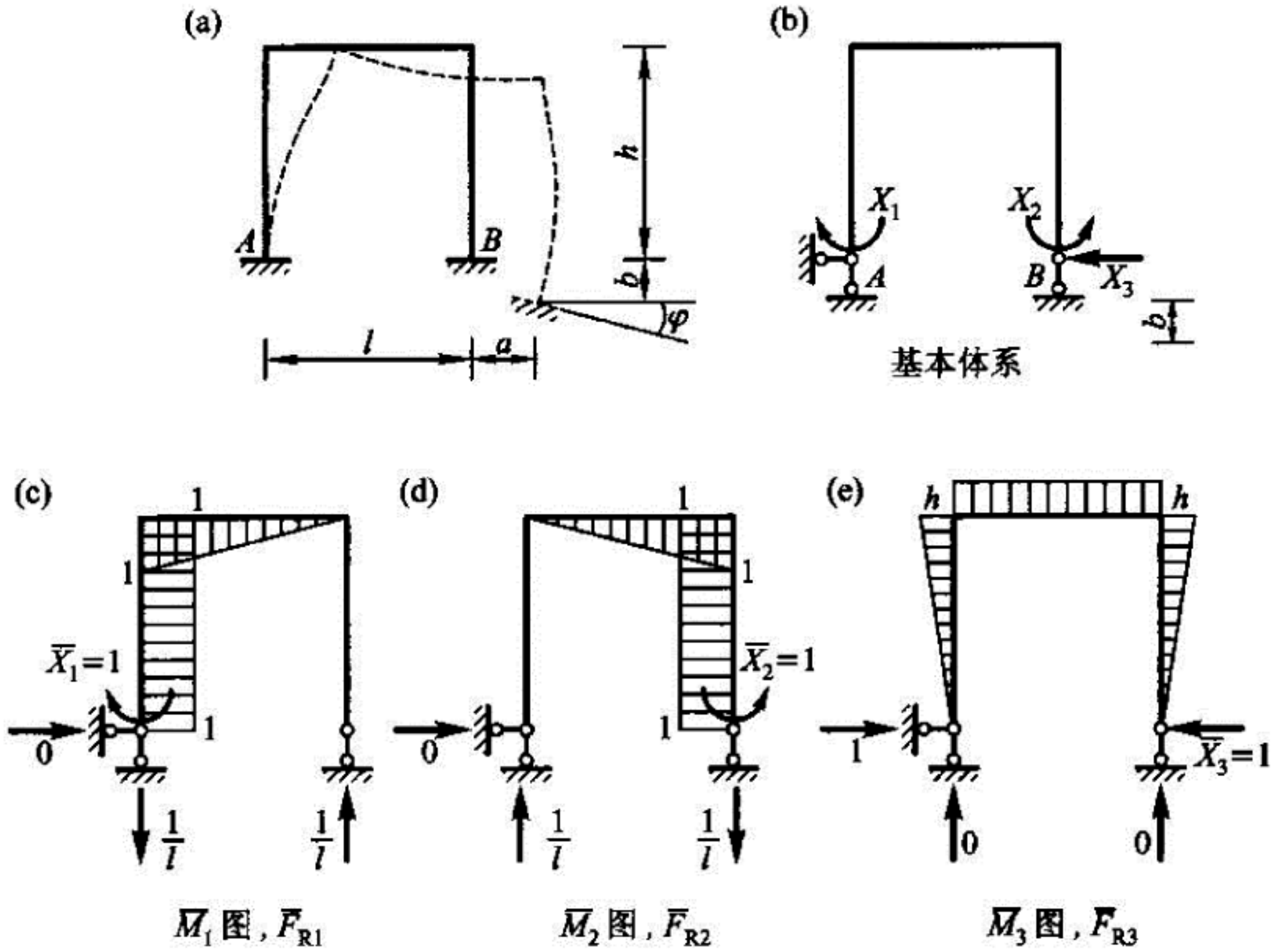


图 7-1-17

十一、用弹性中心法计算无铰拱

1．拱的定义

拱是一种曲轴线推力结构，除三铰拱外，其他都是超静定的。

2．常用形式及特点

（1）无铰拱

如图 7-1-18（a）所示。其弯矩分布比较均匀，且构造简单，工程中应用较多。

（2）两铰拱

如图 7-1-18（b）所示。

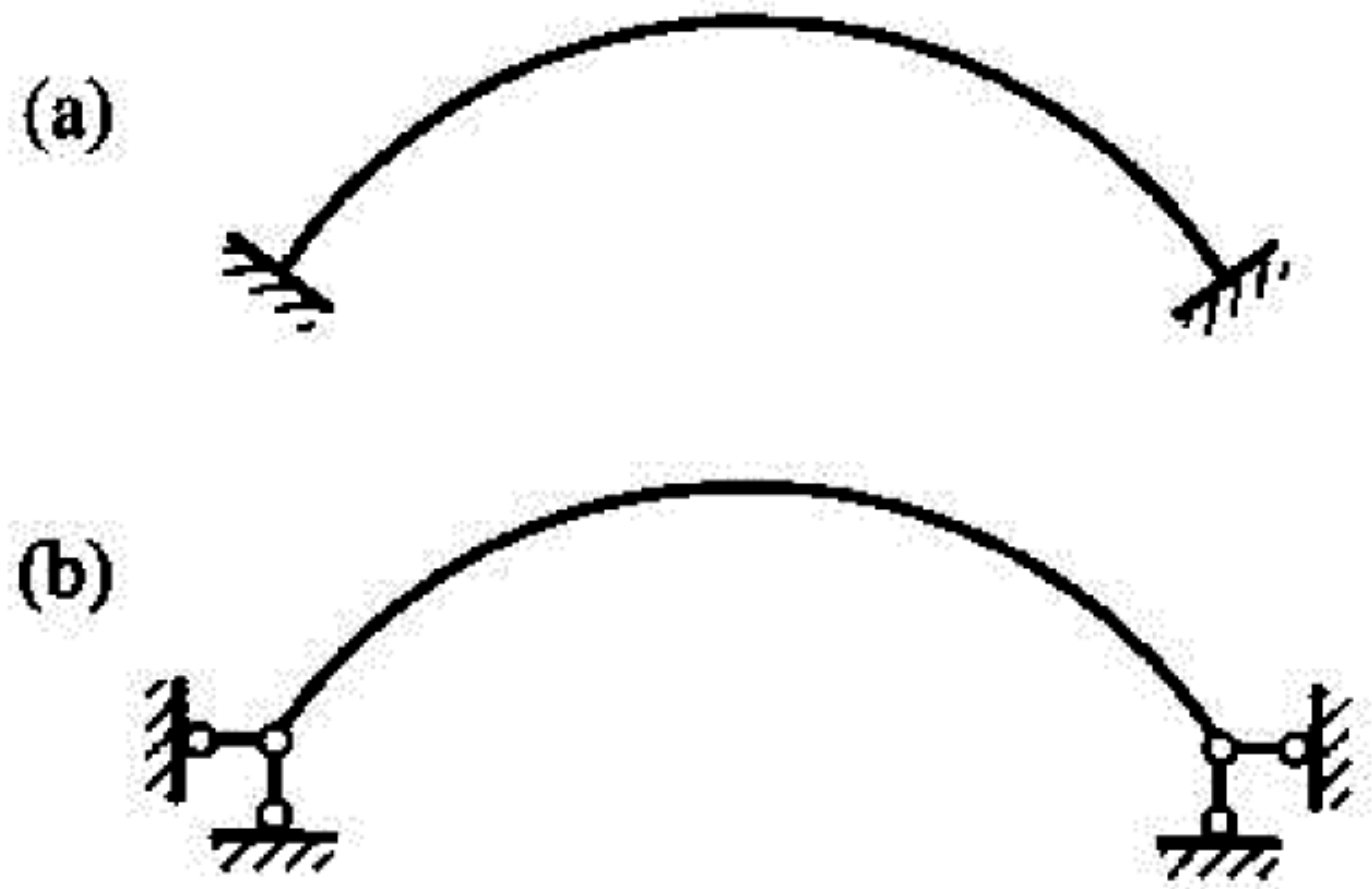


图 7-1-18

3．拱轴线方程和截面变化规律

（1）拱轴线方程

常用的拱轴线形式有悬链线、抛物线、圆弧及多心圆等。初步计算时，常采用相应三铰拱的合理拱轴线作为超静定拱的轴线。然后，根据计算结果加以修改调整，以尽量减小弯矩。

（2）截面变化规律

有变截面的，也有等截面的。在无铰拱中，拱趾处的弯矩常比其他截面大，故常设计成由拱顶向拱趾逐渐增大的形式。

（3）拱桥设计

在拱桥设计中，可采用下列经验公式。

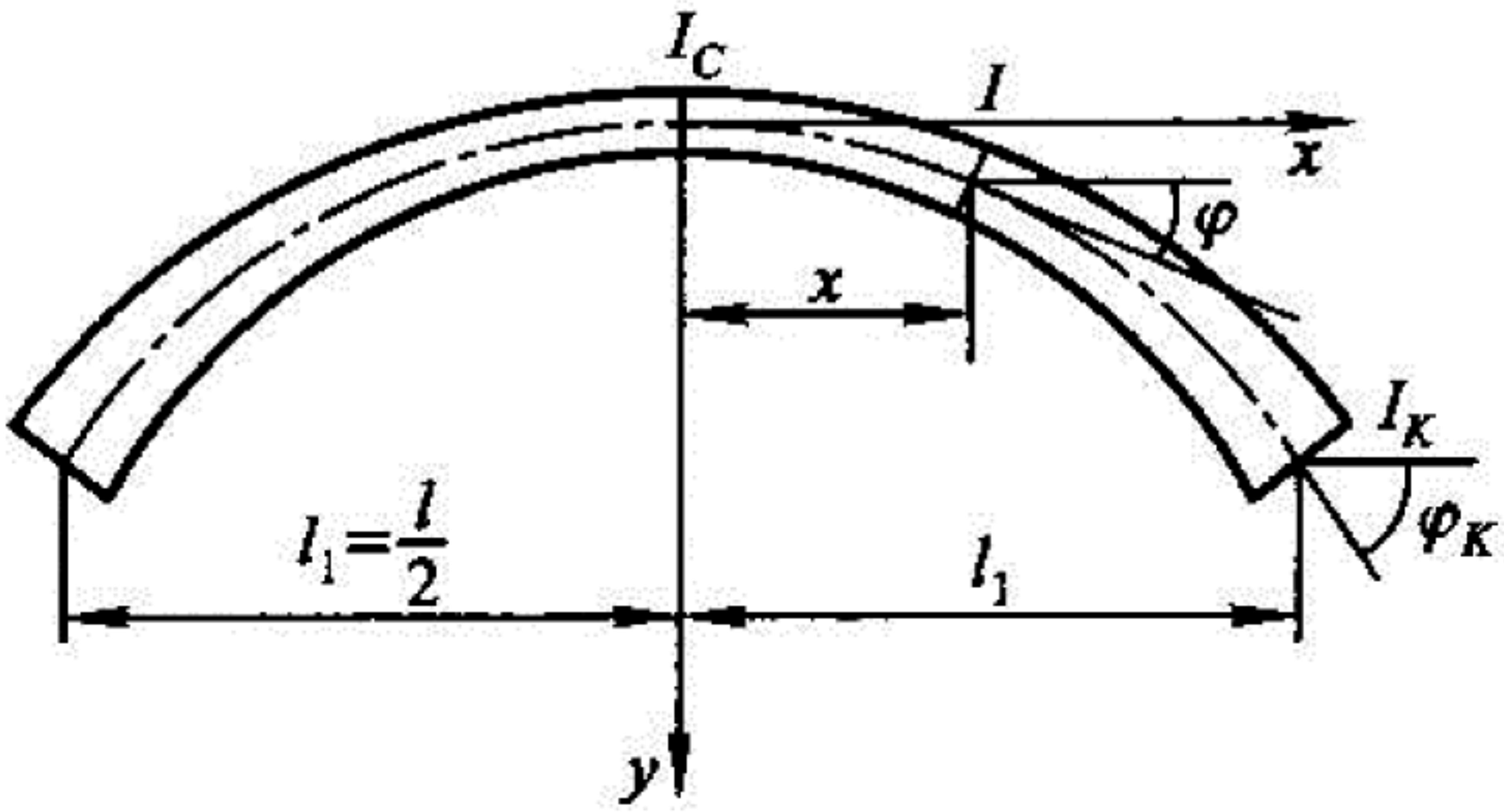


图 7-1-19

$$I=\frac{I_C}{\left[1-(1-n)\frac{x}{l_1}\right]\cos\varphi} \tag{7-4}$$

式中，I 为距拱顶 x 处截面二次矩；φ 为该处拱轴切线倾角；I_C 为拱顶截面二次矩；l_1 为跨度 l 之半；n 为拱厚变

化系数。在拱趾处截面二次矩为 I_K，拱轴切线倾角为 φ_K。

①取 $x=l_1$。由式（7-4）有

$$n=\frac{I_C}{I_K\cos\varphi_K}$$

n 愈小，I_C 与 I_K 之比愈小，即拱厚变化愈剧烈。n 的范围一般为 0.25～1。

②当取 n＝1 时，由上式知，截面二次矩即按下列“余弦规律”变化为

$$I=\frac{I_C}{\cos\varphi}$$

对于截面面积 A，为了简化计算常近似取为

$$A=\frac{A_C}{\cos\varphi}$$

当拱高，$f<l/8$ 时，因 φ 较小，又可近似取为 $A=A_C=$常数。

4．无铰拱的力法计算

（1）原结构：无铰拱是三次超静定结构，对称无铰拱，如图 7-1-20（a）所示。

（2）基本体系：在计算时为了简化应取对称的基本结构。从拱顶切开，则其基本体系如图 7-1-20（b）所示。

（3）副系数：由于多余未知力中的弯矩 X_1 和轴力 X_2 是正对称的，剪力 X_3 是反对称的，故知副系数

$$\delta_{13}=\delta_{31}=0$$
$$\delta_{23}=\delta_{32}=0 \tag{7-5}$$

另有 $\delta_{12}=\delta_{21}\neq0$。

（4）“刚臂”法

①目的

使 $\delta_{12}=\delta_{21}=0$，简化方程。

②方法

a．将图 7-1-20（a）所示的对称无铰拱沿拱顶截面切开；

b．在切口两边沿对称轴方向引出两个刚度为无穷大的伸臂——“刚臂”；

c．在两刚臂下端将其刚结，得到如图 7-1-20（c）所示的结构；

d．将刚臂下端的刚结处切开，并代以多余未知力 X_1、X_2 和 X_3，便得到基本体系如图 7-1-20（d）所示，它是两个带刚臂的悬臂曲梁；

f．利用对称性，并适当选择刚臂长度，使典型方程中全部副系数都等于零。

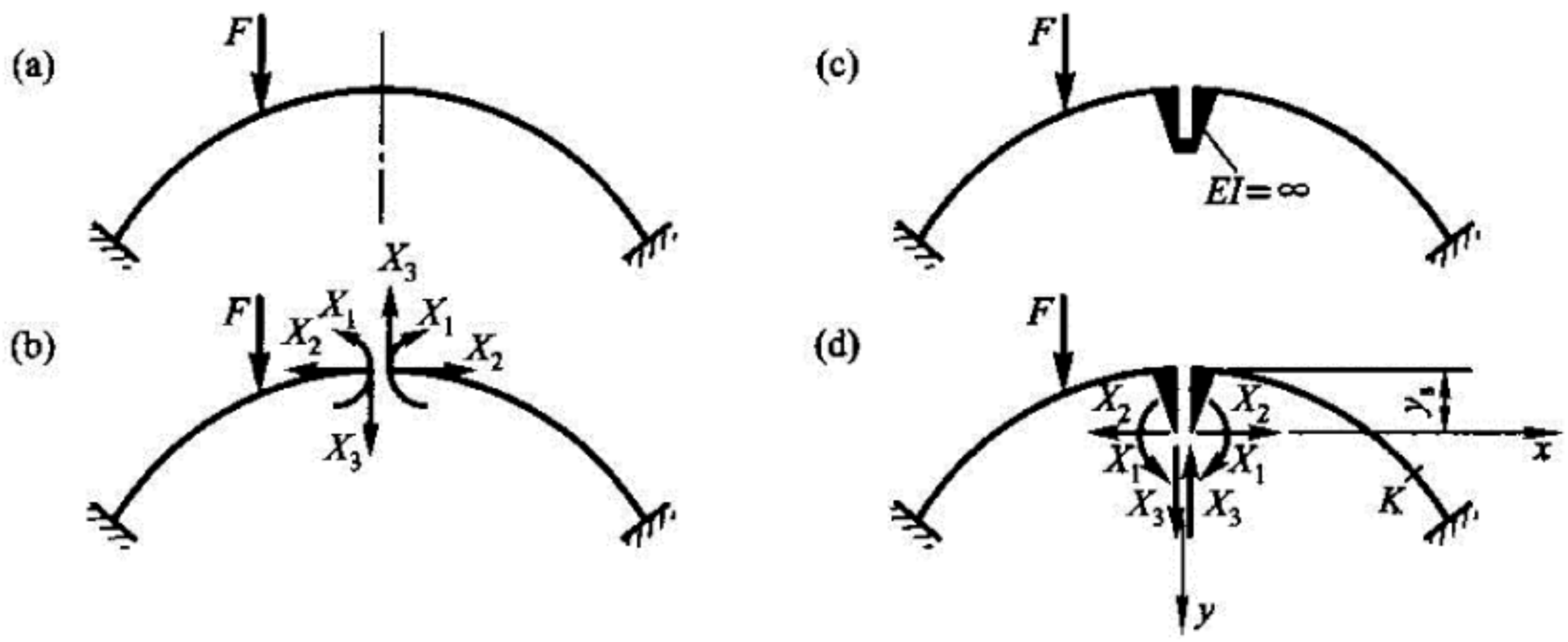


图 7-1-20

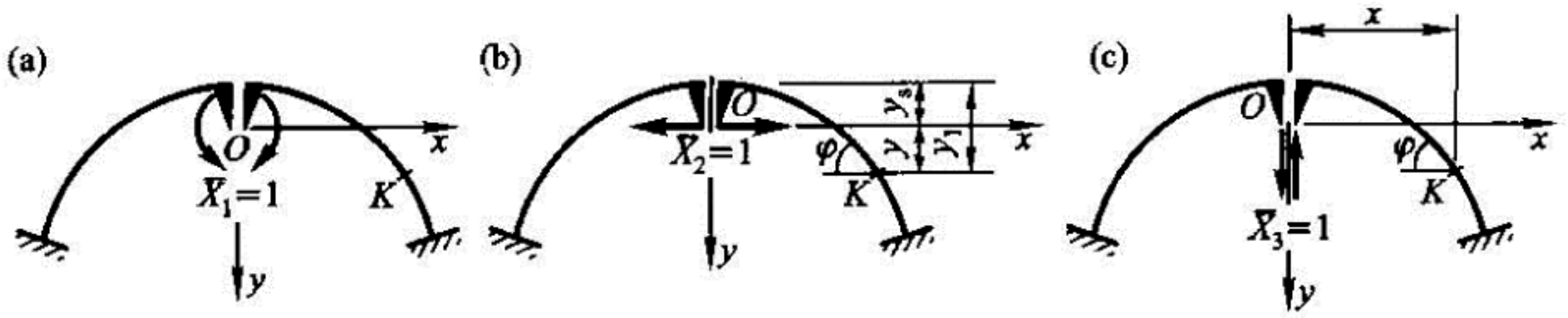


图 7-1-21

③单位未知力下基本结构的内力

a．坐标系建立及方向规定

以刚臂端点 O 为坐标原点，并规定 x 轴向右为正，y 轴向下为正，弯矩以使拱内侧受拉为正，剪力以绕隔离体顺时针方向为正，轴力以压力为正。

b．内力计算

当 $\bar{X}_1=1$、$\bar{X}_2=1$、$\bar{X}_3=1$ 分别作用时（图 7-1-21（a）、（b）和（c））所引起的内力为

$$\left.\begin{array}{lll}\bar{M}_1=1, & \bar{F}_{S1}=0, & \bar{F}_{N1}=0\\ \bar{M}_2=y, & \bar{F}_{S2}=\sin\varphi, & \bar{F}_{N2}=\cos\varphi\\ \bar{M}_3=x, & \bar{F}_{S3}=\cos\varphi, & \bar{F}_{N3}=-\sin\varphi\end{array}\right\}$$

式中，φ 为拱轴各点切线的倾角，由于 x 轴向右为正，y 轴向下为正，故 φ 在右半拱取正，左半拱取负。

④求解 y_s

考虑到 Δ_K 的计算公式，且

$$\begin{aligned}\delta_{12}=\delta_{21}&=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\bar{F}_{N1}\bar{F}_{N2}\mathrm{d}s}{EA}+\int k\frac{\bar{F}_{S1}\bar{F}_{S2}\mathrm{d}s}{GA}\\&=\int\frac{\bar{M}_1\bar{M}_2\mathrm{d}s}{EI}+0+0\\&=\int y\frac{\mathrm{d}s}{EI}=\int(y_1-y_s)\frac{\mathrm{d}s}{EI}=\int y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI}-y_s\int\frac{\mathrm{d}s}{EI}\end{aligned}$$

令 $\delta_{12}=\delta_{21}=0$，便可得到刚臂长度 y_s 为

$$y_s=\frac{\int y_1\frac{\mathrm{d}s}{EI}}{\int\frac{\mathrm{d}s}{EI}}\tag{7-6}$$

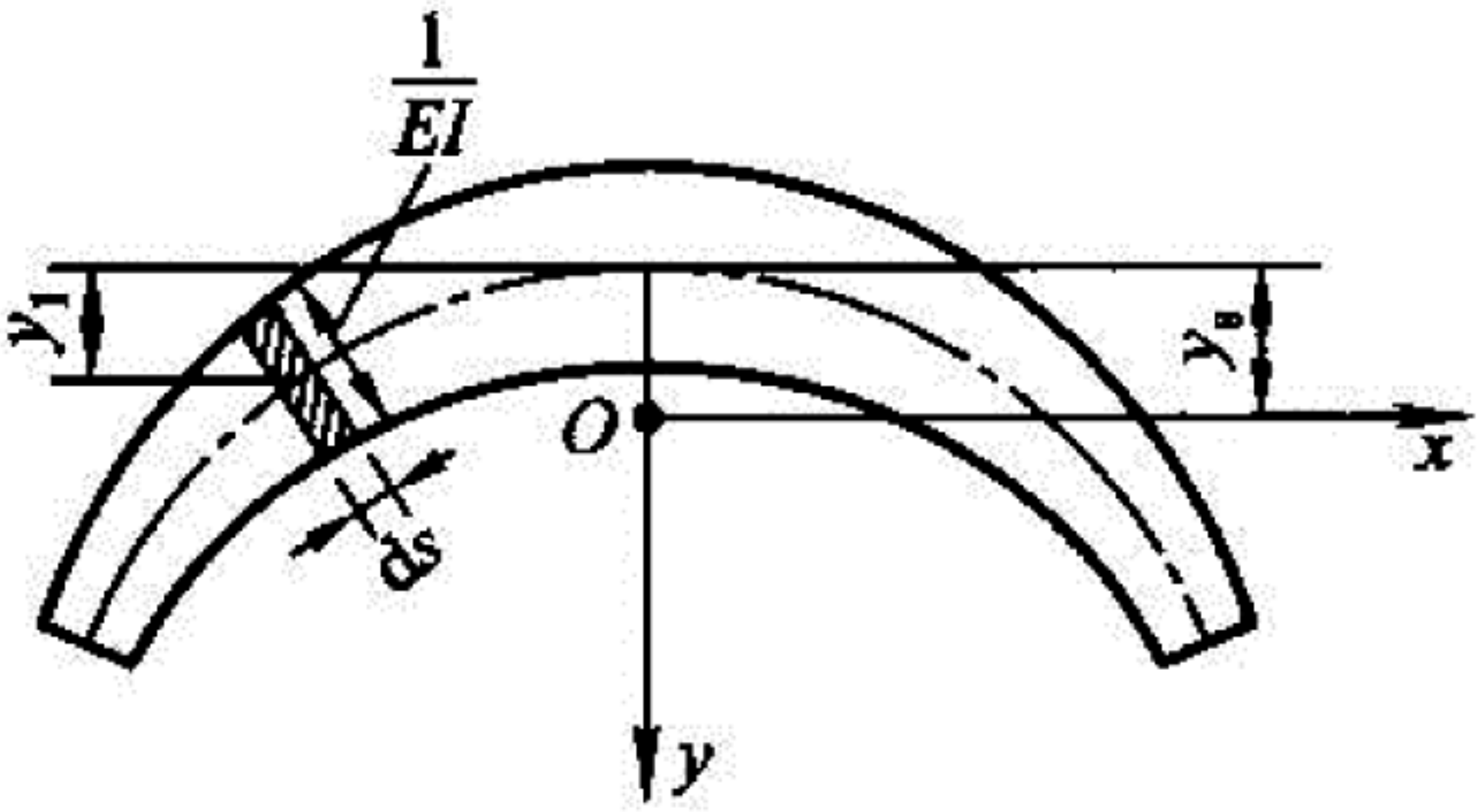


图 7-1-22

⑤弹性中心法

a．y_s 的意义

沿拱轴线作宽度等于$\frac{1}{EI}$的图形（图 7-1-22），则$\frac{ds}{EI}$就代表此图中的微面积，而式（7-6）就是计算这个图形面积的形心坐标公式。

b．弹性面积图和弹性中心

图形的面积与结构的弹性性质 EI 有关，称它为弹性面积图，它的形心则称为弹性中心。

c．弹性中心法

由于 y 轴是对称轴，则 x、y 是弹性面积的一对形心主轴。把刚臂端点引到弹性中心上，且将 X_2、X_3 置于主轴方向上，就可以使全部副系数都等于零。这一方法就称为弹性中心法。

d．典型方程简化

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$
$$\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0$$

f．多余未知力求解

$$\left.\begin{aligned}X_1&=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}\\X_2&=-\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}\\X_3&=-\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}7)$$

g．系数和自由项的计算

不考虑曲率对变形的影响，用直杆的位移计算公式来求系数和自由项

$$\delta_{ii}=\int\frac{\overline{M}_i^2\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\overline{F}_{Ni}^2\mathrm{d}s}{EA}+\int k\frac{\overline{F}_{Si}^2\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\Delta_{iP}=\int\frac{\overline{M}_iM_P\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\overline{F}_{Ni}F_{NP}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int k\frac{\overline{F}_{Si}F_{SP}\mathrm{d}s}{GA}$$

h．常见处理方法

对于多数情况，通常可忽略轴向变形和剪切变形的影响，但在少数情况下这两项影响也必须加以考虑。根据实际经验总结如表 7-1-1，计算时可作参考。

表 7-1-1　计算系数和自由项时需考虑影响的内力

f	h_C	δ_{22}	δ_{33}	Δ_{2P}, Δ_{3P}
$f<\frac{l}{5}$		M, F_N	M	M
$f>\frac{l}{5}$	$h_C>\frac{l}{10}$	M, F_N, F_S	M, F_S	
	$h_C<\frac{l}{10}$	M	M	

对于一般拱桥，常有拱顶截面高度 $h_C<\frac{l}{10}$。

第一，当拱高 $f<\frac{l}{5}$ 时

此时才须考虑轴力对 δ_{22} 的影响，将各系数和自由项的计算公式写为

$$\left.\begin{aligned}
E\delta_{11} &= \int \overline{M}_1^2 \frac{ds}{I} = \int \frac{ds}{I} \\
E\delta_{22} &= \int \overline{M}_2^2 \frac{ds}{I} + \int \overline{F}_{N2}^2 \frac{ds}{A} = \int y^2 \frac{ds}{I} + \int \cos^2\varphi \frac{ds}{A} \\
E\delta_{33} &= \int \overline{M}_3^2 \frac{ds}{I} = \int x^2 \frac{ds}{I} \\
E\Delta_{1P} &= \int \overline{M}_1 M_P \frac{ds}{I} = \int M_P \frac{ds}{I} \\
E\Delta_{2P} &= \int \overline{M}_2 M_P \frac{ds}{I} = \int y M_P \frac{ds}{I} \\
E\Delta_{3P} &= \int \overline{M}_3 M_P \frac{ds}{I} = \int x M_P \frac{ds}{I}
\end{aligned}\right\} \tag{7-8}$$

第二，若 $f>\frac{l}{5}$

则 δ_{22} 中的轴力影响项也可略去。

第三，余弦规律

当截面按“余弦规律”变化，即

$$I=\frac{I_C}{\cos\varphi},\quad A=\frac{A_C}{\cos\varphi}$$

则有

$$\frac{ds}{I}=\frac{ds\cos\varphi}{I_C}=\frac{dx}{I_C},\quad \frac{ds}{A}=\frac{dx}{A_C}$$

这时，式（7-7）可写成

$$
\left.\begin{aligned}
EI_C\delta_{11} &= \int \mathrm{d}x = l \\
EI_C\delta_{22} &= \int y^2\mathrm{d}x + \frac{I_C}{A_C}\int \cos^2\varphi\mathrm{d}x \\
EI_C\delta_{33} &= \int x^2\mathrm{d}x \\
EI_C\Delta_{1P} &= \int M_P\mathrm{d}x \\
EI_C\Delta_{2P} &= \int yM_P\mathrm{d}x \\
EI_C\Delta_{3P} &= \int xM_P\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}9)
$$

第四，数值积分法（总和法）

把拱沿轴线或跨度等分为若干段，把各段的近似计算结果总加起来，作为上述积分式的近似值。通常，可采用梯形法或辛普森法（即抛物线法）进行计算。主要是解决式（7-8）、（7-9）积分困难的问题。

k．最终求解

第一，用总和法或积分法算出各系数和自由项后，代入典型方程（7-7）中求得三个多余未知力的数值。

第二，将无铰拱看作是在荷载和多余未知力共同作用下的两根悬臂曲梁（图 7-1-20（d）），其任一截面的内力可按叠加法求得

$$
\left.\begin{aligned}
M &= X_1 + X_2y + X_3x + M_P \\
F_S &= X_2\sin\varphi + X_3\cos\varphi + F_{SP} \\
F_N &= X_2\cos\varphi - X_3\sin\varphi + F_{NP}
\end{aligned}\right\}
$$

式中，M_P、F_{SP}和 F_{NP}:分别为基本结构在荷载作用下该截面的弯矩、剪力和轴力。

十二、两铰拱及系杆拱

1．两铰拱

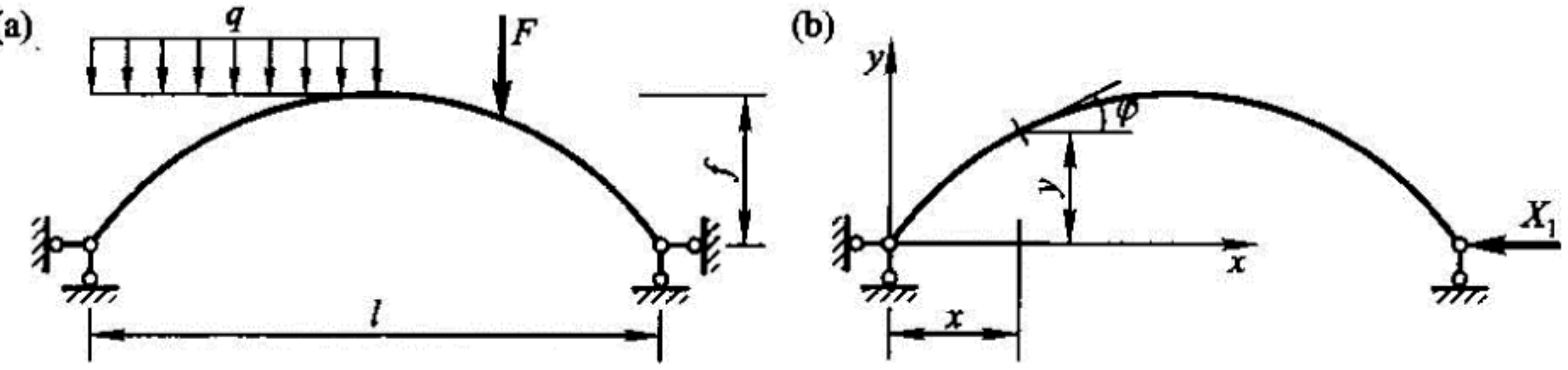


图 7-1-23

（1）变形情况

两铰拱是一次超静定结构（图 7-1-23（a）），当其支座发生竖向位移时并不引起内力，故在地基可能发生较大的不均匀沉陷时宜于采用。

（2）截面变化规律

两铰拱的弯矩在两端拱趾处为零而逐渐向拱顶增大，其截面一般相应设计为由拱趾向拱顶逐渐增大的形式。通常采用的变化规律为

$$I = I_C\cos\varphi$$

但按这个规律计算很不方便。经验表明，当 $f<\frac{l}{4}$ 时，可以采用式

$$I=\frac{I_C}{\cos\varphi}$$

（3）基本体系

计算两铰拱时，通常采用简支曲梁为基本结构，以支座的水平推力 X_1 为多余未知力（图 7-1-23（b））。

（4）典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（5）系数和自由项计算

略去剪力影响，轴力影响通常仅当 $f<\frac{l}{5}$ 时才在 δ_{11} 中予以考虑。因此有

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI}+\int\frac{\overline{F}_{N1}^2\mathrm{d}s}{EA},\quad \Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P\mathrm{d}s}{EI}$$

（6）未知力求解

因 $\overline{M}_1=-y,\overline{F}_{N1}=\cos\varphi$，故有

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{\int yM_P\frac{\mathrm{d}s}{I}}{\int y^2\frac{\mathrm{d}s}{I}+\int\cos^2\varphi\frac{\mathrm{d}s}{A}}$$

与计算无铰拱一样，当积分困难时可以采用总和法来近似计算。

（7）其他内力的计算

任一截面的内力计算式与三铰拱是相似的，即

$$\left.\begin{aligned}M&=M^0-X_1y\\F_S&=F_S^0\cos\varphi-X_1\sin\varphi\\F_N&=F_S^0\sin\varphi+X_1\cos\varphi\end{aligned}\right\}$$

2．系杆拱

（1）定义

带拉杆的两铰拱称为系杆拱，如图 7-1-24（a）所示。

（2）受力情况

拱的水平推力将由系杆承受而不传到下部支承结构上去，支座不受水平推力的作用。

（3）基本体系

系杆的内力 X_1 为多余未知力（图 7-1-24（b）所示）。

（3）典型方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（4）计算 δ_{11}

注意不能丢掉系杆轴向变形的影响，即

$$\delta_{11}=\int \overline{M}_1^2\frac{ds}{EI}+\int \overline{F}_{N1}^2\frac{ds}{EA}+\frac{l}{E_1A_1}$$

$$\Delta_{1P}=\int \overline{M}_1 M_P\frac{ds}{EI}$$

式中，$\frac{l}{E_1A_1}$为系杆在$\overline{X_1}=1$作用下的轴向变形；E_1A_1为系杆的抗拉刚度。

（5）求解X_1

以$\overline{M}_1=-y,\overline{F}_{N1}=\cos\varphi$代入，可得

$$X_1=\frac{\int yM_P\frac{ds}{EI}}{\int y^2\frac{ds}{EI}+\int \cos^2\varphi\frac{ds}{EA}+\frac{l}{E_1A_1}}$$

（6）结论

系杆拱的推力要比相应两铰拱的推力小。

①当系杆的$E_1A_1\to\infty$，则系杆拱的内力与两铰拱相同；

②当$E_1A_1\to 0$时，则$X_1\to 0$，系杆拱将成为简支曲梁而丧失拱的特征。

设计系杆拱时应适当加大系杆的抗拉刚度，以减小拱的弯矩。

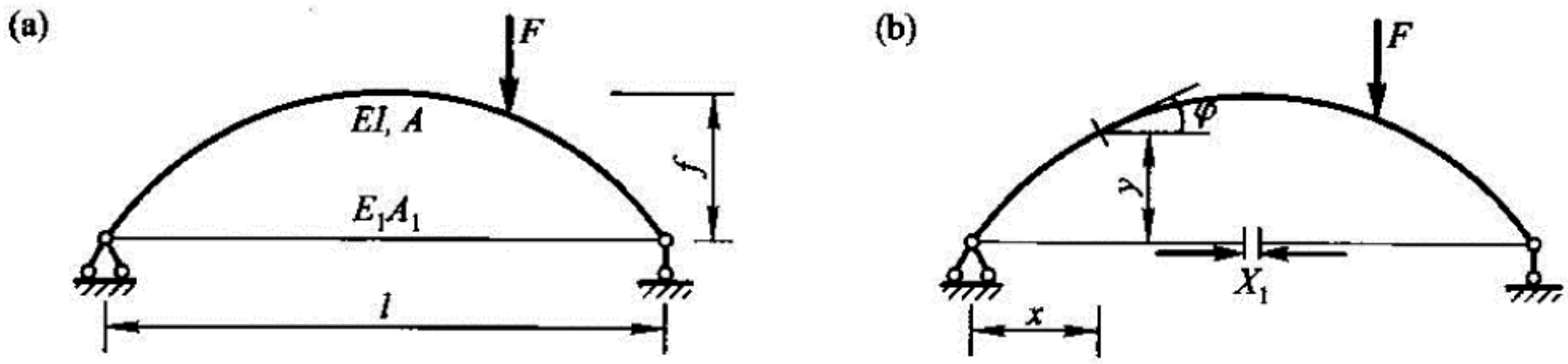


图 7-1-24

3．系杆拱的其他情况

（1）受力情况

工程中有些系杆拱中系杆颇为粗大，不仅能承受轴力，而且能承受弯矩和剪力。

（2）计算简图确定

在确定其计算简图时，应该按照拱圈与系杆二者抗弯刚度的相对大小来考虑。设拱圈与系杆材料相同，前者截面的二次矩为I_a，后者的为I_b，则有

①柔性系杆刚性拱

此时，系杆刚度甚小

$$\frac{I_b}{I_a}=\frac{1}{80}\sim\frac{1}{100}$$

故可认为系杆只能承受轴力。计算简图如图 7-1-25（b）所示，为一带拉杆的两铰拱，是一次超静定的。

②刚性系杆柔性拱

此时，拱圈刚度甚小

$$\frac{I_b}{I_a}=80\sim 100$$

则可认为拱仅能承受轴力，系杆则可承受弯矩和剪力。计算简图如图 7-1-25（c）所示，为一带链杆拱的加劲梁，也是一次超静定的。

③刚性系杆刚性拱

此时，拱圈与系杆二者刚度相差不大，均能承受弯矩与剪力。吊杆（竖杆）通常刚度较小，仍可视为链杆。其计算简图如图 7-1-25（d）所示，为多次超静定的（次数等于吊杆数加 3），用力法计算就比前两种复杂多了。

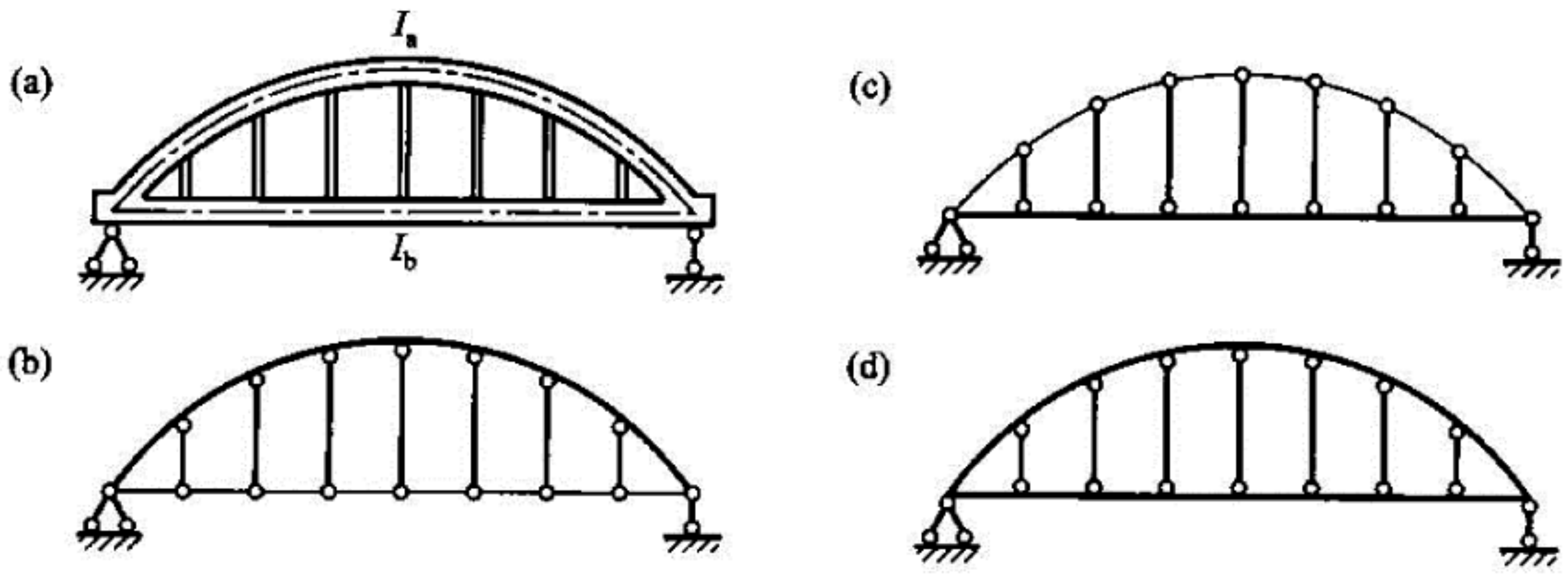


图 7-1-25

4．桁架拱

（1）结构形式

图 7-1-26（a）所示桁架拱片是其主要承重结构，它包括桁架部分和实腹部分。

（2）计算简图

考虑到拱片两端仅有一小段插入墩台的预留孔中，可认为属于铰结，因而可取图 7-1-26（b）所示的计算简图，即为两铰拱。

（3）典型方程

桁架拱是一次超静定结构，可取支座的水平推力为多余未知力（图 7-1-26（c）），典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（4）系数和自由项的计算

计算系数和自由项时，由于桁架部分各杆只受轴力，而实腹部分则主要是弯矩影响，因此有

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{EA}+\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}F_{NP}l}{EA}+\int\frac{\overline{M}_1M_P\mathrm{d}s}{EI}$$

（5）求解 X_1

由于实腹部分是变截面的，式中第二项比较难于积分，故一般用总和法近似求解。多余未知力 X_1 求得之后，便可求得其他内力。

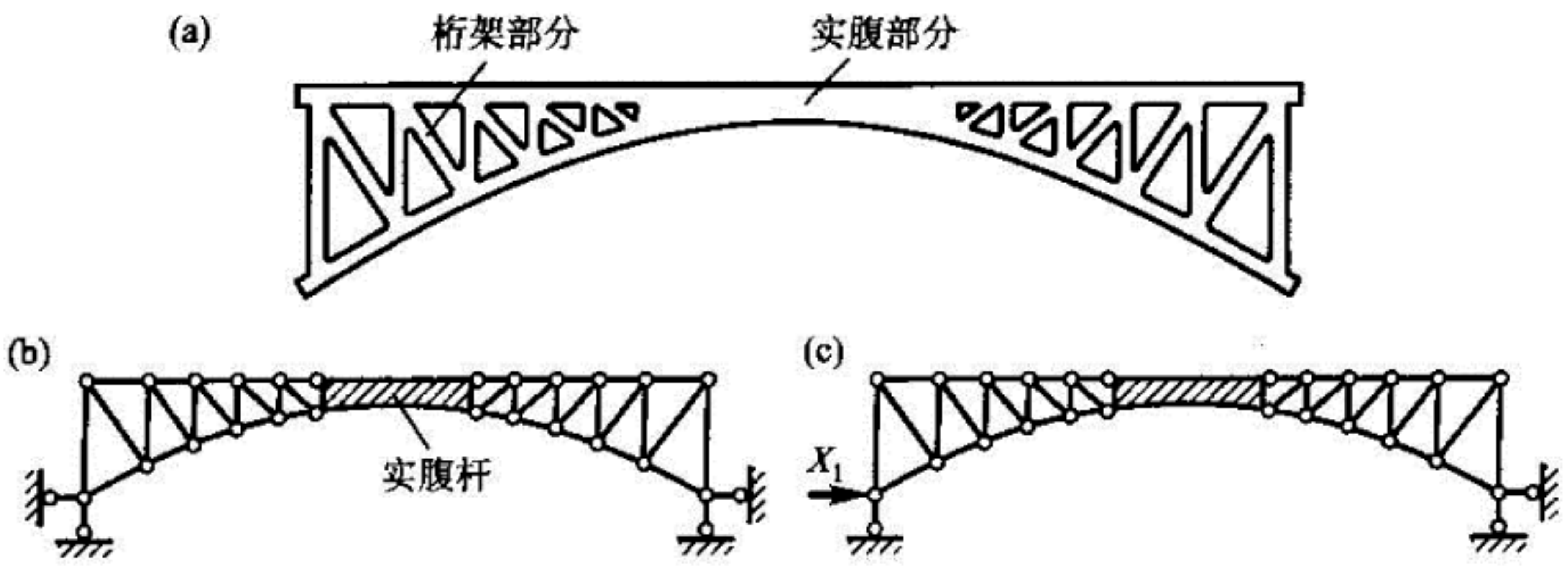


图 7-1-26

十三、超静定结构的特性

1. 外界变化的影响

（1）对于静定结构，除荷载外，其他任何因素如温度变化、支座位移等均不引起内力。

（2）对于超静定结构，由于存在着多余联系，当结构受到这些因素影响而发生位移时，一般将要受到多余联系的约束，因而相应地要产生内力。

2. 内力的确定

（1）静定结构的内力只按平衡条件即可确定，其值与结构的材料性质和截面尺寸无关。

（2）超静定结构的内力只由平衡条件无法全部确定，还必须考虑变形条件才能确定其解答，其内力数值与材料性质和截面尺寸有关。

（3）计算超静定结构时，先根据经验拟定或用较简单的方法近似估算各杆截面尺寸，以此为基础进行计算。然后，按算出的内力再选择所需的截面。如果与初选的截面不符，需再次调整截面再计算，如此反复进行。也可通过改变各杆的刚度大小来调整超静定结构的内力分布，以达到预期的目的。

3. 多余联系的影响

（1）超静定结构在多余联系被破坏后，仍能维持几何不变；

（2）静定结构在任何一个联系被破坏后，便立即成为几何可变体系而丧失了承载能力；

（3）超静定结构由于具有多余联系，一般地说，要比相应的静定结构刚度大些，内力分布也均匀些。

7.2 课后习题详解

复习思考题

1. 力法解超静定结构的思路是什么？

答：力法解超静定结构的思路是首先以多余未知力作为基本未知量，根据基本体系应与原结构变形相同而建立的位移条件，求出多余未知力；然后由平衡条件计算其余反力、内力。

2. 什么是力法的基本结构和基本体系？它们在计算中起什么作用？基本体系与原结构有何异同？

答：（1）基本结构和基本体系的定义

①力法的基本结构是指将原超静定结构中的多余联系去掉后所得到的静定结构；

②基本体系是指基本结构在原有荷载和多余未知力共同作用下的体系。

（2）基本结构和基本体系在计算中的作用

①力法的基本方程中系数和自由项的求解以及最终结构内力和反力的计算均是在基本结构上进行的；

②基本体系是在建立力法的基本方程时，方程右端数值确定的关键。

（3）基本体系与原结构异同点

①不同点：基本体系用未知力代替了原结构的约束。

②相同点：基本体系与原结构最后的变形相同，这也是建立力法典型方程的位移条件。

3. 力法典型方程的物理意义是什么？方程中每一系数和自由项的含义是什么？怎样求得？

答：（1）力法典型方程的物理意义

基本结构在全部多余未知力和荷载的共同作用下，在去掉各多余联系处沿多余未知力方向的位移后，应与原结构相应的位移相等。

（2）系数和自由项的含义

①主系数 δ_{ii}：单位多余未知力 $\bar{X}_i = 1$ 单独作用时所引起的沿其本身方向上的位移。

②副系数 δ_{ij}：单位多余未知力 $\bar{X}_j = 1$ 单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移。

③自由项 Δ_{ip}：荷载 F 单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移。

（3）在平面结构中这些系数和自由项的求法如下

$$\delta_{ii}=\sum\int\frac{\overline{M}_i^2\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}^2\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}^2\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}=\sum\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}\overline{F}_{Nj}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}\overline{F}_{Sj}\mathrm{d}s}{GA}$$

$$\Delta_{iP}=\sum\int\frac{\overline{M}_iM_P\mathrm{d}s}{EI}+\sum\int\frac{\overline{F}_{Ni}F_{NP}\mathrm{d}s}{EA}+\sum\int\frac{k\overline{F}_{Si}F_{SP}\mathrm{d}s}{GA}$$

4．为什么主系数恒大于零，而副系数及自由项可为正、负或零？

答：因为主系数是单位多余未知力$\overline{X}_i=1$单独作用时所引起的沿其本身方向上的位移，它总是与该单位力的方向一致，故总是正的；而副系数和自由项两个荷载产生的弯矩图的方向不一定一致，故可为正、负或零。

5．典型方程的右端是否一定为零？在什么情况下不为零？

答：（1）典型方程的右端不一定为零。

（2）当计算支座移动的超静定结构时，把移动的支座视为多余约束，那么典型方程的右端就不为零，此时需要根据多余约束处已知的位移条件建立典型方程。

6．超静定结构的内力在什么情况下只与各杆刚度的相对大小有关？什么情况下与各杆刚度的绝对大小有关？

答：（1）荷载作用下，超静定结构的内力只与各杆的刚度相对值有关，而与其刚度绝对值无关。

（2）在非荷载因素作用下，如温度变化、支座移动、制造误差等，超静定结构的内力与各杆刚度的绝对大小有关。

7．试比较用力法计算超静定梁和刚架、桁架、组合结构及排架的异同。

答：用力法计算超静定梁和刚架、桁架、组合结构及排架的异同点：

（1）相同点

用力法计算超静定梁和刚架、桁架、组合结构及排架的计算原理和步骤均相同。

（2）不同点

在计算典型方程的系数和自由项时所用公式有所差异（与求静定结构的位移时相同），刚架、桁架、组合结构的超静定次数一般比较高，所以经常利用对称性取半结构进行计算。

8．何谓对称结构？何谓正对称和反对称的力和位移？怎样利用对称性简化力法计算？

答：（1）对称结构的定义

对称结构是指几何形状和支承情况关于对称轴对称且各杆的刚度（EI、EA 等）也对称于对称轴的结构。

（2）正对称和反对称的力和位移

①正对称力（位移）是指对称轴两边的力（位移）大小相等，绕对称轴对折后作用点和作用线均重合且指向相同的一对力（位移）；

②反对称力（位移）是指对称轴两边的力（位移）大小相等，绕对称轴对折后作用点和作用线均重合但指向相反的一对力（位移）。

（3）利用对称性简化力法计算

当对称结构承受正对称或反对称荷载时，可以只截取结构的一半进行计算，可以有效减少未知力的数量。

9．为何超静定结构最后内力图的校核包括平衡条件和位移条件两方面的校核？

答：仅仅满足平衡条件还不足以说明最后的内力图是正确的，这是因为最后的内力图是在求得多余力之后按平衡条件求出的，而多余未知力本身是否有误，单靠平衡条件是检查不出来的，尚需进行位移条件的校核。

10．怎样求超静定结构的位移？为什么可以把虚拟单位荷载加在任何一种基本结构上？

答：（1）求解超静定结构位移的步骤如下：

①解算超静定结构，求出最后内力，此为实际状态；
②任选一种基本结构，加上单位力求出虚拟状态的内力；
③按位移计算公式或图乘法计算所求位移。

（2）虚拟单位荷载可以加在任何基本结构上的原因如下：

①根据建立力法典型方程的基本原理可知在荷载及已求出的多余未知力共同作用下，基本结构的受力和位移与原结构是完全一致的，因此求超静定结构的位移，完全可以用求基本结构的位移来代替。

②超静定结构的最后内力图并不因为所取基本结构的不同而异，即其实际内力可以看作是选取任何一种基本结构求得的。因此，在求位移时，可以任选一种基本结构来求虚拟状态的内力。

11．用力法计算超静定结构在温度变化和支座位移影响下的内力与荷载作用下有何异同？

答：用力法计算超静定结构在温度变化和支座位移影响下的内力与荷载作用下的异同点：

（1）相同点

①基本原理相同，都是根据基本结构在外因和多余未知力共同作用下，在去掉多余联系处的位移应与原结构的位移相符这一原则进行的；

②典型方程中的系数计算相同，因为它们与外因无关。

（2）不同点

①自由项的计算不同，由温度引起的位移（支座位移）计算公式与荷载作用下的位移计算公式不同；

②最后内力图校核时，应把温度变化或支座位移引起的基本结构的位移考虑进去。

12．试证明，在不计轴向变形影响时，超静定拱与相应三铰拱的合理拱轴线是相同的。

答：忽略轴向变形，取三铰拱为基本体系，需要在两端处用两个弯矩替代固定支座，在中间处用一对弯矩把中间的固结替代为铰结，在求解自由项时可以算得 Δ_{1P}、Δ_{2P}、Δ_{3P} 均为零，对应的未知的弯矩也均为零，故无铰拱和三铰拱都处于无弯矩状态，所以两者的合理拱轴线是相同的。

13．在均布荷载作用下，超静定拱的合理拱轴线是不是抛物线？为什么？

答：（1）在均布荷载作用下，超静定拱的合理拱轴线是抛物线。

（2）超静定拱的合理拱轴线是抛物线的原因

在不计轴向变形影响时，超静定拱与相应三铰拱的合理拱轴线是相同的。在均布荷载作用下，三铰拱的合理拱轴线是抛物线，故超静定拱的合理拱轴线也是抛物线。

14．什么叫弹性中心？怎样确定其位置？什么叫弹性中心法？它有什么好处？图 7-2-1 所示结构能否采用弹性中心法？

答：（1）弹性中心的定义

弹性中心是指图形的面积与结构的弹性性质 EI 有关的弹性面积图的形心。

（2）弹性中心位置的确定

根据材料力学用积分公式算出弹性面积图形心的坐标即可得到弹性中心的位置。

（3）弹性中心法的定义

弹性中心法是指由于 y 轴是对称轴，则 x、y 是弹性面积的一对形心主轴，把刚臂端点引到弹性中心上，且将 X_2、X_3 置于主轴方向上，就可以使全部副系数都等于零的方法。

（4）弹性中心法使得副系数全部为零，每个方程都可单独求解出一个未知力，计算更简便。

（5）弹性中心法可以推广到任何形状的三次超静定闭合结构，因此图 7-2-1（a）、（b）两个图均可以应用弹性中心法求解，计算更简便。

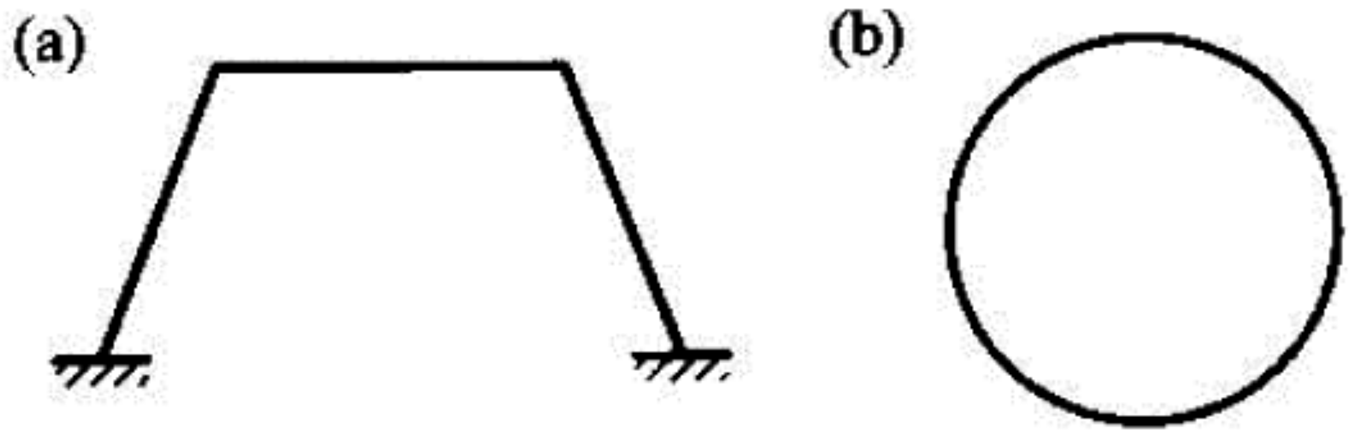


图 7-2-1

15．两铰拱与系杆拱的计算有何异同？

答：两铰拱与系杆拱的计算异同点：

（1）相同点

系杆拱可以避免支座产生水平推力，两者用力法计算时的原理和步骤均一致。

（2）不同点

系杆拱在计算典型方程的系数 δ_{11} 时需要考虑系杆轴向变形的影响，而两铰拱则不必考虑。

习题

7-1　确定图示各结构的超静定次数。

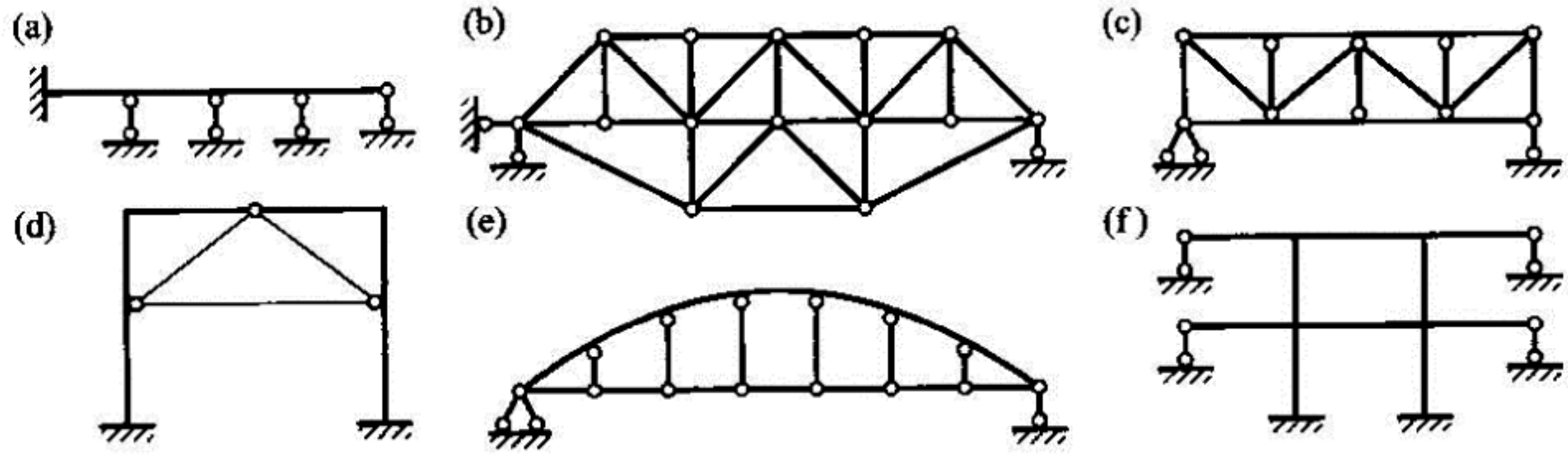


图 7-2-2

答：（a）有 4 次，其中一种基本体系如图 7-2-3 所示。

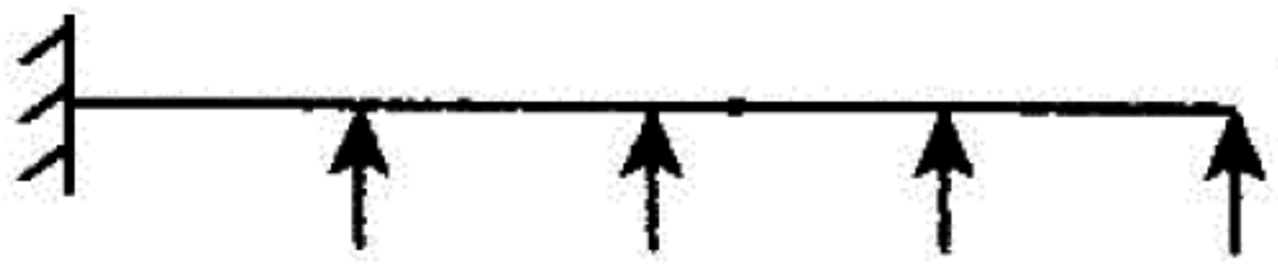


图 7-2-3

（b）有 3 次，其中一种基本体系如图 7-2-4 所示。

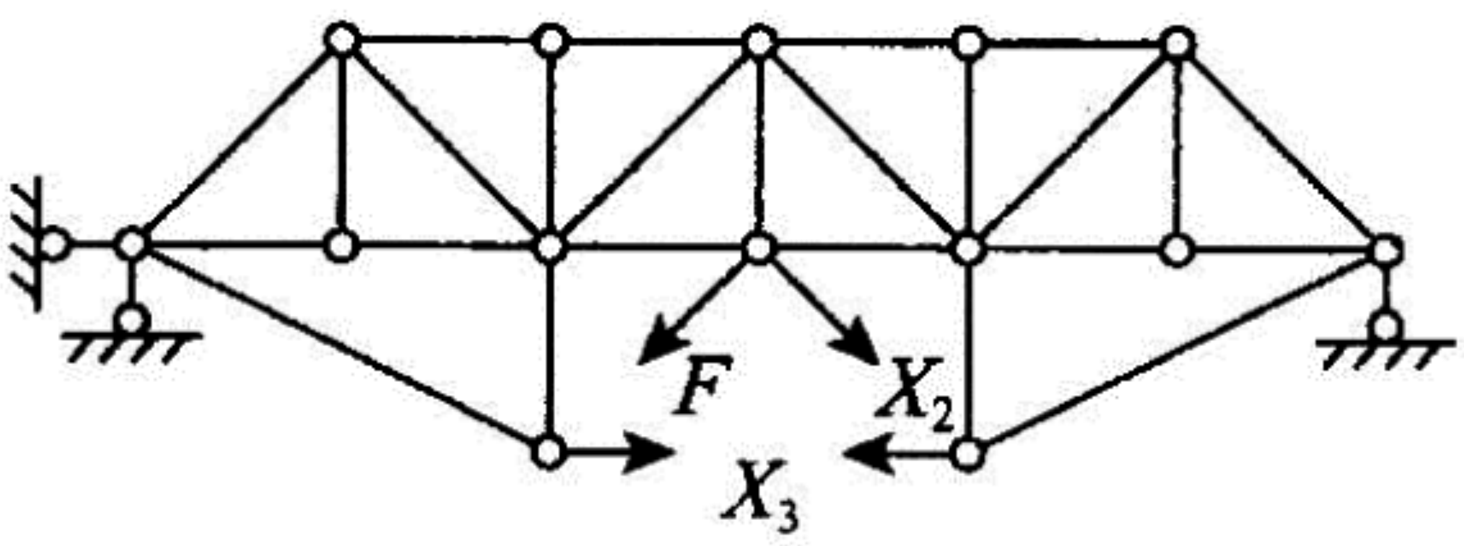


图 7-2-4

（c）有 6 次，如图 7-2-5 所示。

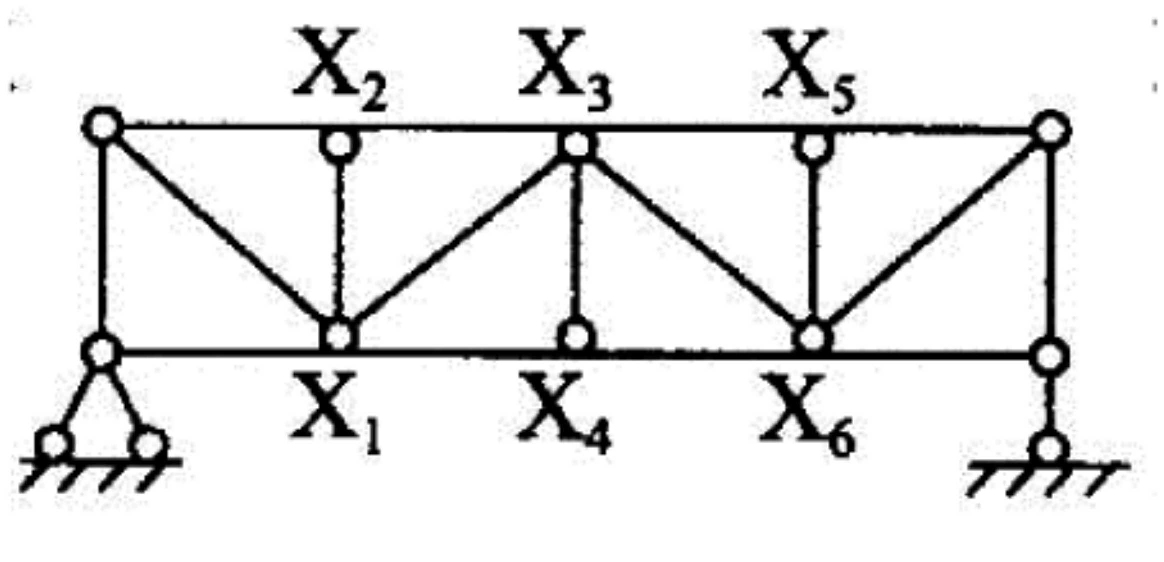


图 7-2-5

（d）有 5 次，如图 7-2-6 所示。

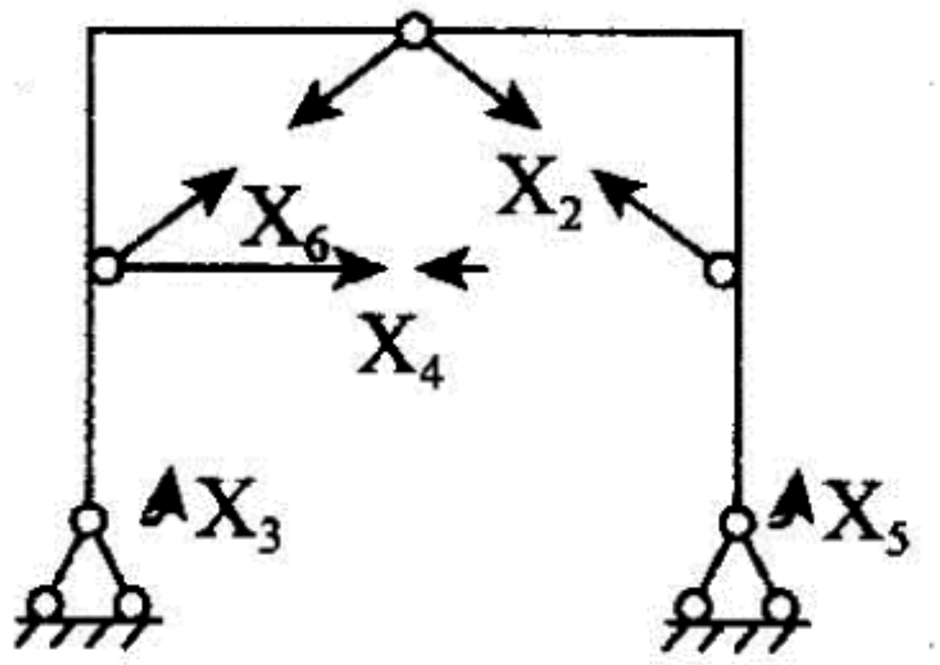


图 7-2-6

（e）有 1 次，如图 7-2-7 所示。

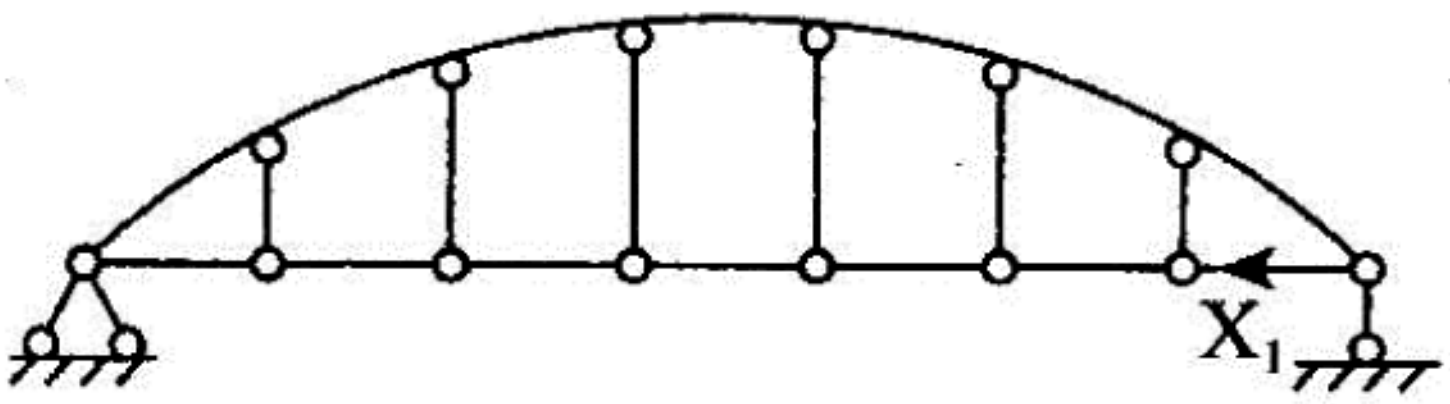


图 7-2-7

（f）有 10 次，如图 7-2-8 所示。

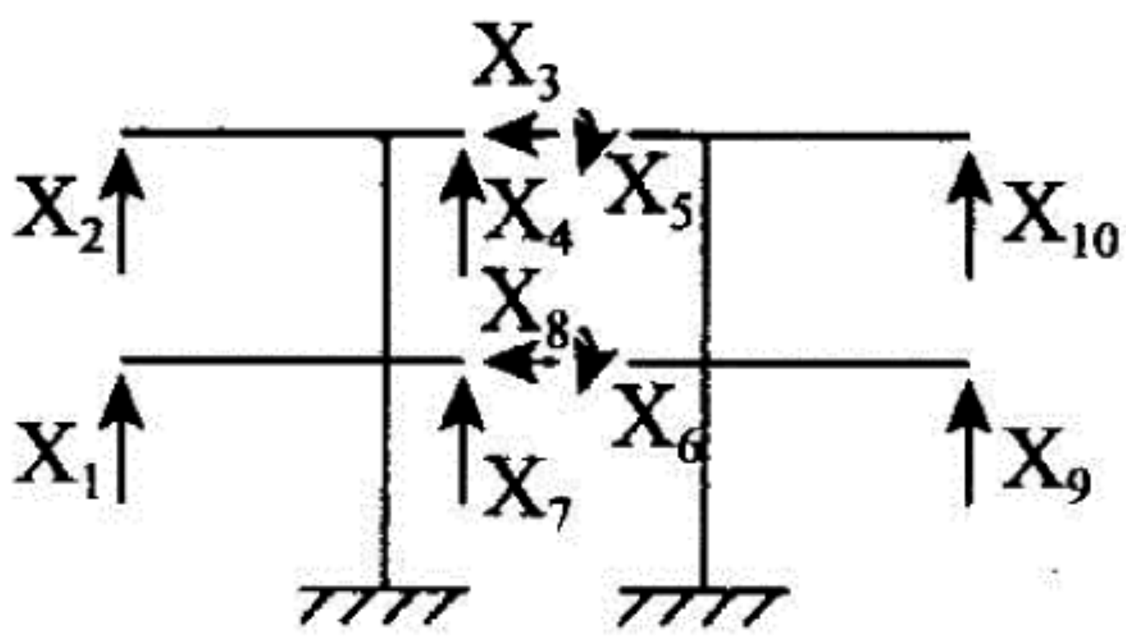


图 7-2-8

7-2～7-4　试作图示超静定梁的 M，F_s 图。

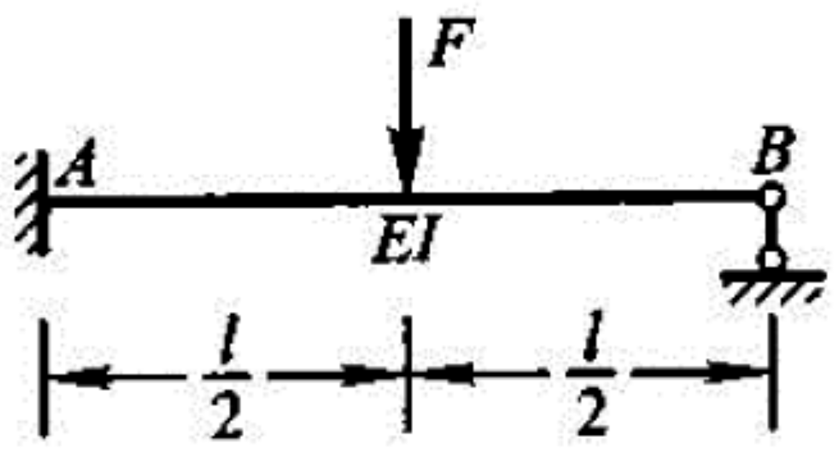


图 7-2-9（题 7-2）

7-2　解：取悬臂梁为基本结构，其基本体系如图 7-2-10（a）所示，多余未知力为 X_1。

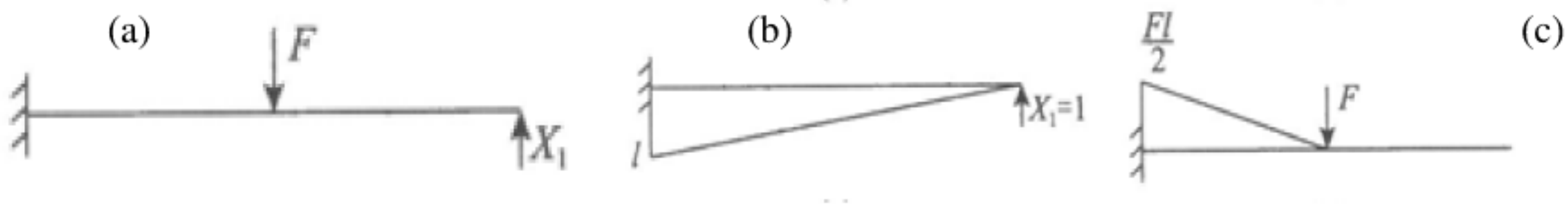


图 7-2-10

列力法典型方程计算未知力 X_1，如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2l}{3}=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times\frac{Fl}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{5}{6}l)=\frac{5Fl^3}{48EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{5}{16}F$$

由 $\bar{M}_1x_1+M_P=M$ ，可画出弯矩图 M，再进一步得到剪力图 F_s，如图 7-2-11 所示。

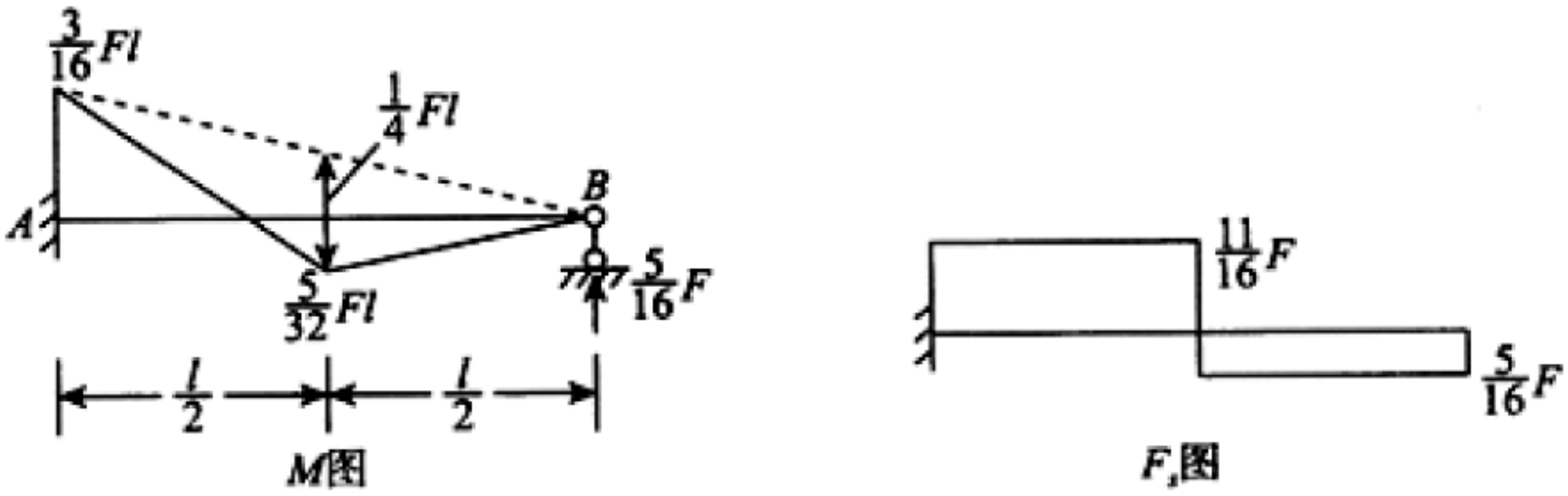


图 7-2-11

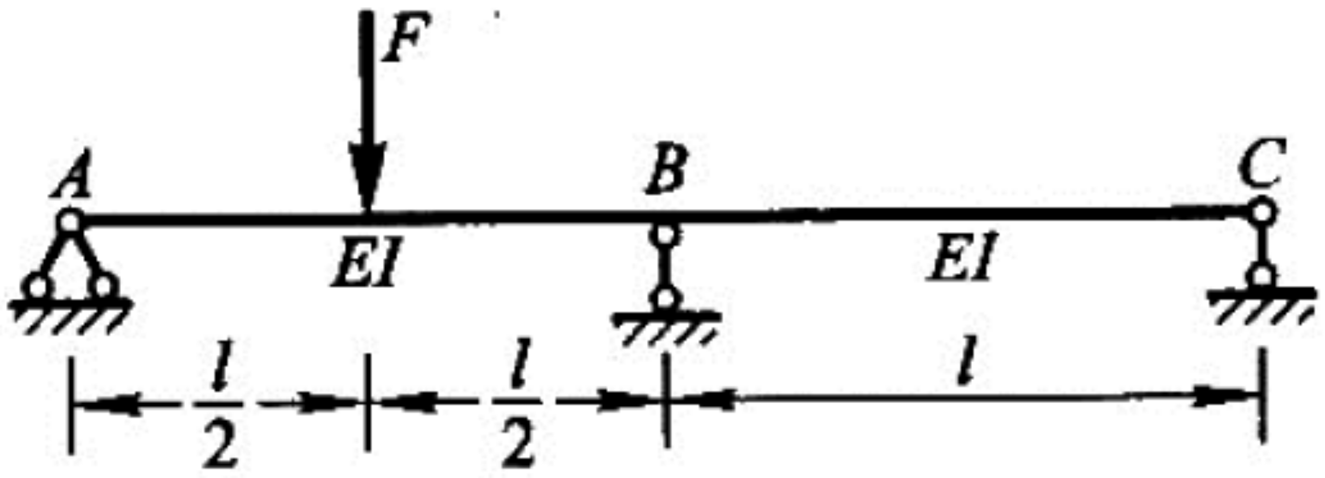


图 7-2-12（题 7-3）

7-3　解：画出原体系和基本体系，多余未知力为 X_1，作出单位力作用下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-13 所示。

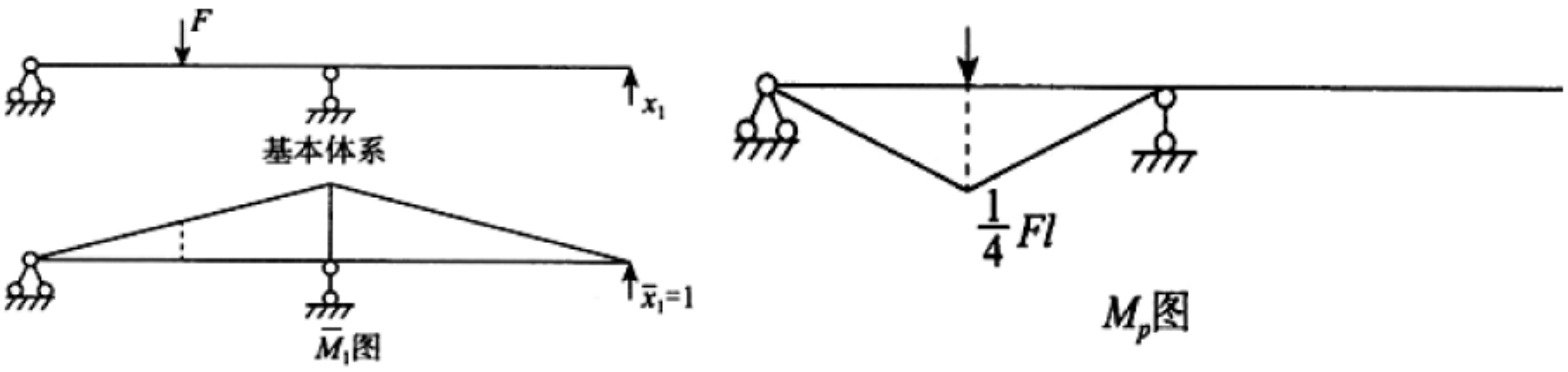


图 7-2-13

列力法典型方程计算未知力 X_1，如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2l}{3})\times 2=\frac{2l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}[\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{Fl}{4}\times\frac{1}{2}(0+l)]=\frac{Fl^3}{16EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{3}{32}F$$

根据$M=\overline{M}_1x_1+M_P$，可画出 M 图，如图 7-2-14 所示。

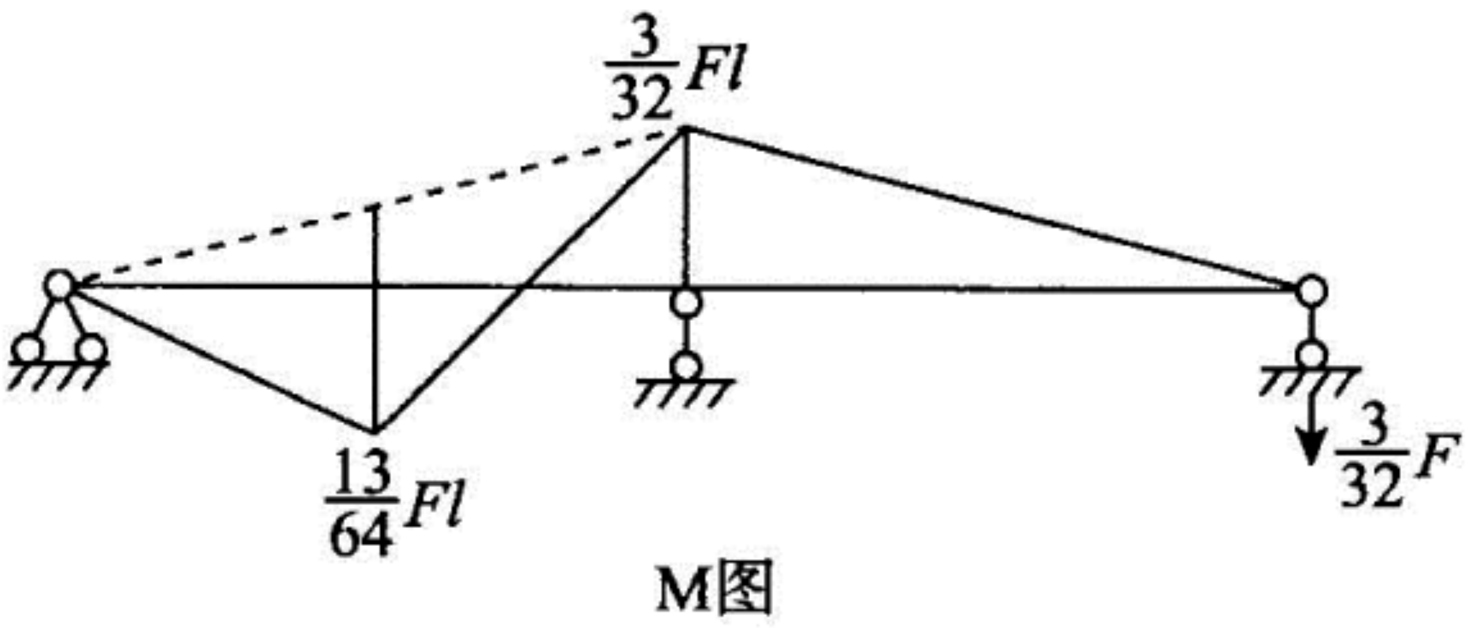


图 7-2-14

此时与静定结构相同，根据平衡条件可求得

$$F_{Ay}=\frac{13}{32}F\uparrow$$

$$F_{By}=\frac{11}{16}F(\uparrow)$$

画出 F_s 图，如图 7-2-15 所示。

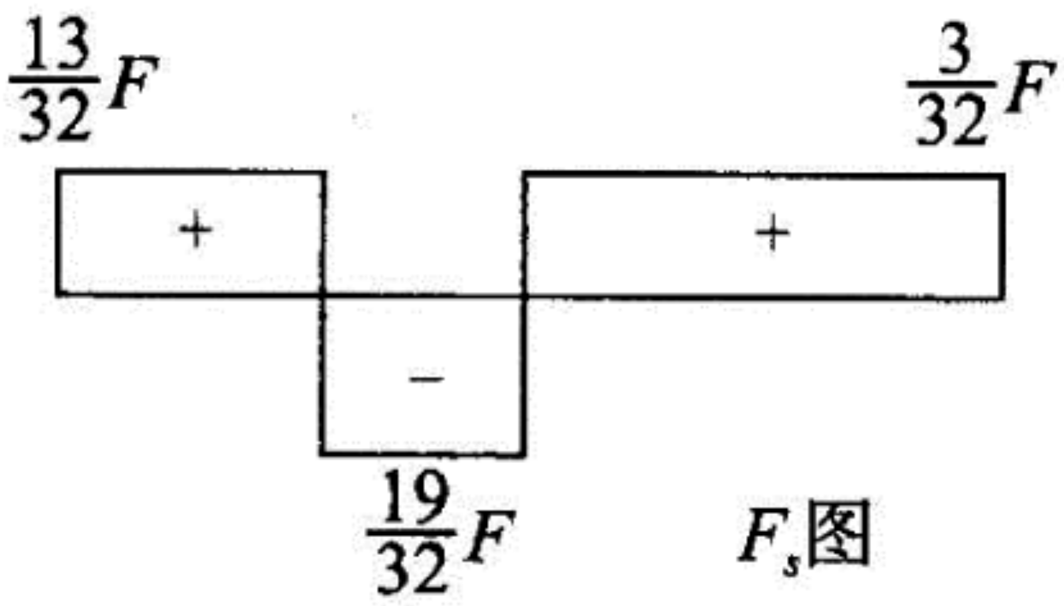


图 7-2-15

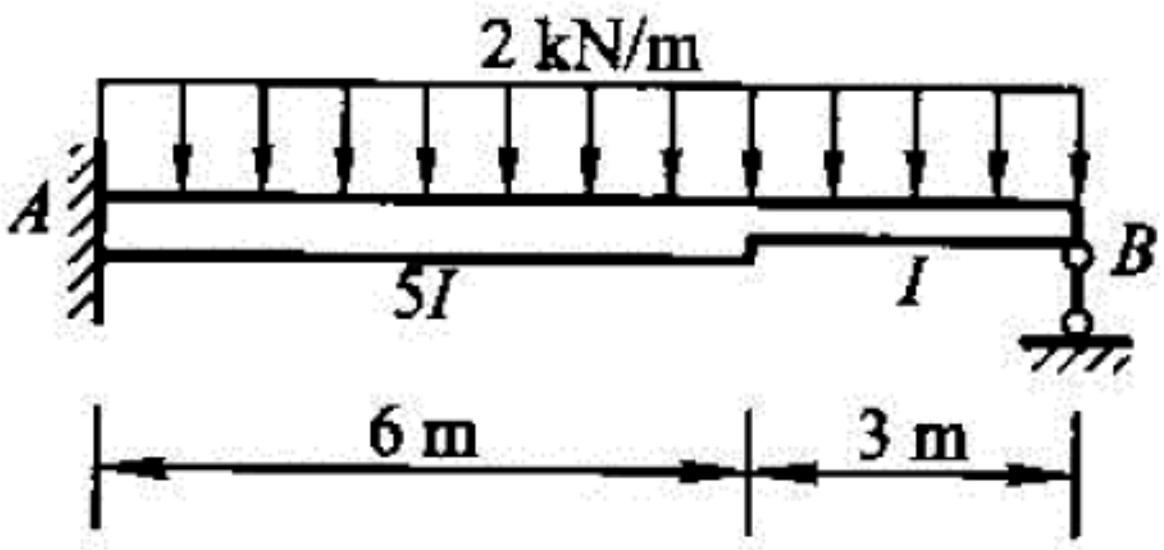


图 7-2-16（题 7-4）

7-4　解：作出基本体系，多余未知力 X_1，作出单位力作用下的弯矩图 M_1 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-17 所示。计算如下

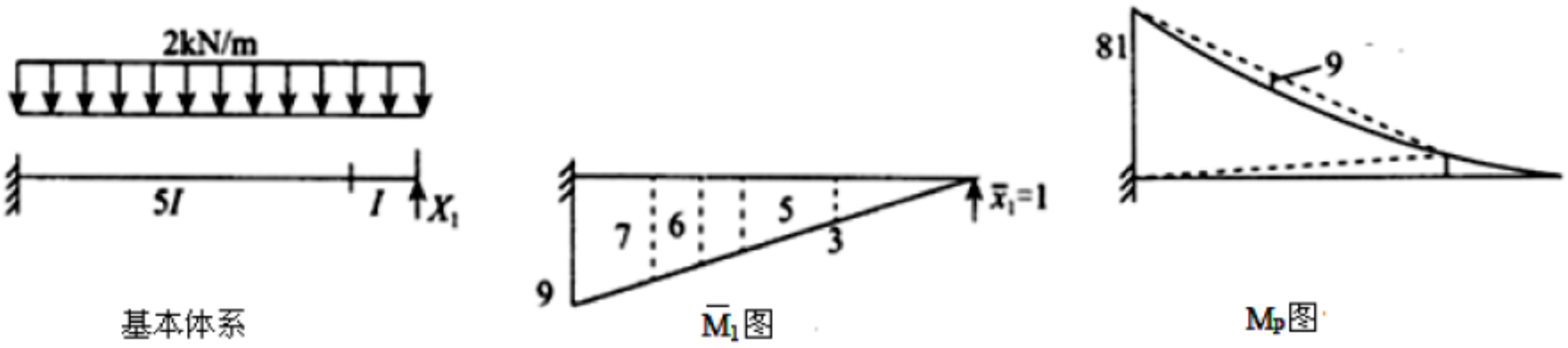


图 7-2-17

$$EI\delta_{11}=\frac{3^3}{3}+\frac{1}{5}(\frac{3\times6}{2}\times5+\frac{9\times6}{2}\times7)=55.8$$

$$EI\Delta_{1P}=-\frac{3\times9}{3}\times\frac{3\times3}{4}+\frac{1}{5}(-\frac{9\times6}{2}\times5-\frac{81\times6}{2}\times7+\frac{2\times6\times9}{3}\times6)=-344.25$$

$$x_1=\frac{344.25}{55.8}=6.169kN$$

根据$M=\overline{M}_1x_1+M_P$，可以作出 M 图，此时体系与静定结构相同可作出 F_s 图，如图 7-2-18 所示。

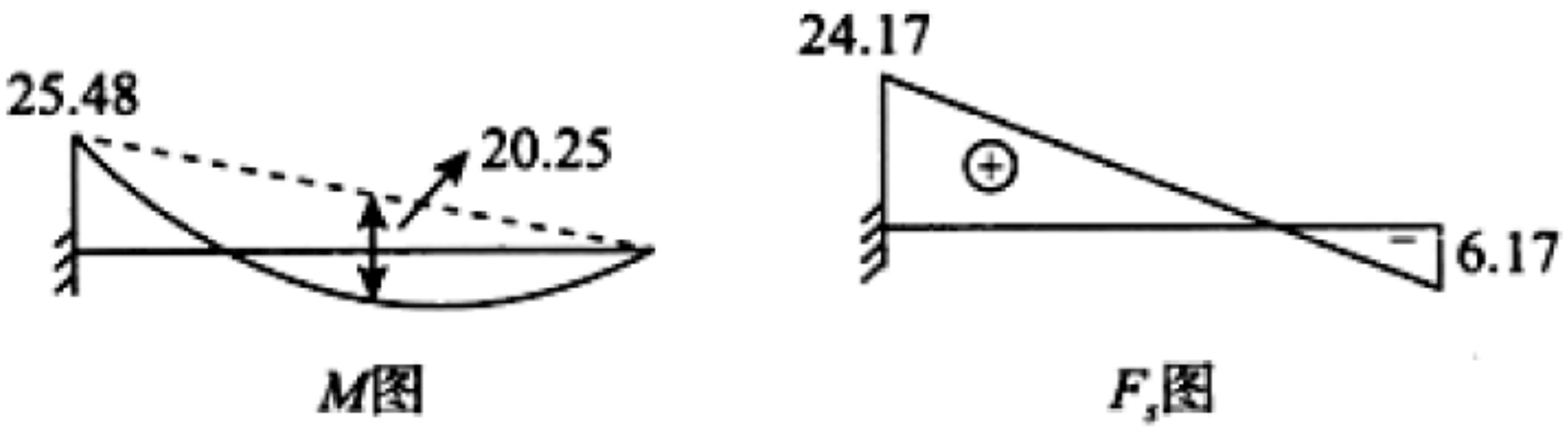


图 7-2-18

7-5　试用力法分析图示刚架，绘制 M、F_s、F_N 图。

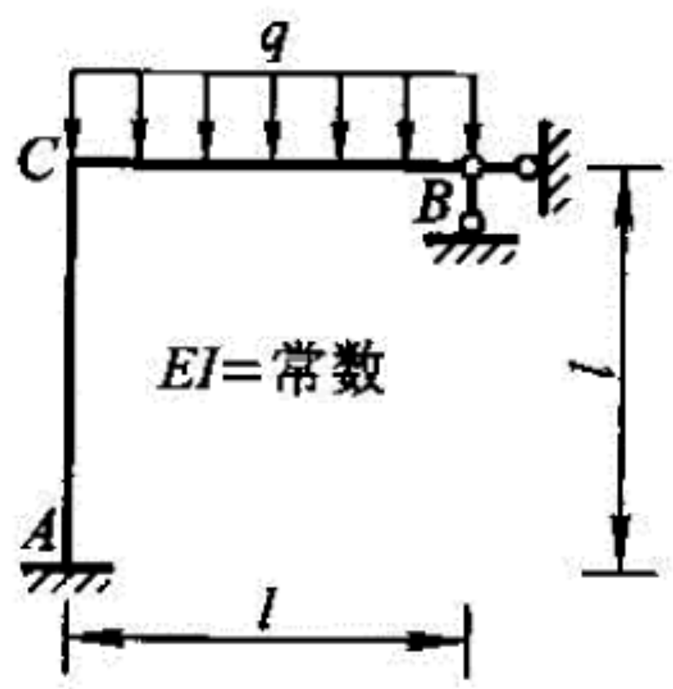


图 7-2-19（题 7-5）

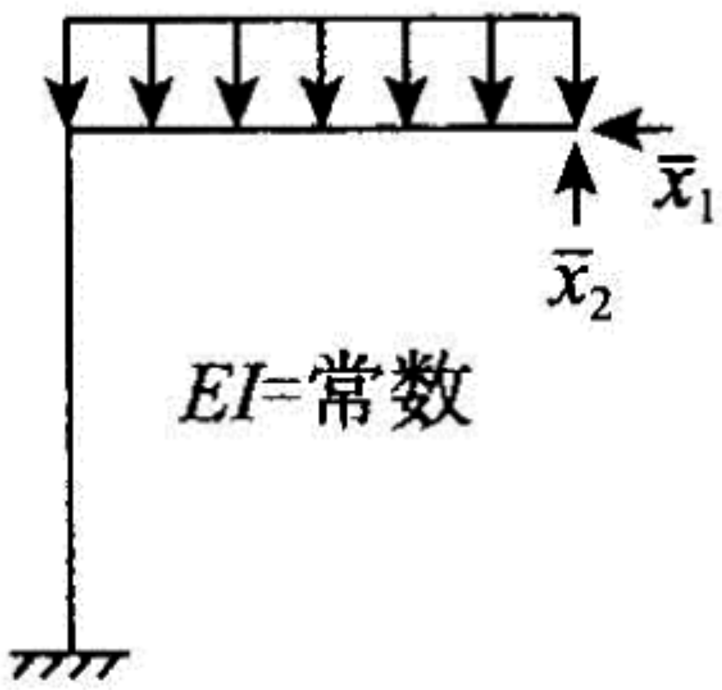


图 7-2-20（基本体系）

解：此题所示结构为二次超静定结构，作出基本体系如图 7-2-20 所示。多余未知力为 X_1、X_2，作出单位力作用下的弯矩图 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-21 所示。

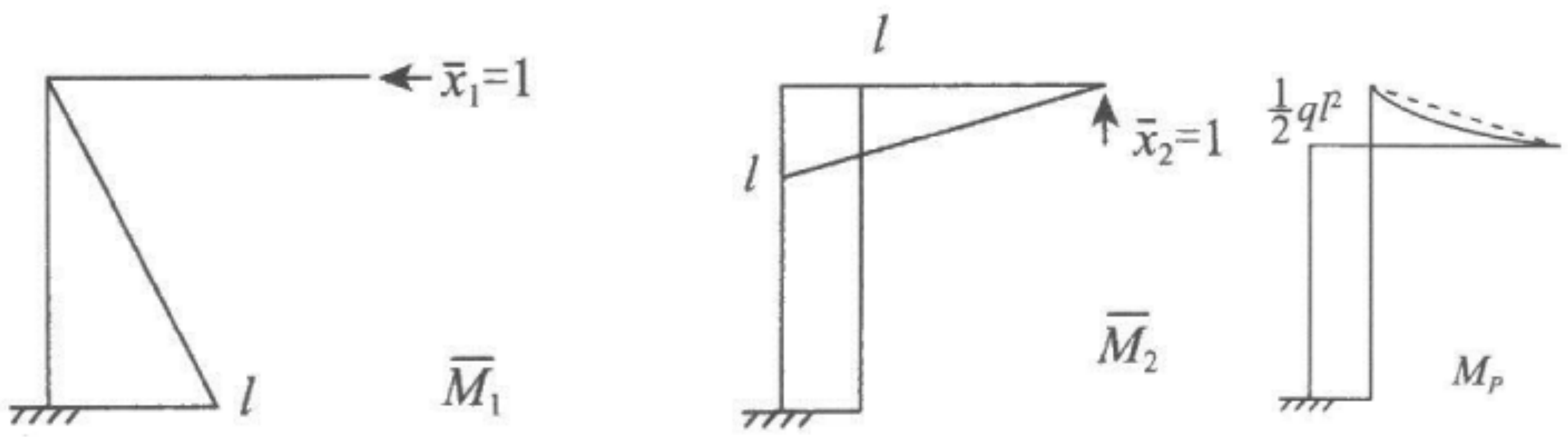


图 7-2-21

求解出力法典型方程中的系数和自由项，具体计算如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}l)=\frac{l^3}{3EI},\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{1}{2}ql^2)=-\frac{ql^4}{4EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}l+l\times l\times l)=\frac{4l^3}{3EI},\delta_{12}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times l\times l\times l)=\frac{l^3}{2EI}$$

$$\Delta_{2P}=-\frac{1}{EI}(\frac{l}{3}\times\frac{1}{2}ql^2\times\frac{3l}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}ql^2\times l\times l)=-\frac{5ql^4}{8EI}$$

可以列出典型方程并计算出未知力 X_1、X_2

$$\begin{cases}\frac{l^3}{3EI}X_1+\frac{l^3}{3EI}X_2-\frac{ql^4}{4EI}=0\\ \frac{l^3}{2EI}X_1+\frac{4l^3}{3EI}X_2-\frac{5ql^4}{8EI}=0\end{cases},\begin{cases}X_1=\frac{3}{28}ql\\ X_2=\frac{3}{7}ql\end{cases}$$

由 $M=\bar{M}_1x_1+\bar{M}_2x_2+M_P$，可作出 M 图。此时体系与静定体系相同，可以进一步作出 F_s、F_N 图，如图 7-2-22 所示。

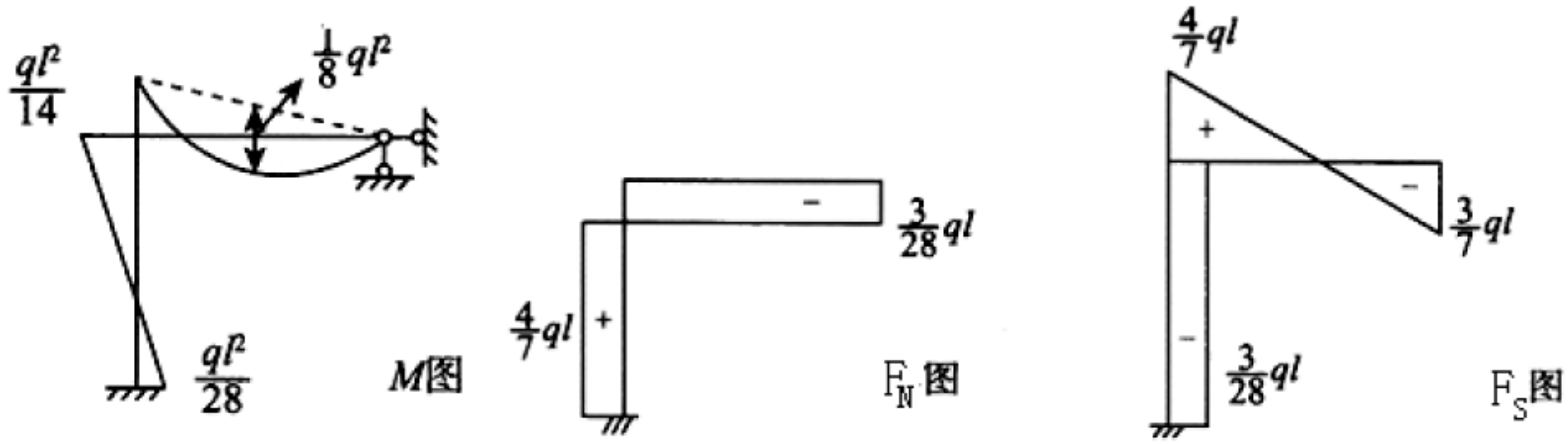


图 7-2-22

7-6　图示刚架 E＝常数，$n=\frac{5}{2}$，试作其 M 图，并讨论当 n 增大和减小时 M 图如何变化。

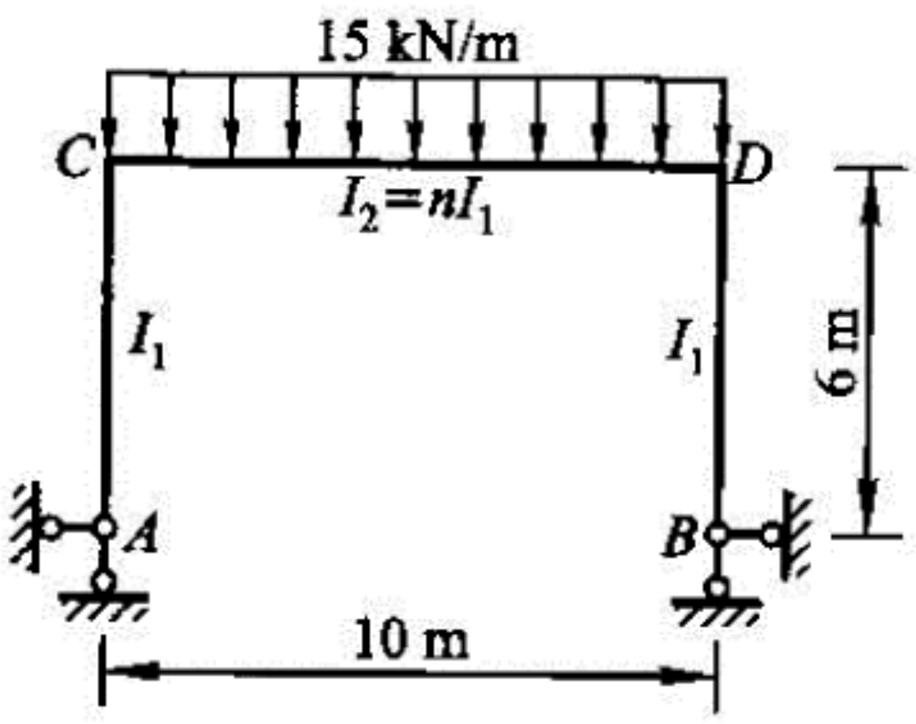


图 7-2-23（题 7-6）

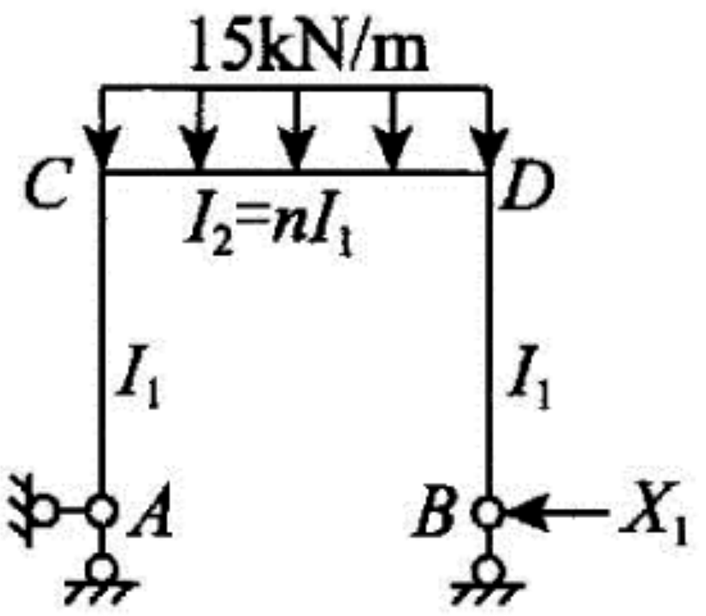


图 7-2-24（基本体系）

解：作出基本体系如图 7-2-24 所示。多余未知力为 X_1，作出单位力作用下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-25 所示。

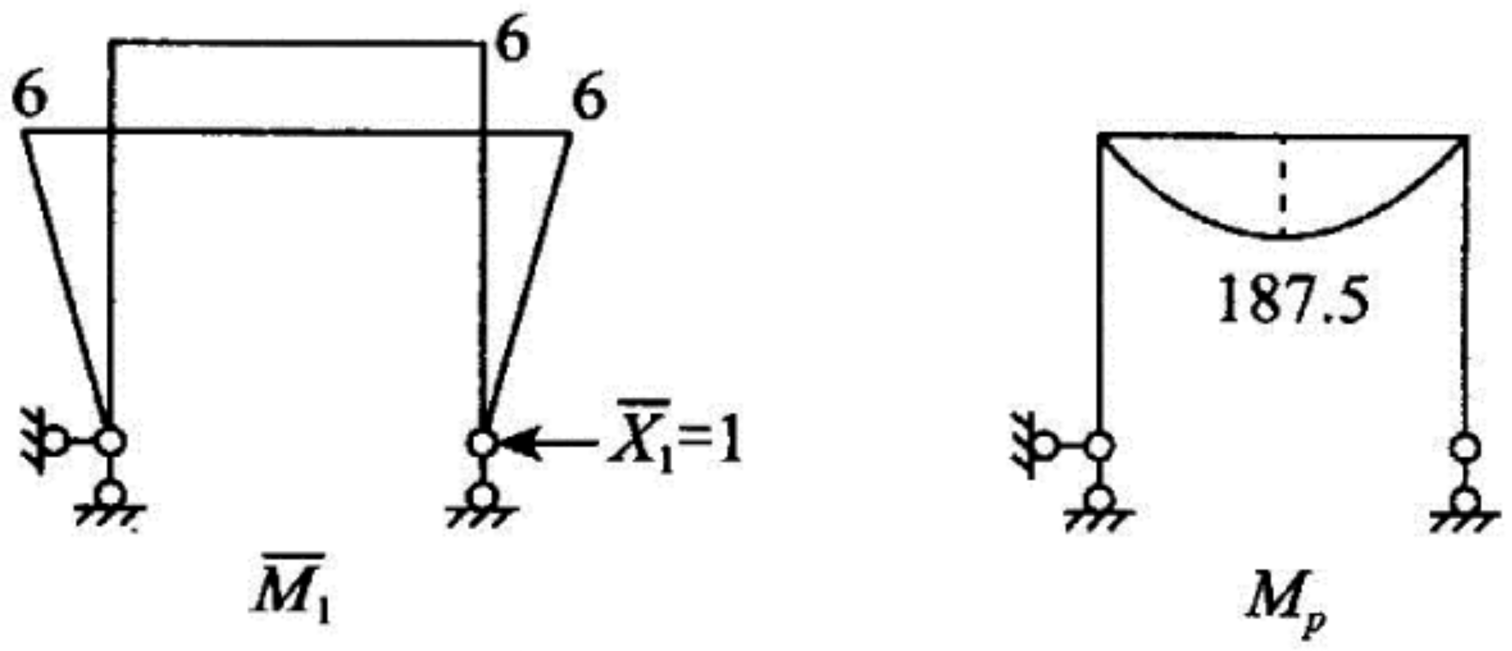


图 7-2-25

求解出力法典型方程中的系数和自由项，具体计算如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_1}(\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{2}{3}\times 6)+\frac{1}{EI_2}(6\times 6\times 10)=\frac{144}{EI_1}+\frac{360}{EI_2}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI_2}(\frac{2}{3}\times 10\times 187.5\times 6)=-\frac{7500}{EI_2}$$

代入力法典型方程，计算出未知力 X_1，并绘制出弯矩图 M，如图 7-2-26 所示。

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{\frac{7500}{EI_2}}{\frac{144}{EI_1}+\frac{360}{EI_2}},$$

当 $n=\frac{5}{2}$ 时，$x_1=10.42kN$；

当 $n\to 0$ 时，$M_B=12kN\cdot m$；
当 $n\to\infty$ 时，$M_D=0kN\cdot m$。

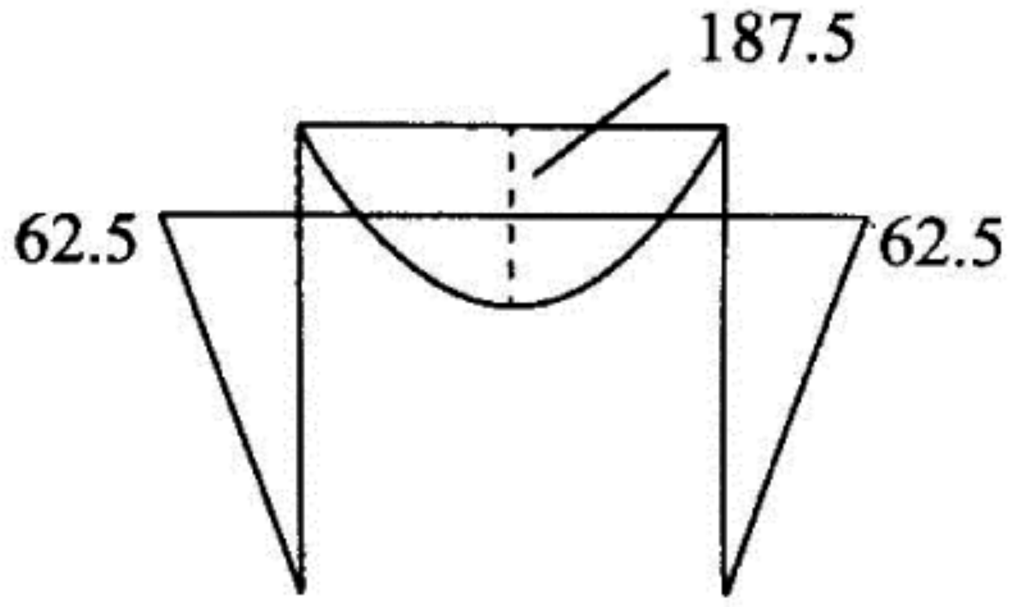


图 7-2-26（弯矩图）

7-7～7-8　作刚架的 M 图。

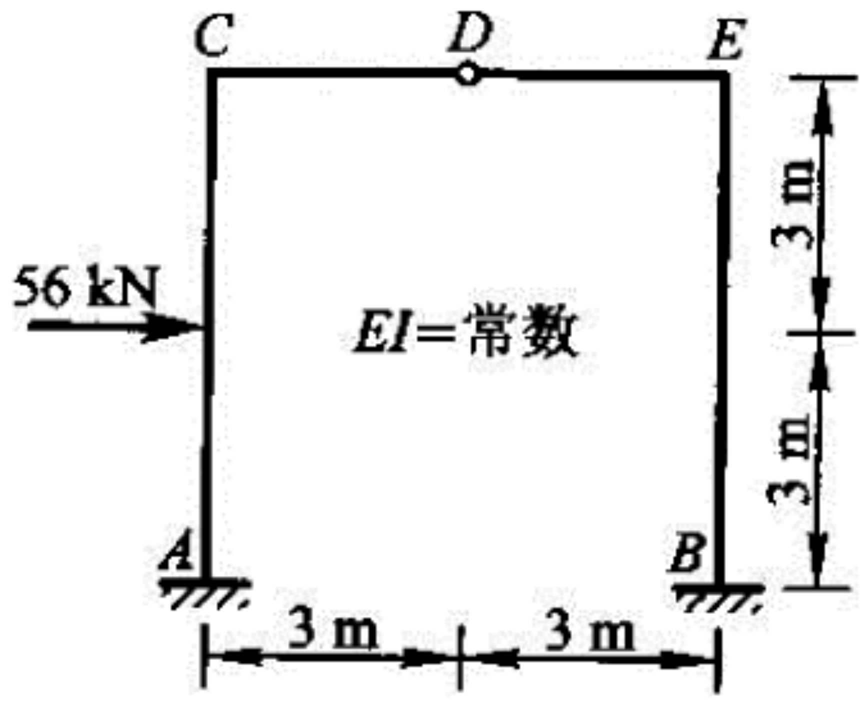


图 7-2-27（题 7-7）

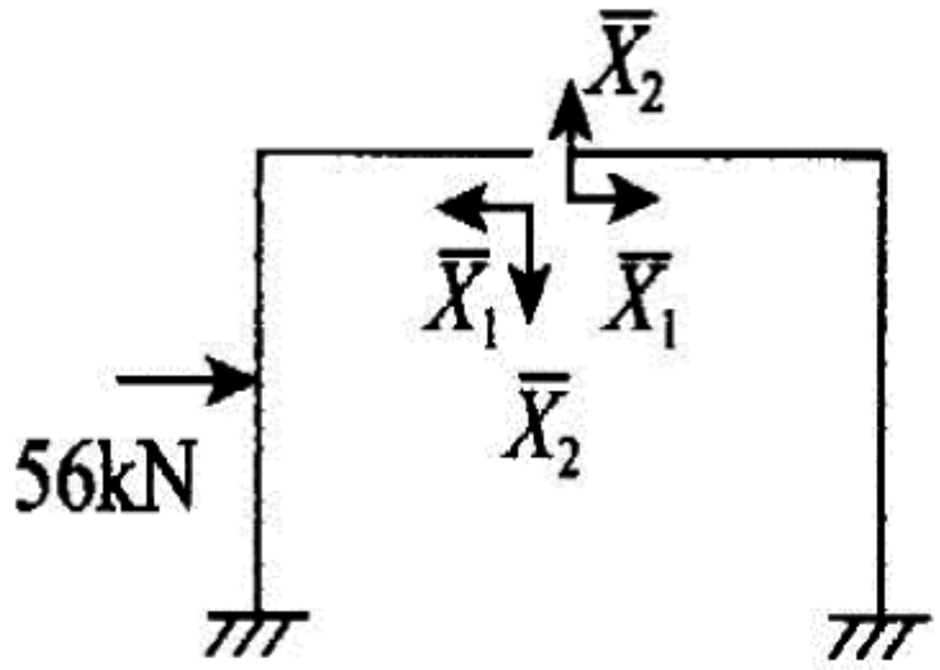


图 7-2-28（基本体系）

7-7　解：此题所示结构为二次超静定结构，作出基本体系如图 7-2-28 所示。多余未知力为 X_1、X_2，作出单位力作用下的弯矩图 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 和外荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-29 所示。

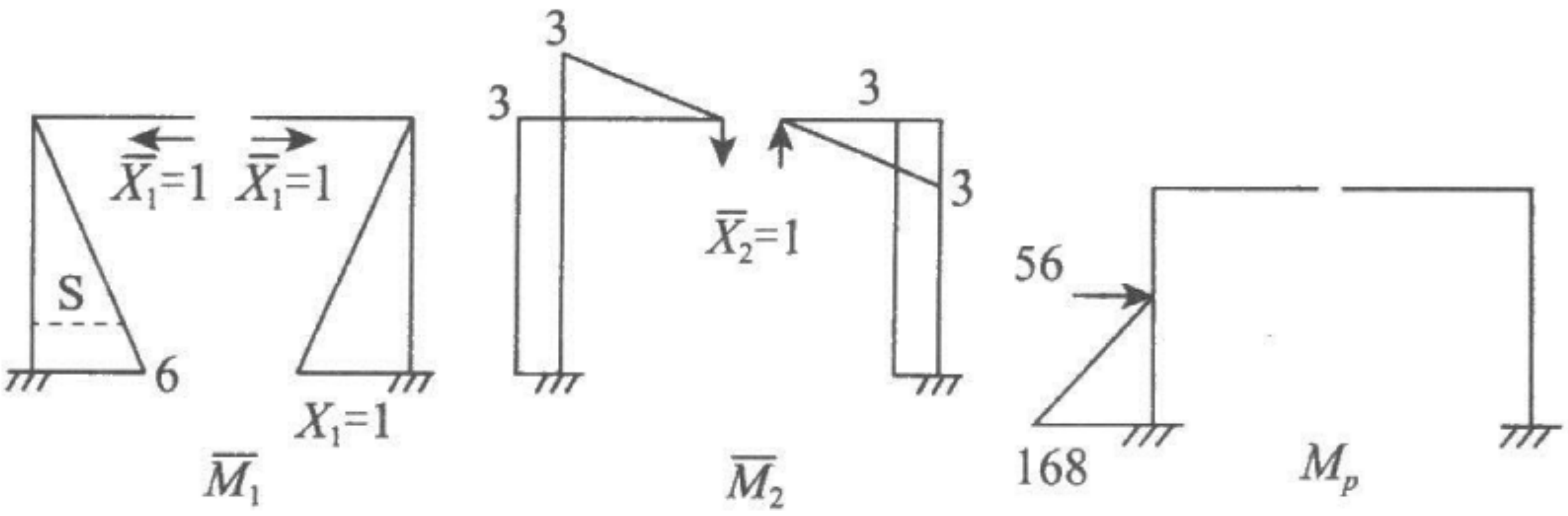


图 7-2-29

求解出力法典型方程中的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{2}{3}\times6)\times2=\frac{144}{EI}\quad \delta_{22}=\frac{1}{EI}(3\times6\times3\times2+2\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}\times3=\frac{126}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1260}{EI},\quad \Delta_{2P}=\frac{756}{EI},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=0$$

代入力法典型方程求解未知力 X_1、X_2 得

$$\begin{cases}\frac{144}{EI}X_1-1260=0\\126X_2+756=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=8.75\ \text{kN}\\X_2=-6\ \text{kN}\end{cases}$$

根据 $M=\bar{M}_1x_1+\bar{M}_2x_2+M_P$，弯矩图如图 7-2-30 所示。

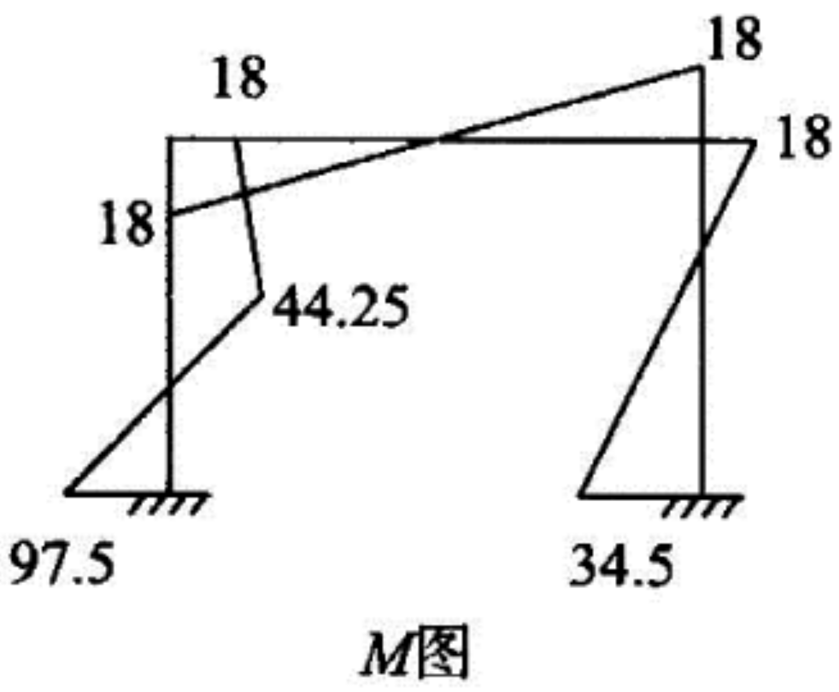


图 7-2-30

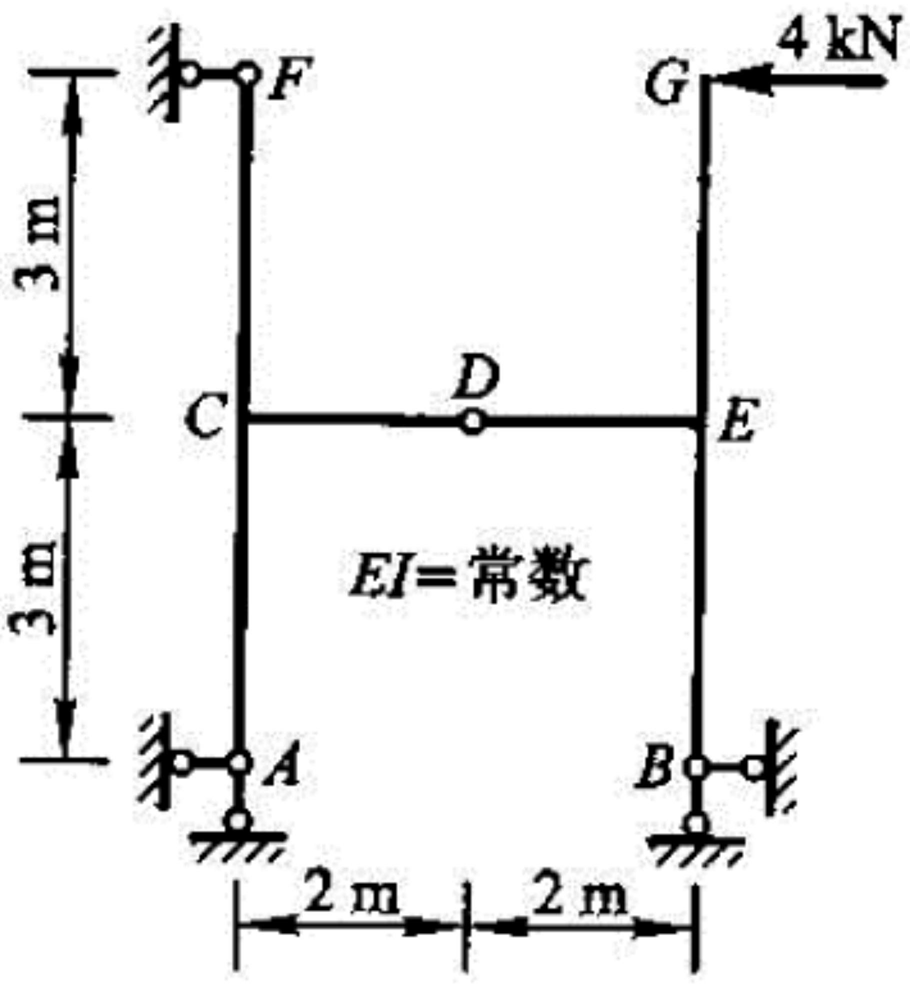


图 7-2-31（题 7-8）

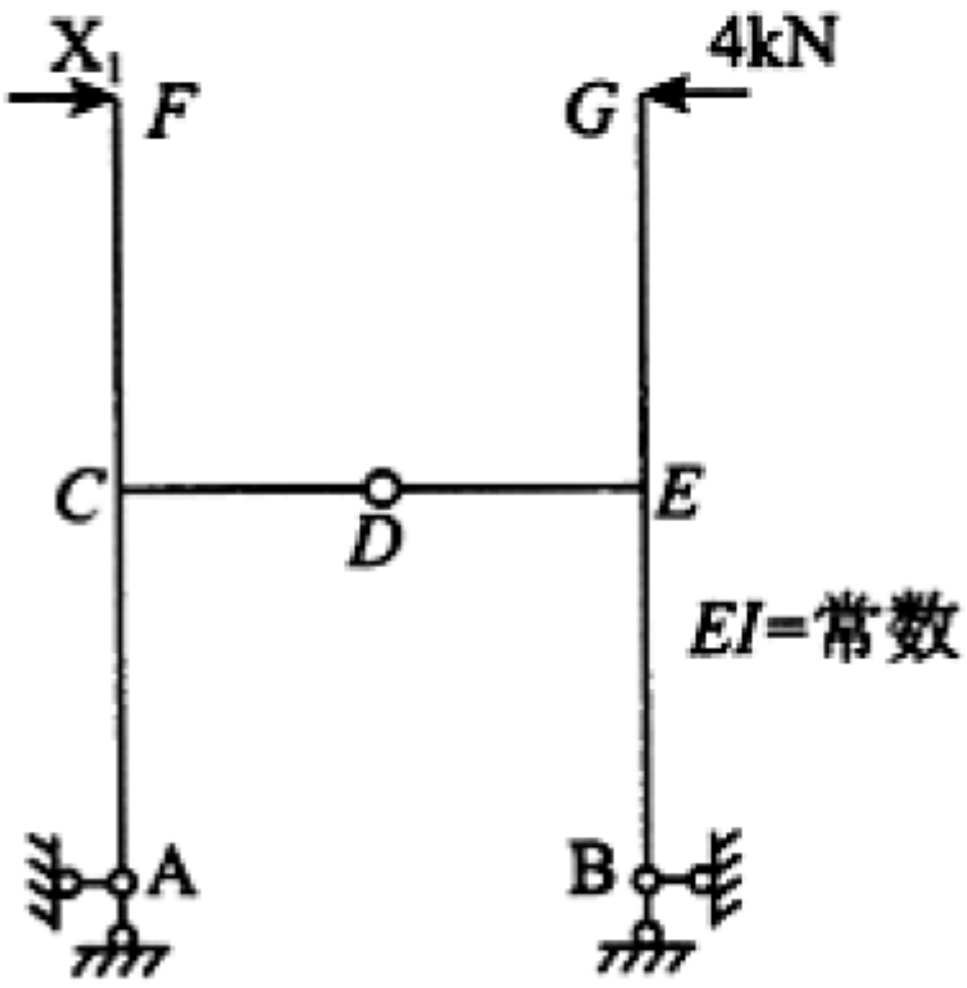


图 7-2-32（基本体系）

7-8 解：作出基本体系如图 7-2-32 所示，多余未知力为 X_1，作出单位力作用下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-33 所示。

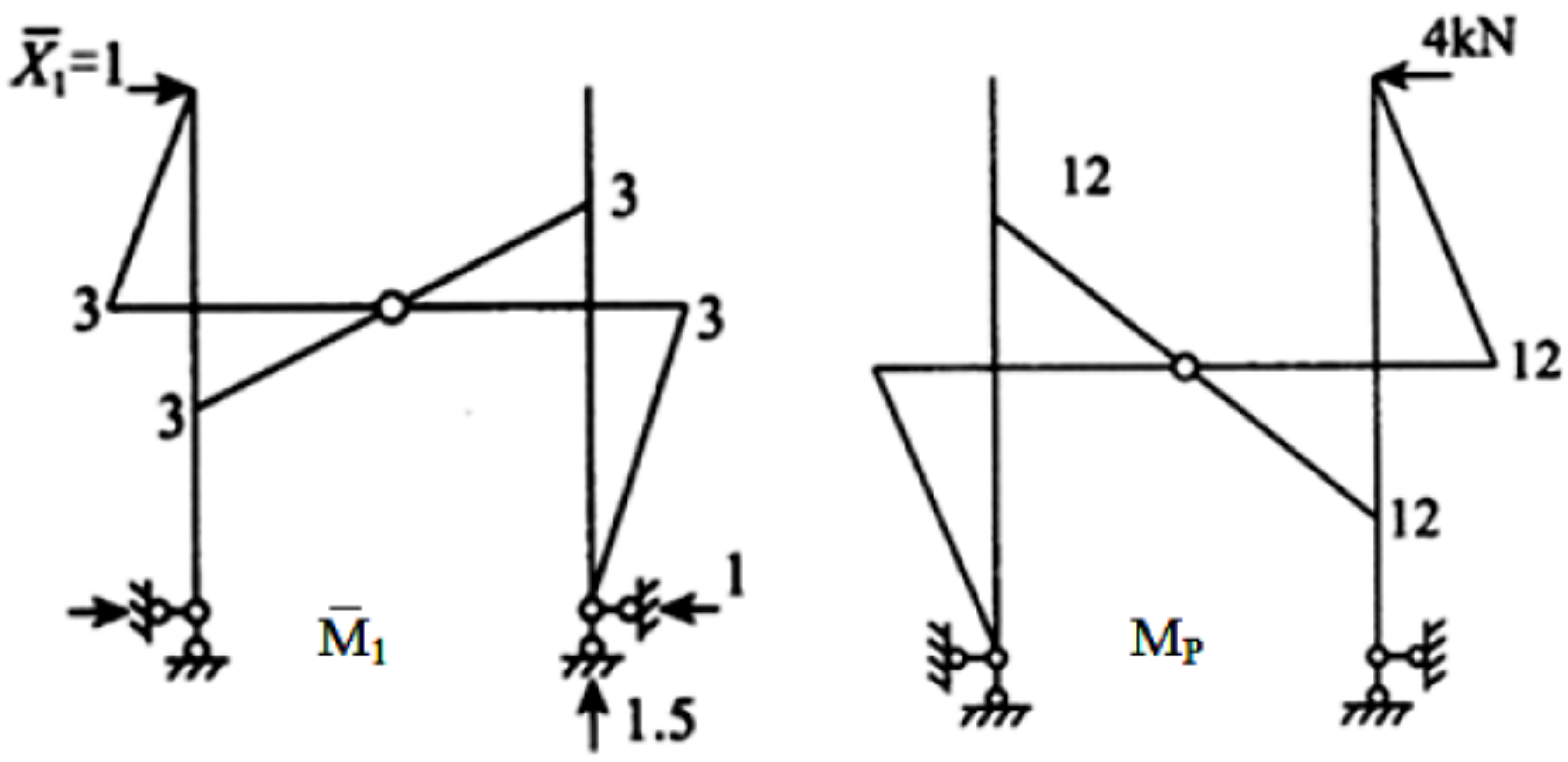


图 7-2-33

计算力法典型方程的系数和自由项

$$\Delta_{1P}=\frac{-48}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}\times3\times2+\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{2}{3}\times3\times2)=\frac{30}{EI}$$

代入方程解得未知力 X_1

$$x_1=-\frac{-\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=1.6kN(\rightarrow)$$

由 $M=\overline{M}_1x_1+M_P$，可以作出 M 图，如图 7-2-34 所示。

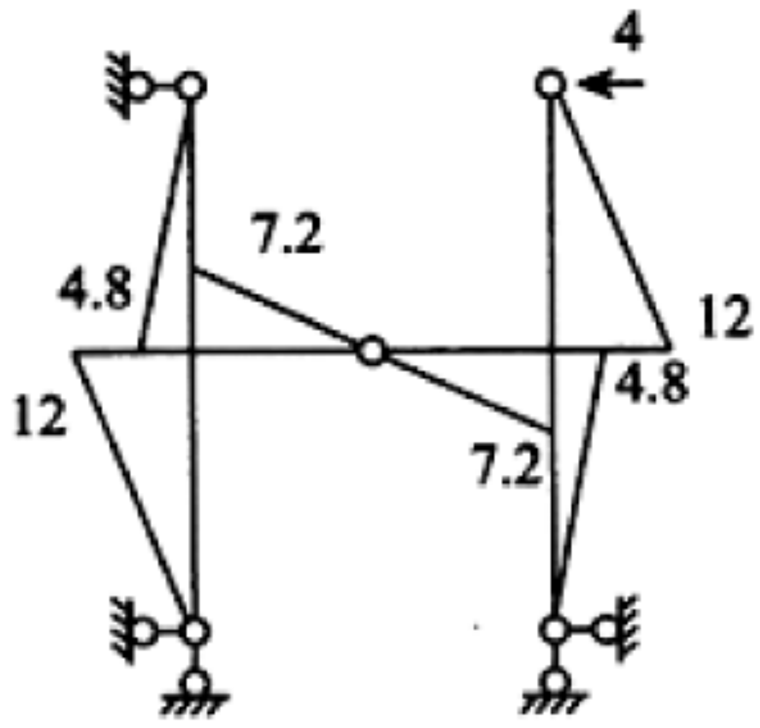


图 7-2-34

7-9　试求图示超静定桁架各杆的内力（各杆 EA 相同）。

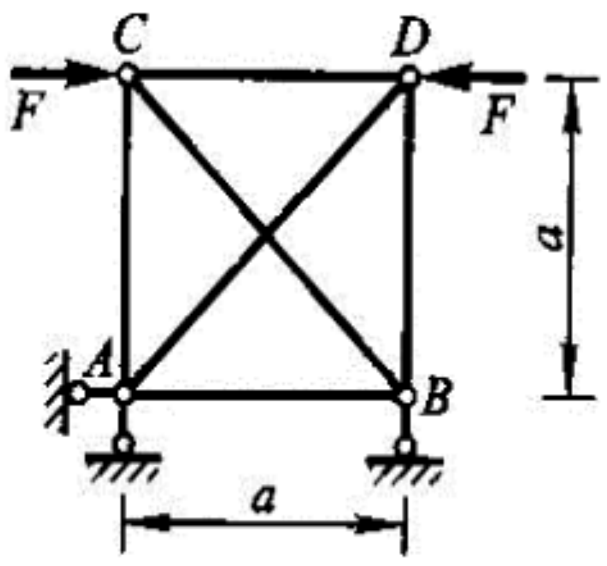


图 7-2-35（题 7-9）

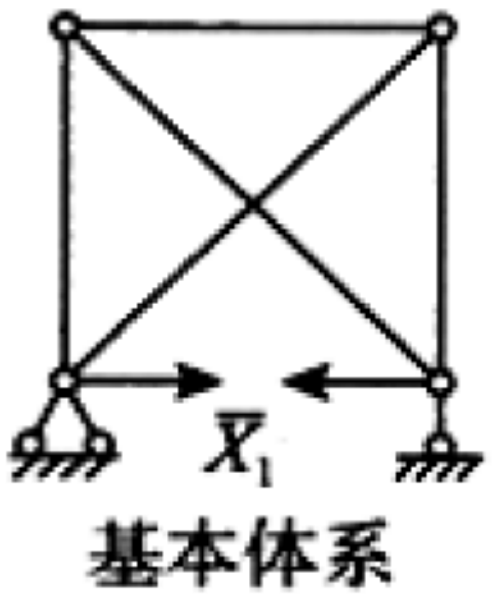


图 7-2-36

解：这是一次超静定桁架结构，作出基本体系如图 7-2-36 所示，未知力为 X_1。计算出单位力作用下各杆的轴力 $\overline{N}_1$ 和原荷载作用下的轴力 N_P，标于图 7-2-37（a）中。

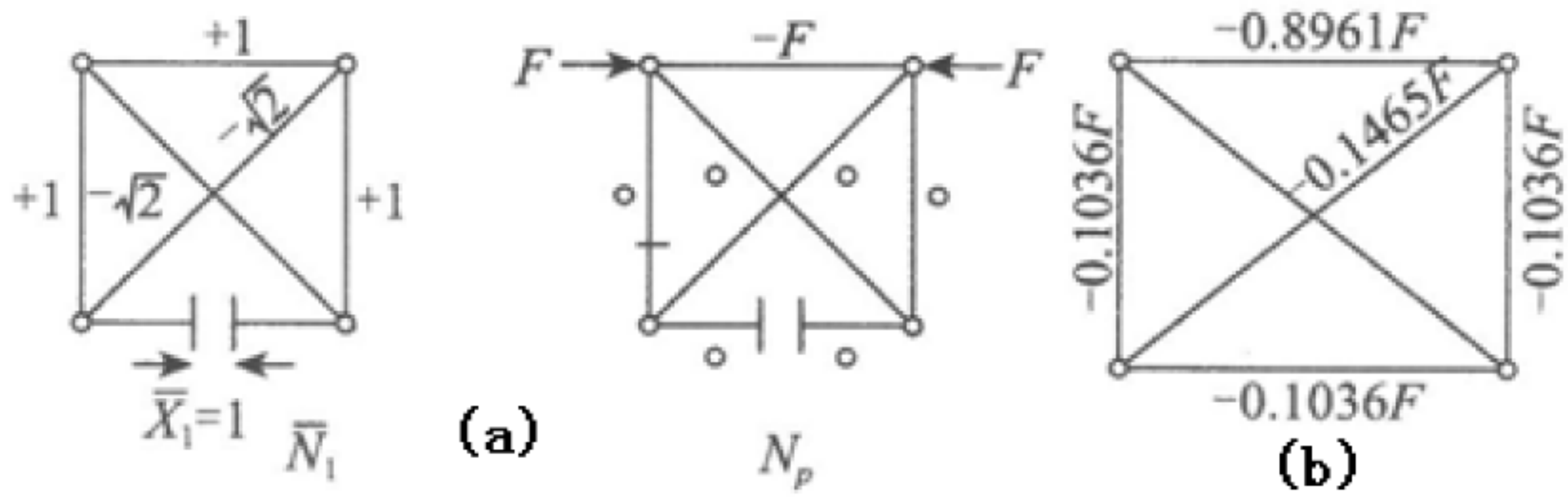


图 7-2-37

计算力法典型方程的系数和自由项

$$EA\delta_{11}=1\times4+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2=4+4\sqrt{2}$$

$$EA\Delta_{1P}=-F$$

代入方程解得未知力 X_1

$$x_1=\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{F}{4+4\sqrt{2}}=0.1036F$$

由 $F_N=\bar{F}_{N1}x_1+F_{N_p}$，作出轴力图，如图 7-2-37（b）所示。

7-10　试求图示超静定桁架各杆的内力（各杆 EA 相同）

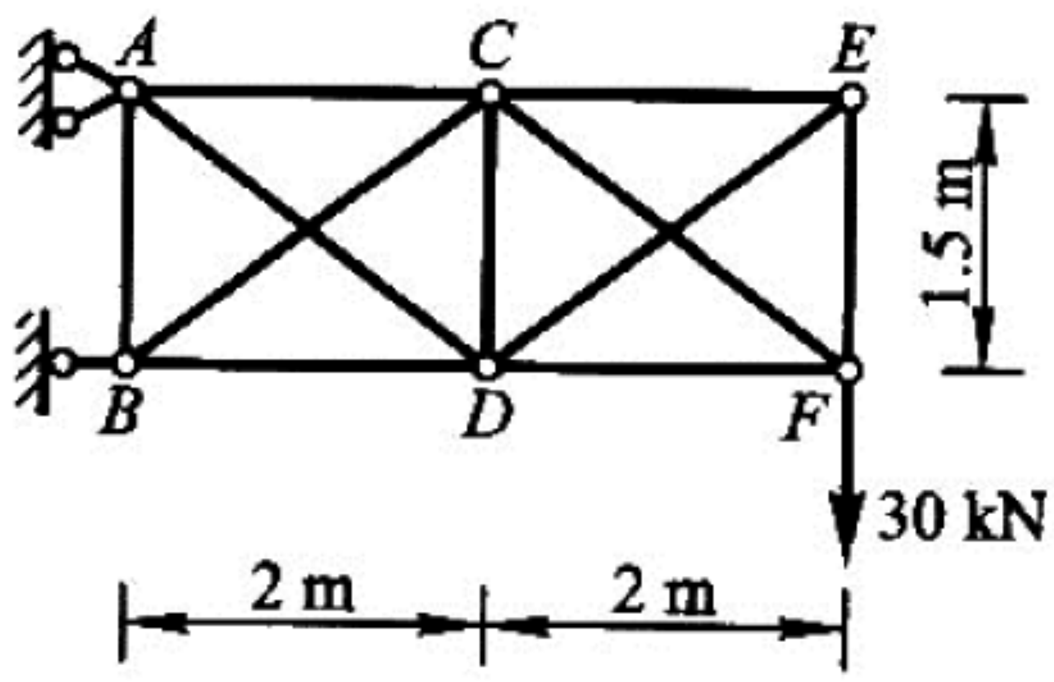


图 7-2-38（题 7-10）

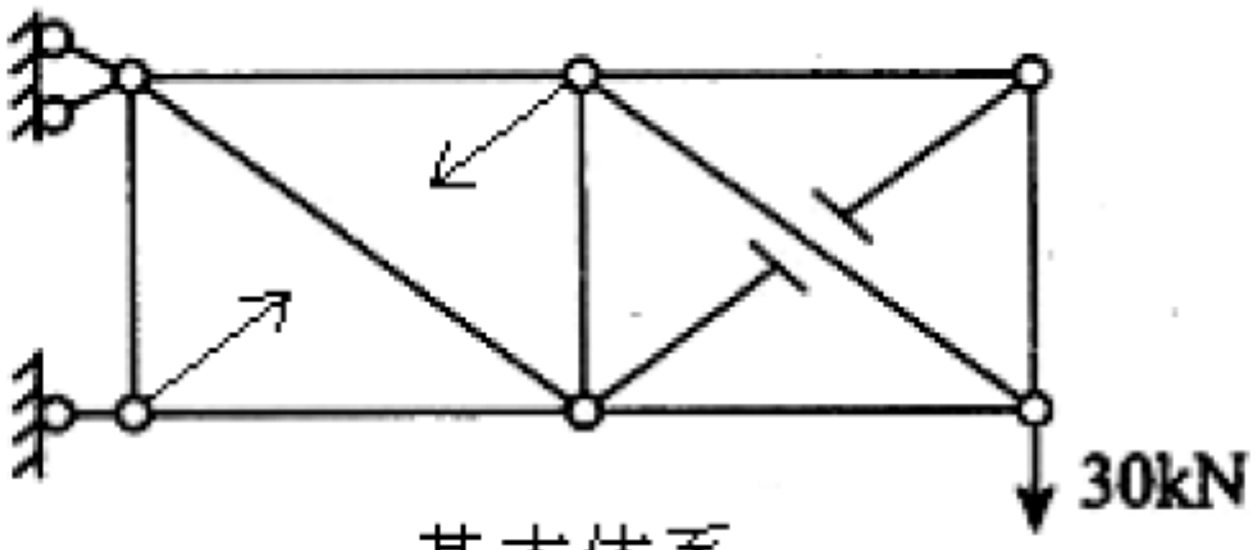


图 7-2-39

解：这是二次超静定桁架结构，作出基本体系如图 7-2-39 所示。多余未知力为 X_1，X_2，计算出单位力作用下的轴力 $\bar{N}_1$、$\bar{N}_2$ 和原荷载作用下的轴力 N_P，如图 7-2-40 所示。

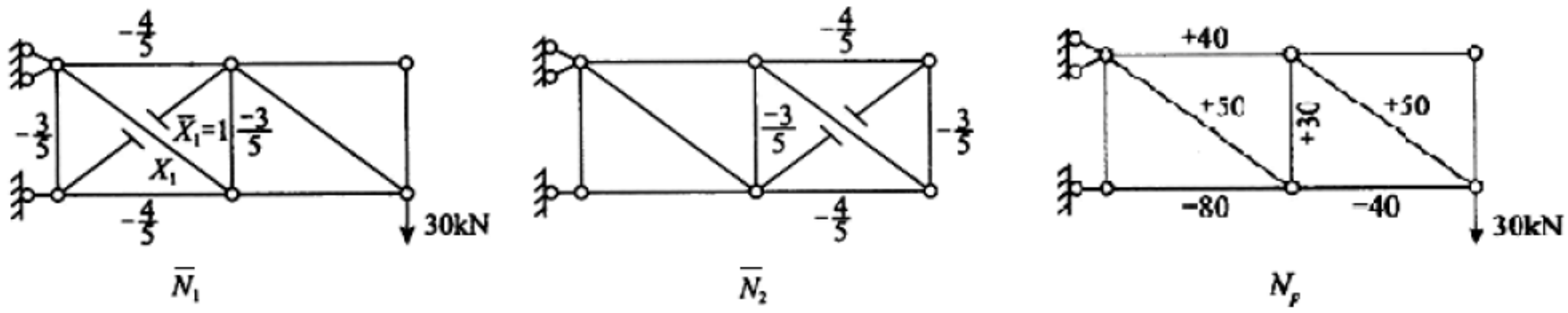


图 7-2-40

求解出力法典型方程中的系数和自由项，代入方程解得未知力 X_1，具体计算如下

$$EA\delta_{11}=\bar{F}_N\bar{F}_N\cdot l=4EA\text{，}\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{9}{25EA}$$

$$\Delta_{1P}=\Delta_{2P}=\frac{100}{EA}\text{，}\quad \delta_{22}=\frac{4}{EA}$$

$$\begin{cases}4X_1+\dfrac{9}{25}X_2+100=0\\ \dfrac{9}{25}X_1+4X_2+100=0\end{cases}\Rightarrow X_1=X_2=-\frac{2500}{109}=-22.94\ \text{kN}$$

（教材 $F_{NBC}=F_{NDE}=-23.5\text{kN}$）

由 $F_N=\bar{F}_{N1}X_1+\bar{F}_{N2}X_2+F_P$，计算出各杆轴力如图 7-2-41 所示。

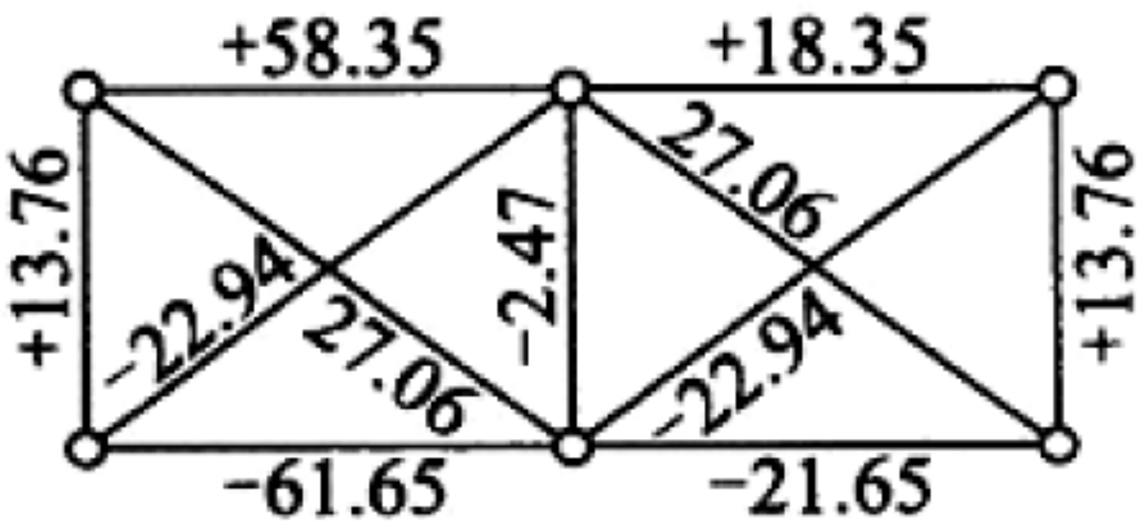


图 7-2-41

7-11 图示组合结构的内力，绘出受弯杆的弯矩图并求出各杆轴力。已知上弦横梁的 $EI=1\times10^4\text{kN}\cdot\text{m}^2$，腹杆和下弦的 $EA=2\times10^5\text{kN}$。

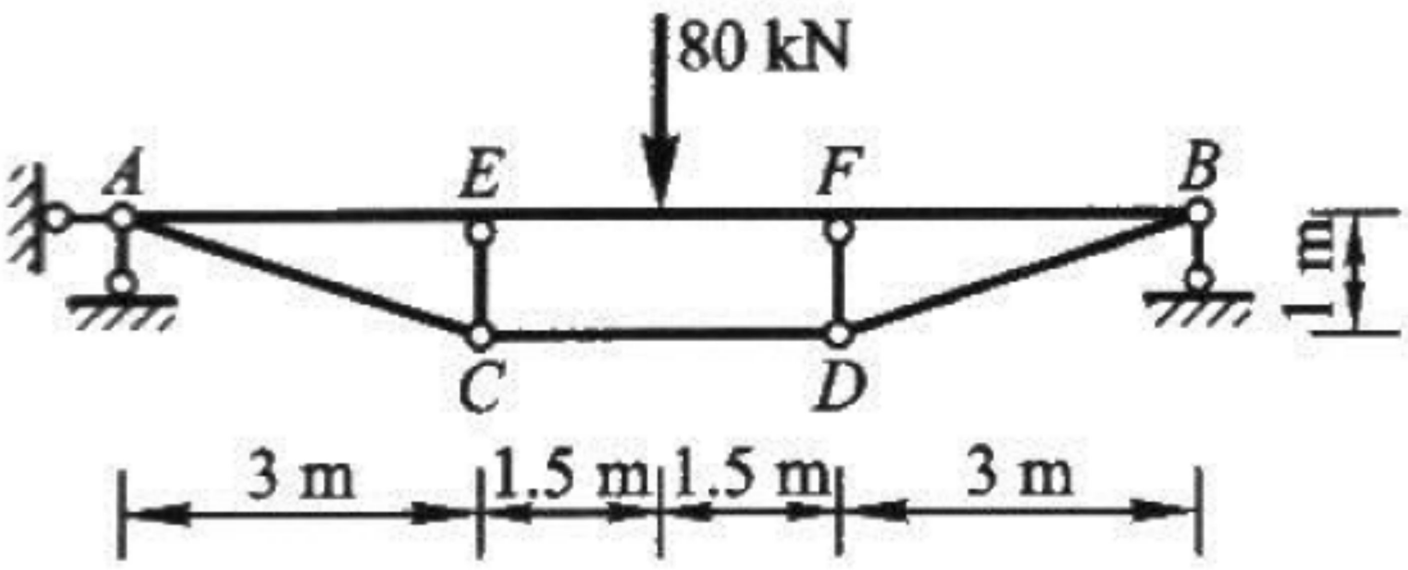


图 7-2-42（题 7-11）

解：这是一次超静定组合结构，作出基本体系如图 7-2-43（a）所示，未知力为 X_1，计算出单位力下的轴力和弯矩如图 7-2-43（b）所示，原荷载作用下的 M_P 如图 7-2-44（a）所示。

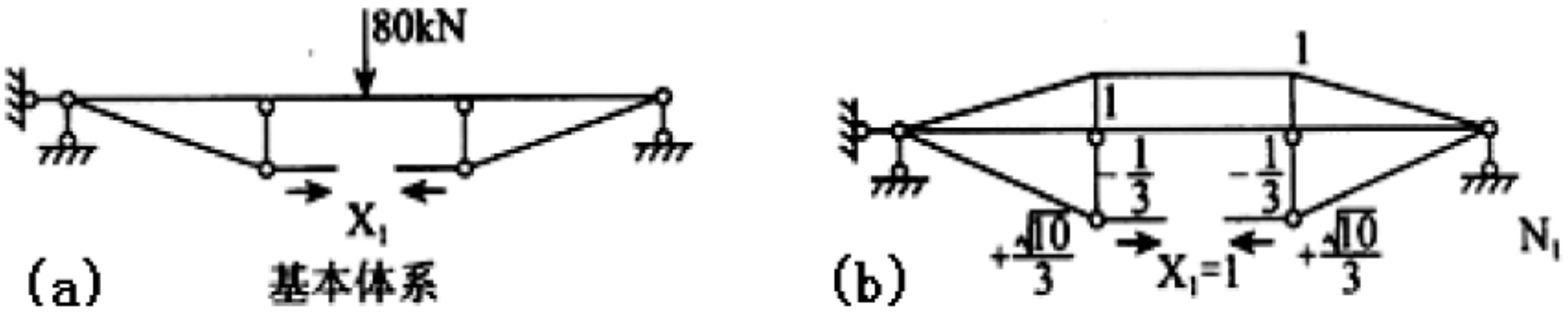


图 7-2-43

求解出力法典型方程中的系数和自由项，代入方程解得未知力 X_1，具体计算如下

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds+\sum\frac{\overline{F}_N{}^2 l}{EA}=\frac{1}{EI}\left(2\times\frac{1\times3}{2}\times\frac{2}{3}+3\right)+\frac{1}{EA}\left(9+2\times\frac{10}{9}\times\sqrt{10}+2\times\frac{1}{9}\right)$$

$$\Delta_{1P}=\frac{2}{EI}\left(\frac{120\times3}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{120+180}{2}\times\frac{3}{2}\times1\right)$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{690}{5+\frac{I}{A}\times10.25}=125.17kN$$

根据 $M=\overline{M}_1x_1+M_P$ 以及 $F_N=\overline{F}_{N1}x_1+F_{N_p}$，分别作出 M 图和 N 图，如图 7-2-44（b）所示。

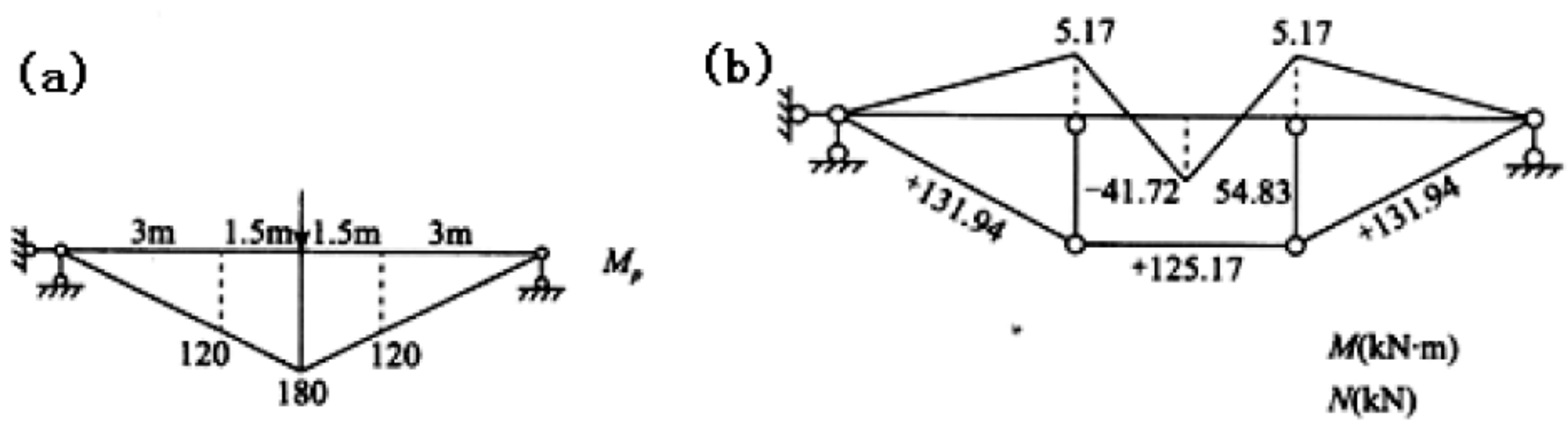


图 7-2-44

7-12　图示组合结构 $A=10I/l^2$，试按去掉 CD 杆和切断 CD 杆两种不同的基本体系以建立典型方程进行计算，并讨论当 $A\to0$ 和 $A\to\infty$ 时的情况。

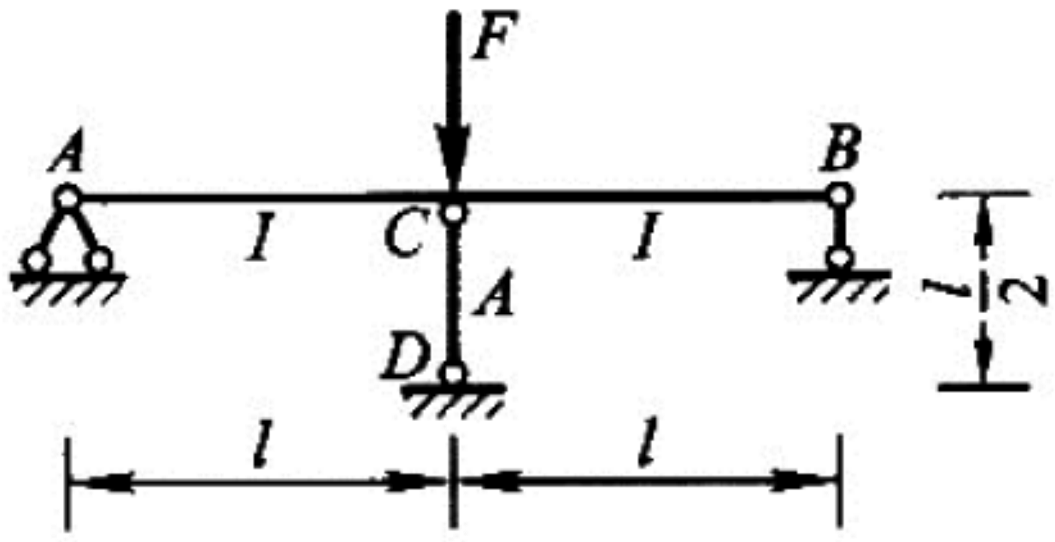


图 7-2-45（题 7-12）

解：（1）截断 CD 杆，基本体系如图 7-2-46（a）所示，设 X_1 为拉力，计算过程如下

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=0,\quad \delta_{11}=\frac{l^3}{6EI}+\frac{l}{2EA},\quad \Delta_{1P}=\frac{Pl^3}{6EI},$$

$$A=\frac{10I}{l^2},\quad x_1=\frac{-\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{10F}{13}\text{（压力）}$$

（2）当去掉 CD 杆，基本体系如图 7-2-46（b）所示，具体计过程如下

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}=-\frac{x_1\times\frac{l}{2}}{EA},\quad \delta_{11}=\frac{l^3}{6EI},\quad A=\frac{10I}{l^2},\quad x_1=-\frac{10F}{13}$$

当 A→0 时，X_1＝0，M_C＝F*l*/2；A→∞，X_1＝－F，M_C＝0。

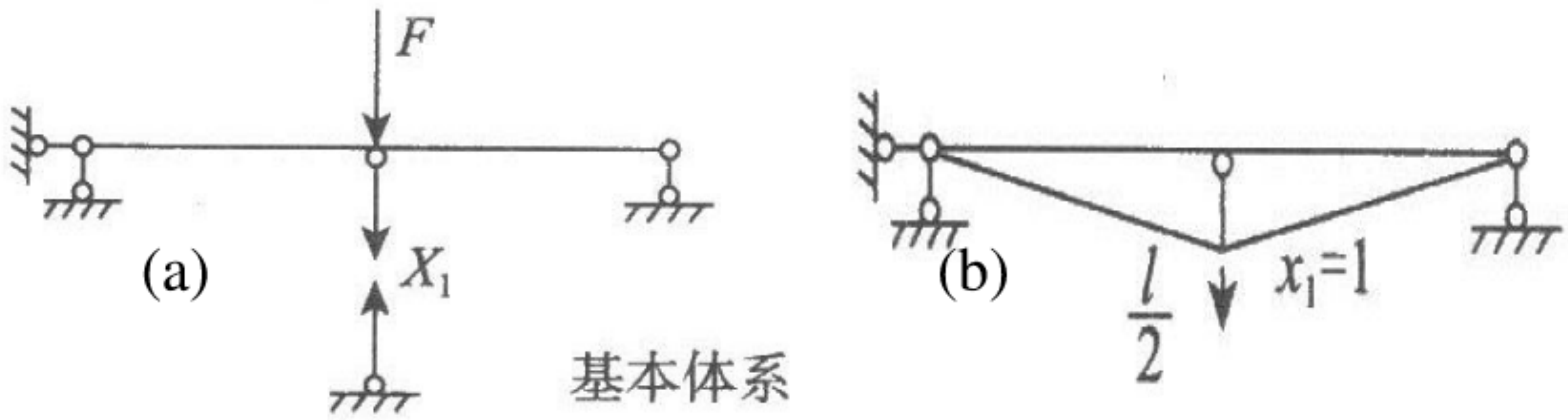


图 7-2-46

7-13　试计算图示排架，作 M 图。

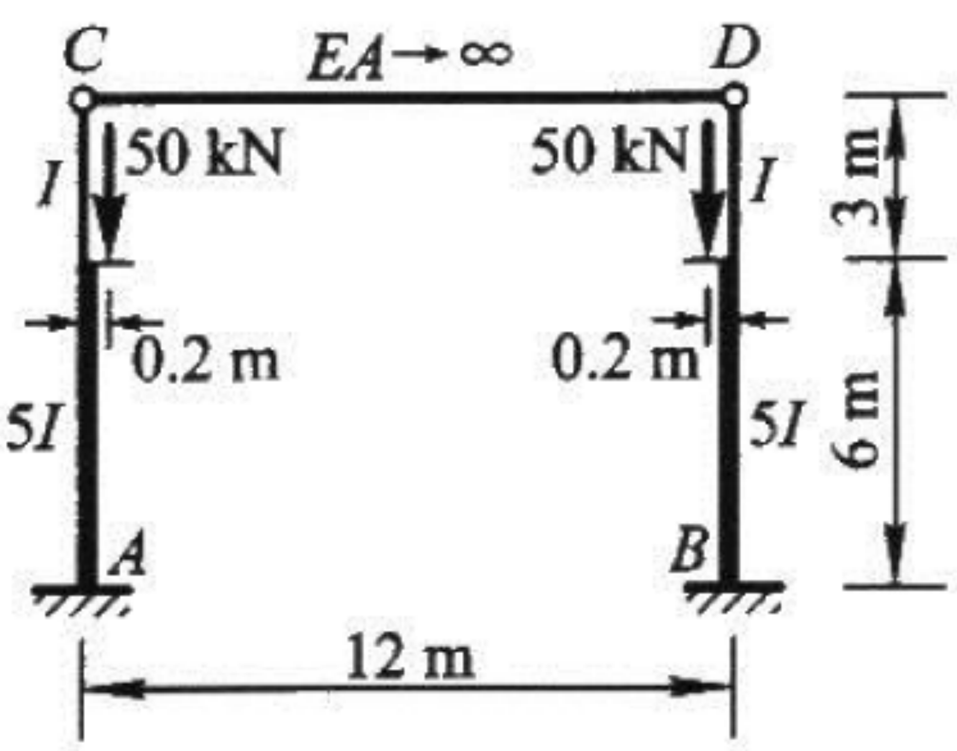


图 7-2-47（题 7-13）

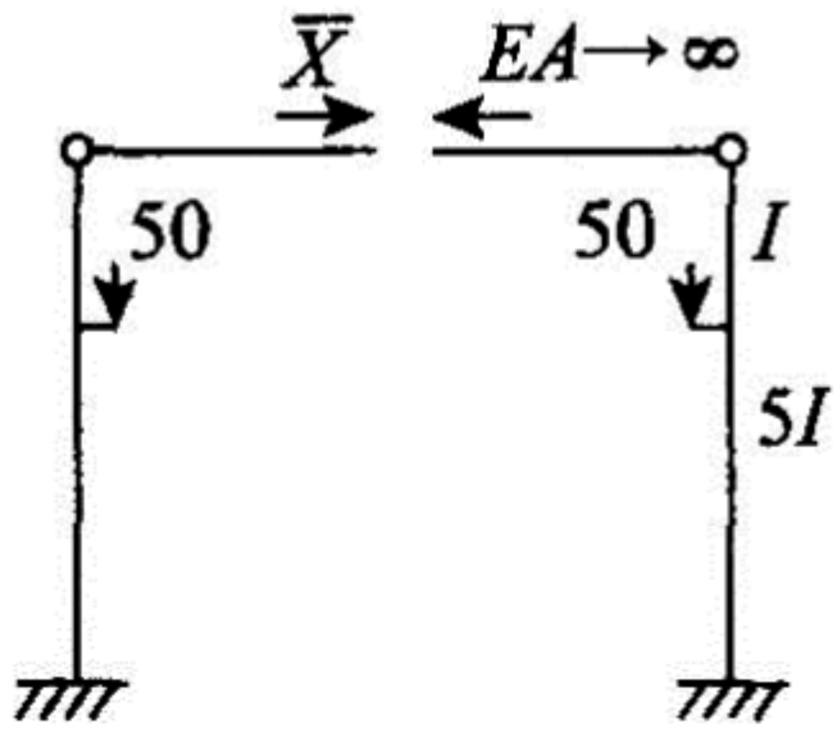


图 7-2-48（基本体系）

解：这是一次超静定结构，截断中间链杆，作出基本体系图如图 7-2-48 所示。未知力为 X_1，作出单位力下弯矩图 $\overline{M}_1$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P 如图 7-2-49 所示。

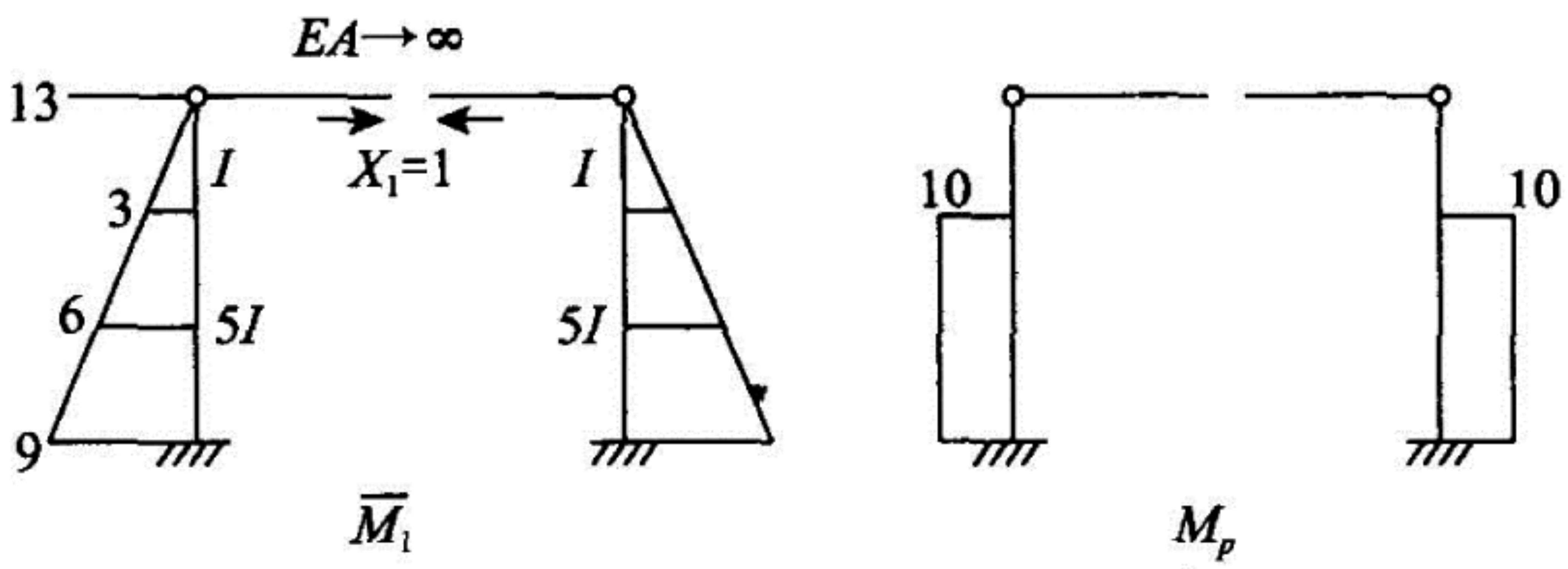


图 7-2-49

计算过程如下

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}(\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}\times3)+\frac{2}{5EI}[\frac{1}{2}\times9\times6\times(\frac{1}{3}\times3+\frac{2}{3}\times9)+\frac{1}{2}\times3\times6\times(\frac{1}{3}\times9+\frac{2}{3}\times3)]=\frac{111.6}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{2}{5EI}[\frac{1}{2}\times(3+9)\times6\times10]=\frac{144}{EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{144}{111.6}=-1.29$$

由 $M=\overline{M}_1x_1+M_P$，作出最终 M 图，如图 7-2-50 所示。

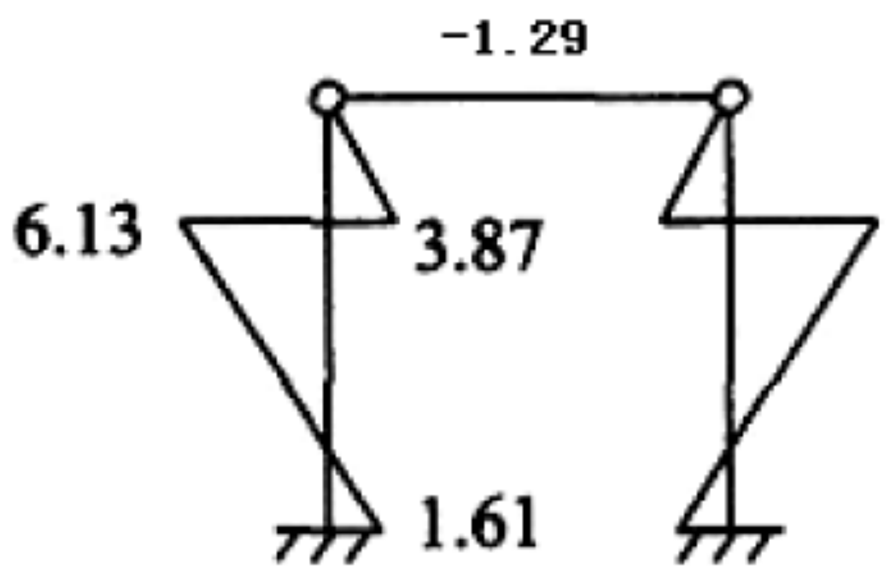


图 7-2-50

7-14　试计算图示排架，其中 I_1：I_2：I_3＝1：2：5，作 M 图。

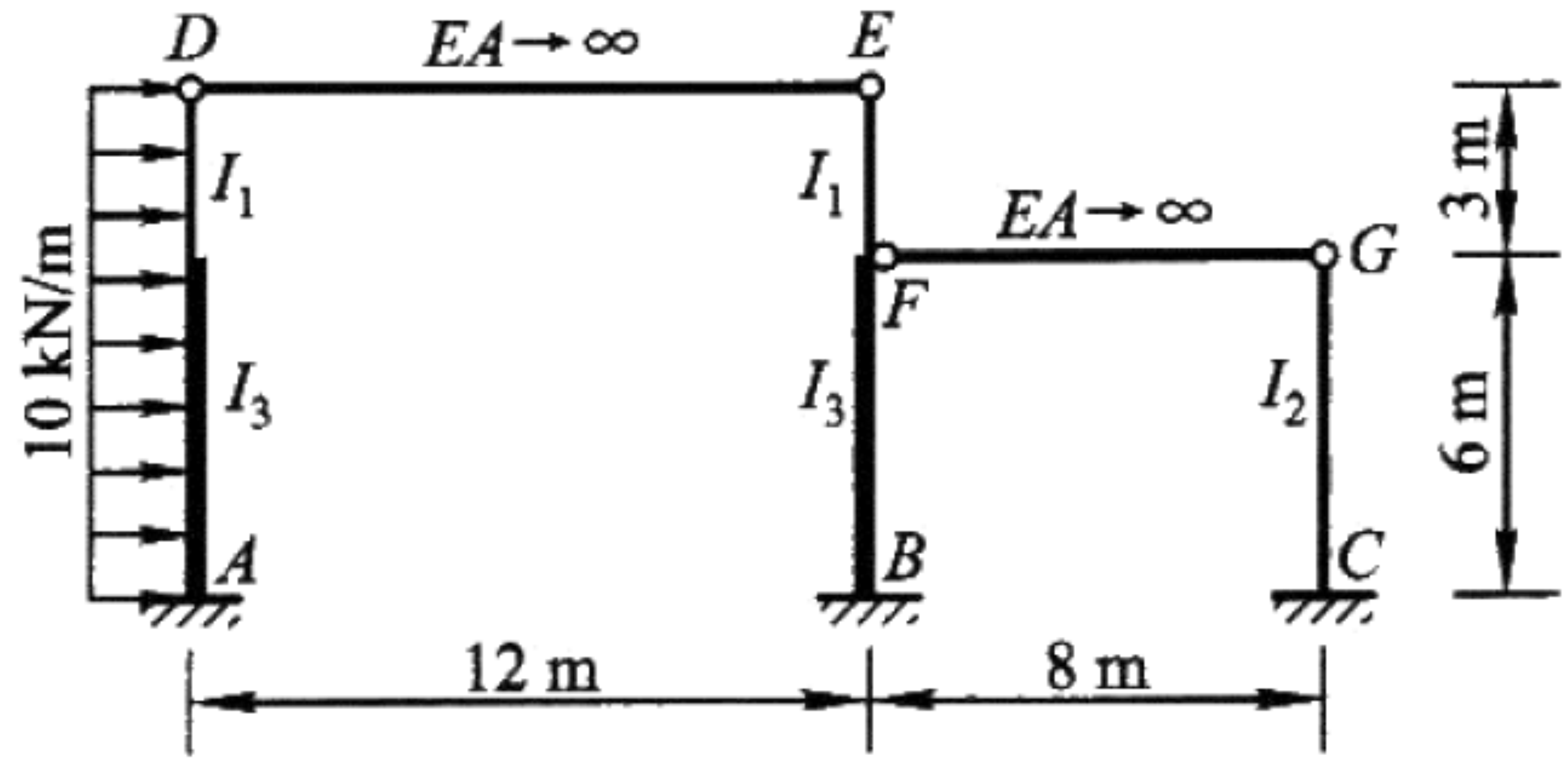


图 7-2-51（题 7-14）

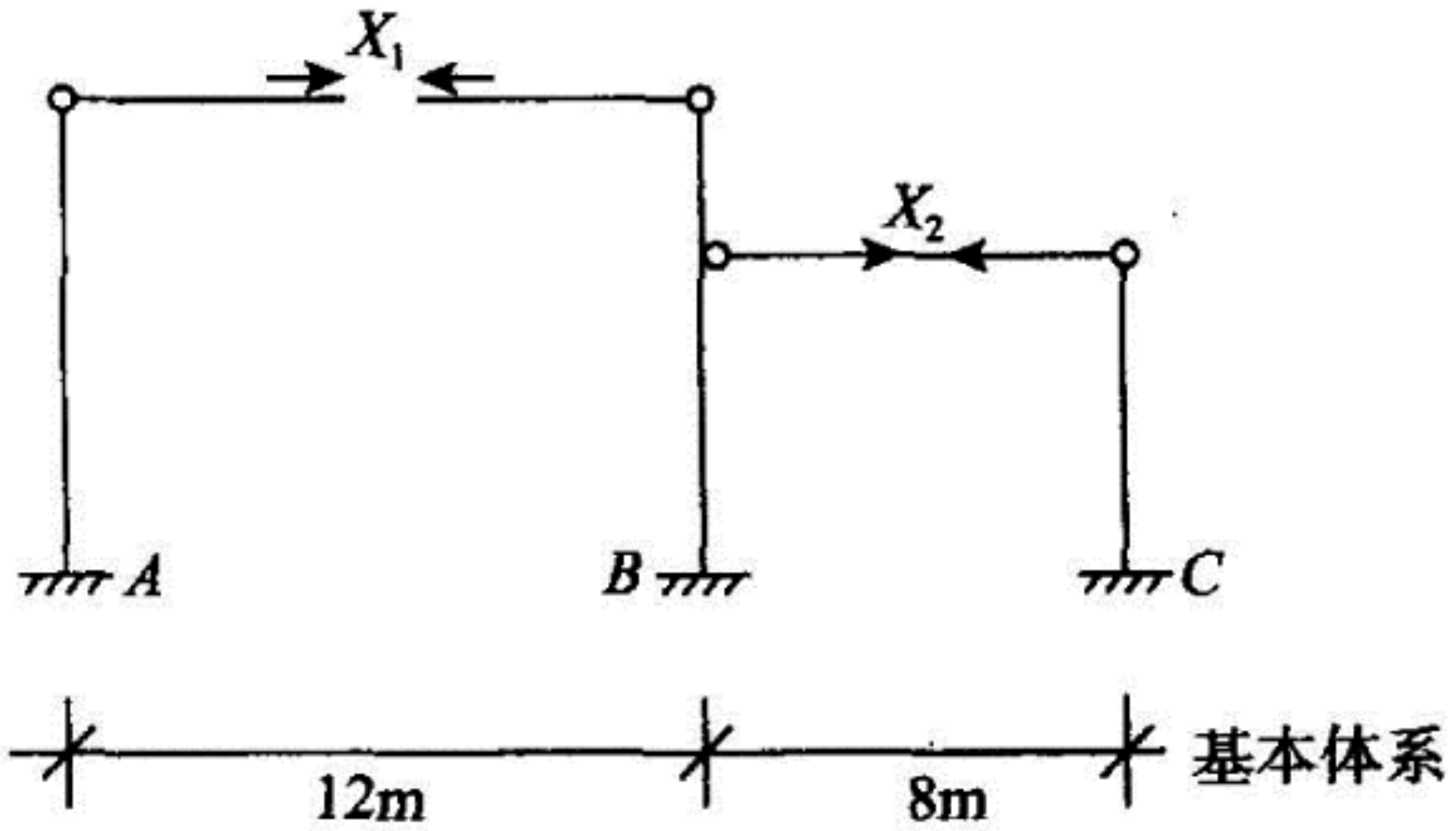


图 7-2-52（基本体系）

解：这是二次超静定结构，需要注意的是三个刚度不同，基本体系如图 7-2-52 所示。未知力为 X_1、X_2，作单位力下的弯矩图 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-53 所示。

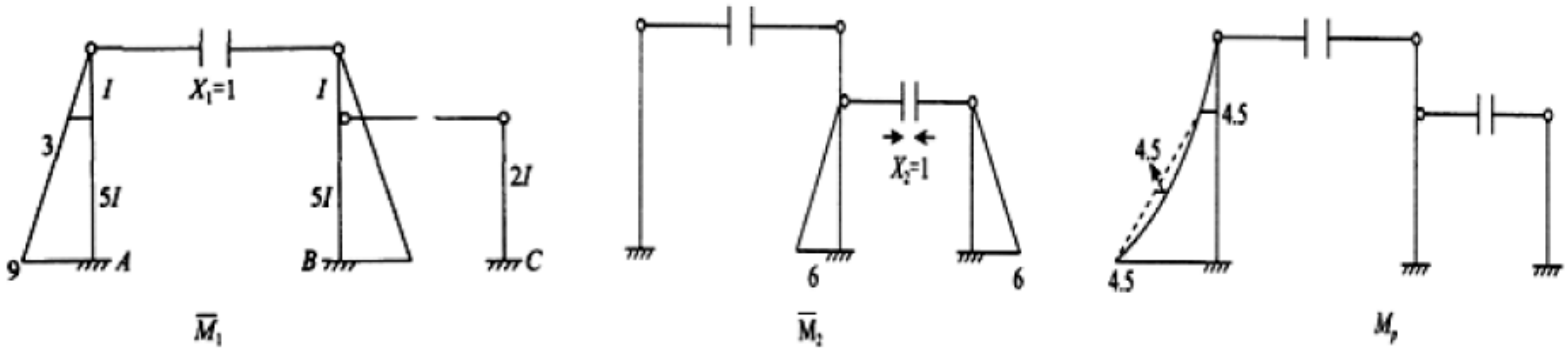


图 7-2-53

根据力法求解，计算典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}\left[\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}\times3\right]+\frac{2}{5EI}\left[\frac{1}{2}\times(3+9)\times6\times\frac{1}{2}\times(3+9)\right]=\frac{111.6}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{25.2}{EI},\delta_{22}=\frac{50.4}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1721.25}{EI},\quad \Delta_{2P}=0$$

列出力法基本方程，算得未知力

$$\begin{cases}111.6X_1-25.2X_2+1721.25=0\\-25.2X_1+50.4X_2+0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-17.39\ \text{kN}\\X_2=-8.69\ \text{kN}\end{cases}$$

由$M=\bar{M}_1x_1+\bar{M}_2x_2+M_P$，画出最终的 M 图，如图 7-2-54 所示。

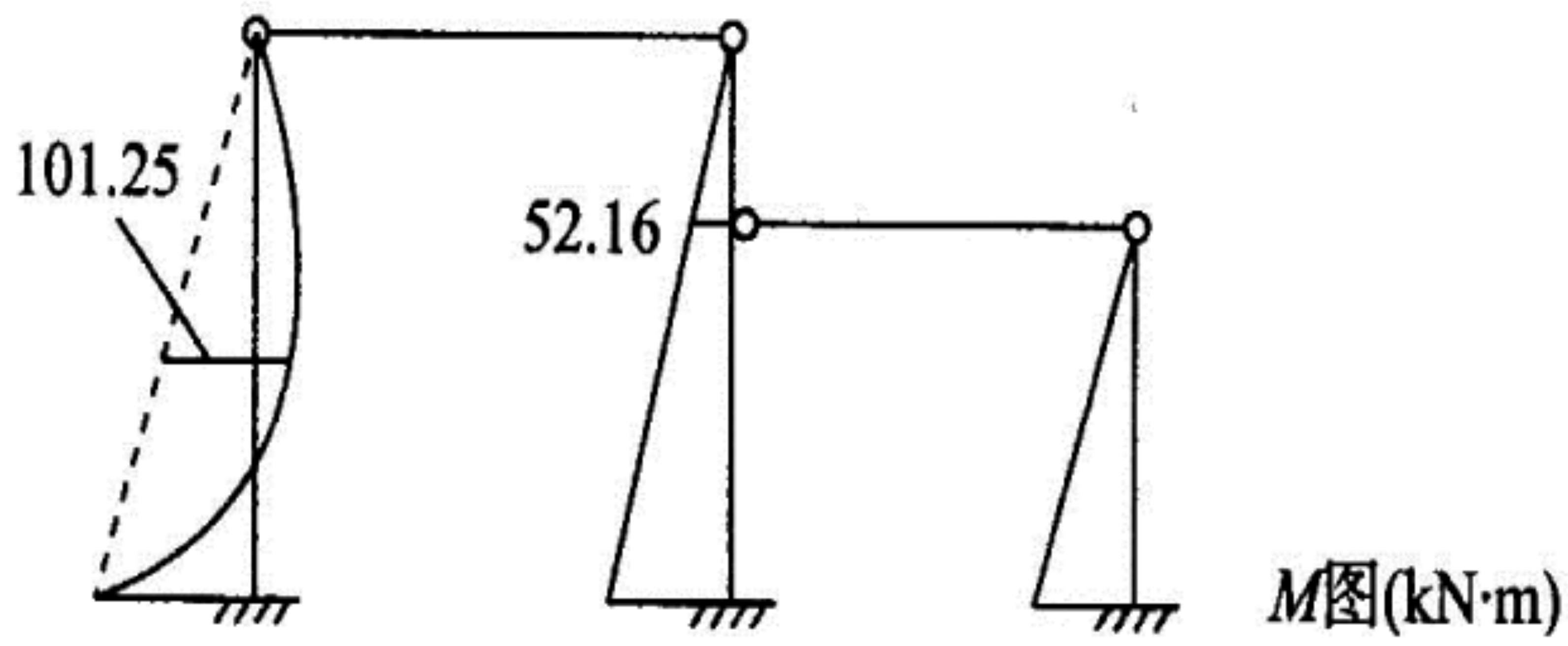


图 7-2-54

7-15　试分析图示对称结构，绘制 M、F_s、F_N 图。

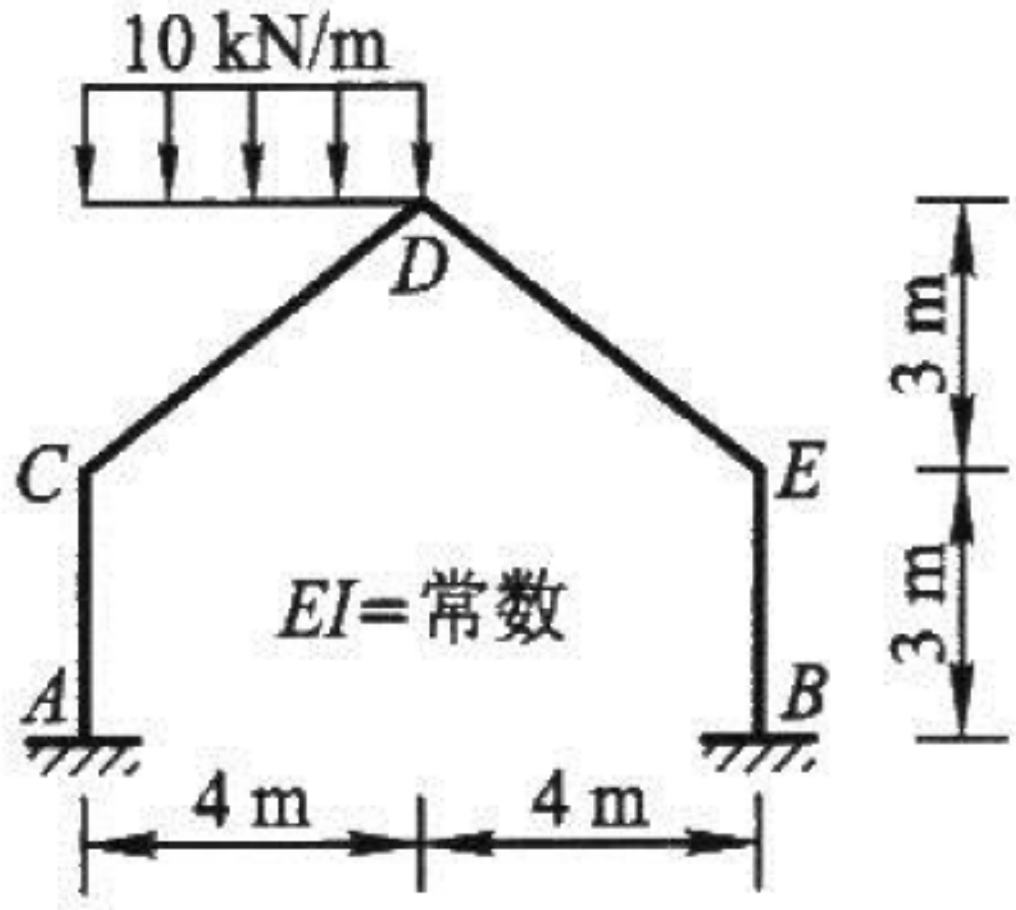


图 7-2-55（题 7-15）

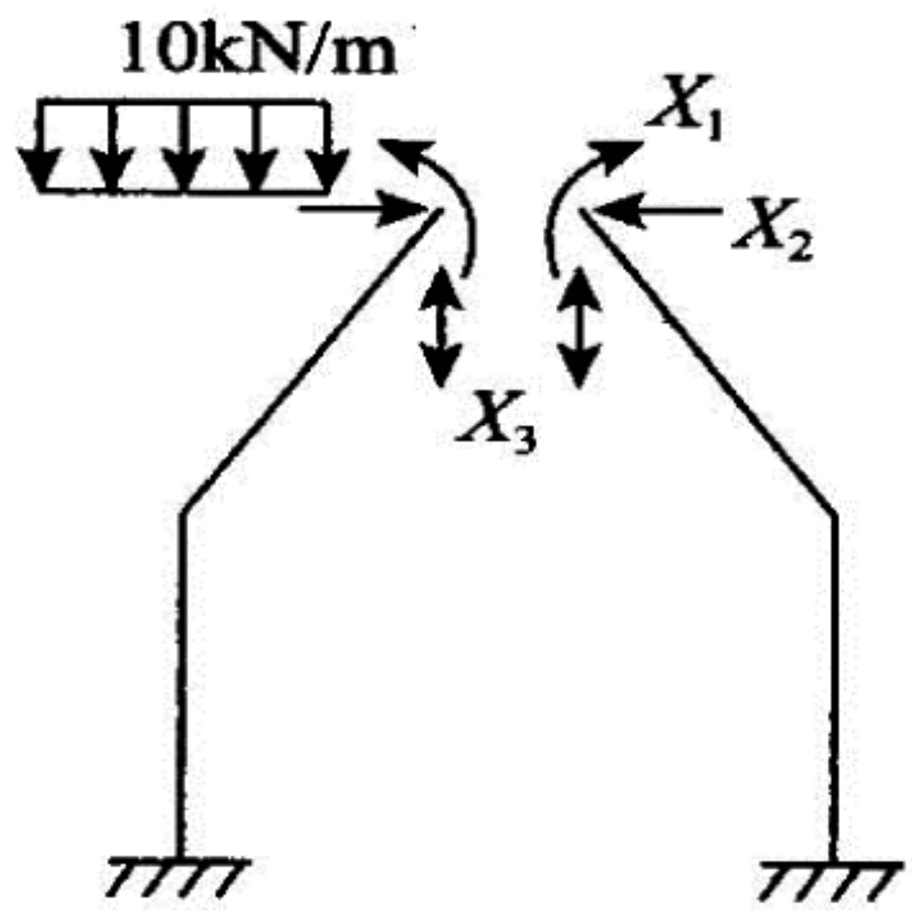


图 7-2-56

解：这是三次超静定结构，基本体系如图 7-2-56 所示。未知力为 X_1、X_2、X_3，作出单位力下的弯矩图$\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$、$\bar{M}_3$和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-57 所示。

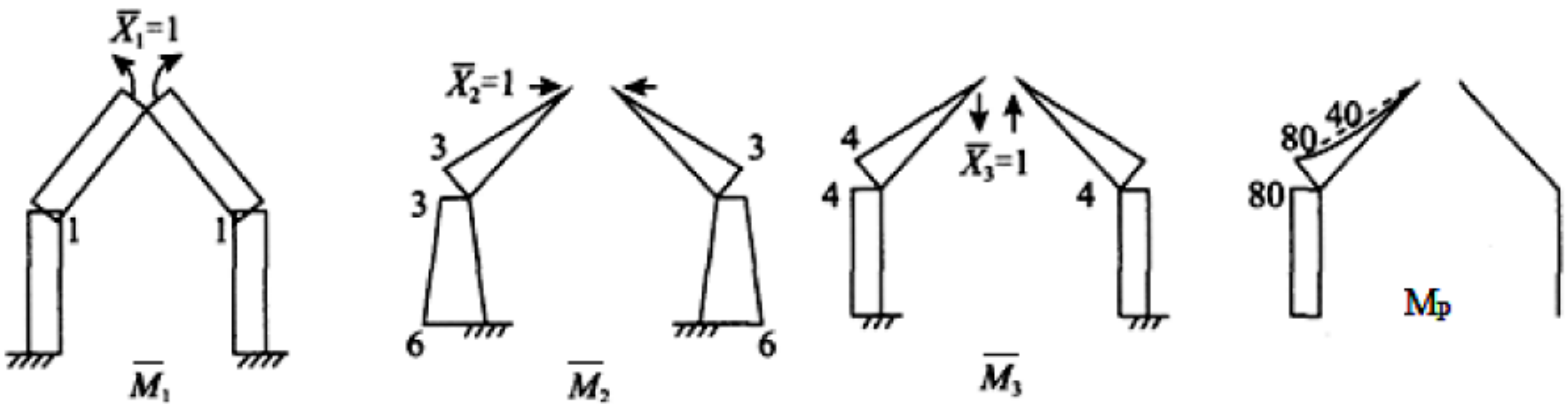


图 7-2-57

据力法求解，计算典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}(5\times1\times1+1\times3\times1)=\frac{16}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{42}{EI},\delta_{22}=\frac{156}{EI}$$

因体系除 M_p 处为对称结构，$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 正对称，$\overline{M}_3$ 为反对称，故

$$\delta_{13}=\delta_{23}=0$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{373.33}{EI},\quad \Delta_{2P}=\frac{1380}{EI},\quad \Delta_{3P}=\frac{1360}{EI}$$

列出力法的基本方程

$$\begin{cases}16X_1-42X_2-373.33=0\\-42X_1+156X_2+1380=0\\149.33X_3+1360=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=0.3825\text{ kN}\\X_2=-8.734\text{ kN}\\X_3=-9.107\text{ kN}\end{cases}$$

故由 $M=\overline{M}_1x_1+\overline{M}_2x_2+\overline{M}_3x_3+M_P$,可画出 M 图，此时为静定结构，可画出 F_S 图、N 图，如图 7-2-58 所示。

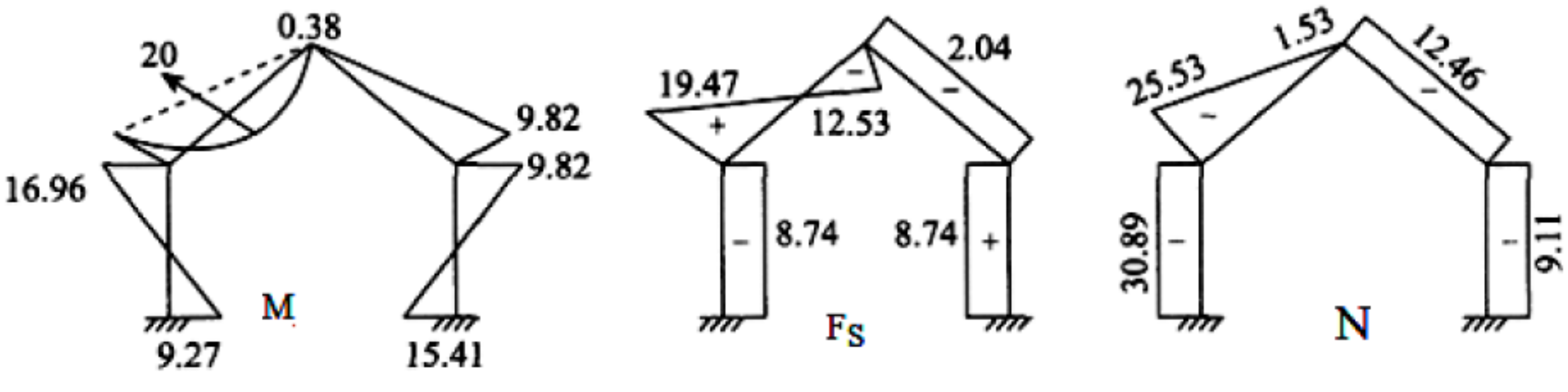


图 7-2-58

7-16～7-20　试绘制图示对称结构的 M 图。

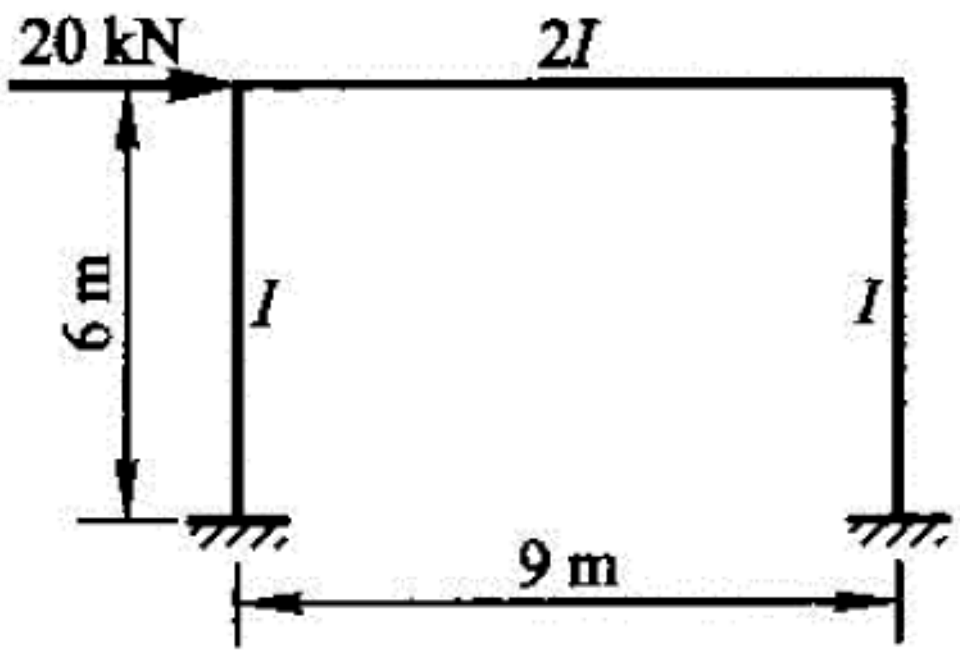


图 7-2-59（题 7-16）

7-16 解：此题可以分解为一个正对称结构和一个反对称结构，如图 7-2-60 所示。正对称结构因作用在顶部水平链杆上，所以不存在弯矩图，只需计算出反对称的 M 图即为本题解。

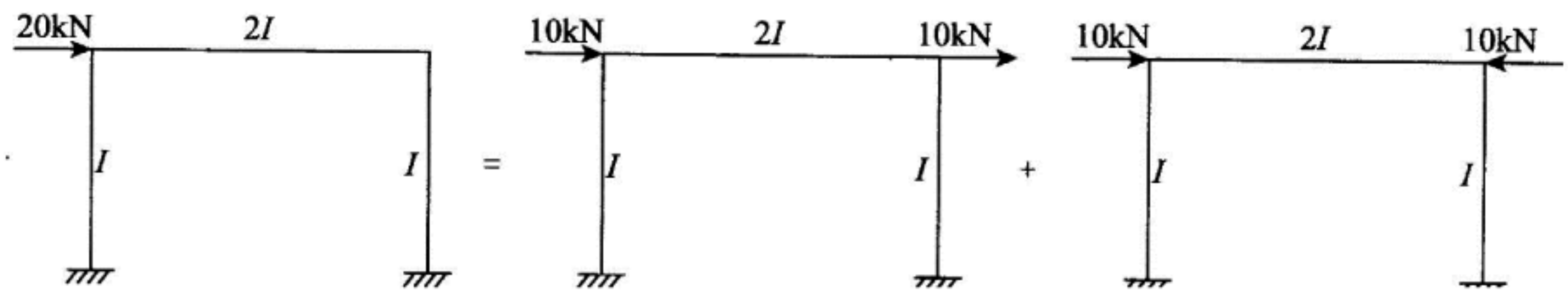


图 7-2-60

反对称结构未知力 X_1，作单位力下的弯矩图 $\overline{M}_1$ 和原荷载的弯矩图 M_P，如图 7-2-61 所示。根据力法求解，计算出多余未知力 X_1，具体步骤如下

$$\delta_{11}=(\frac{1}{2EI}\times4.5\times4.5\times\frac{4.5}{3})+(4.5\times4.5\times6)\frac{1}{EI}=\frac{136.6875}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}(\frac{60\times6}{2}\times4.5)=\frac{810}{EI}$$

$$x_1=\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-5.926kN$$

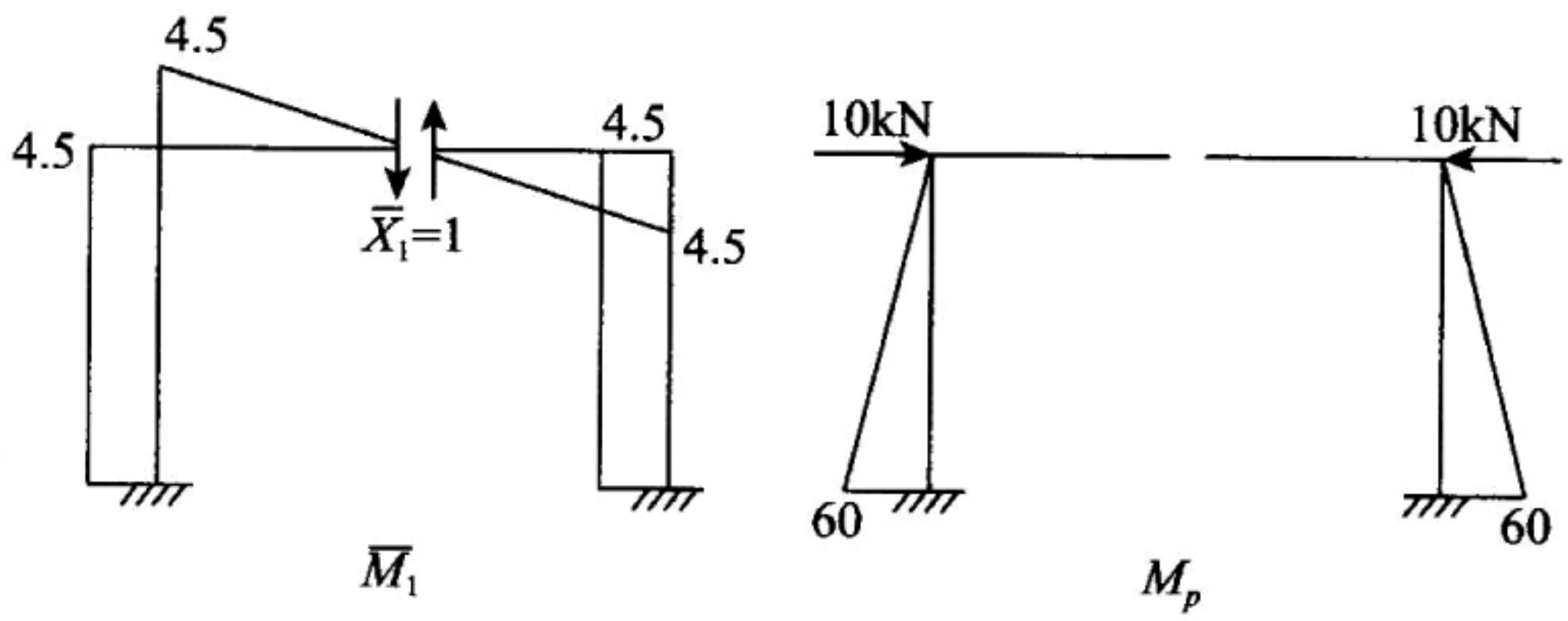
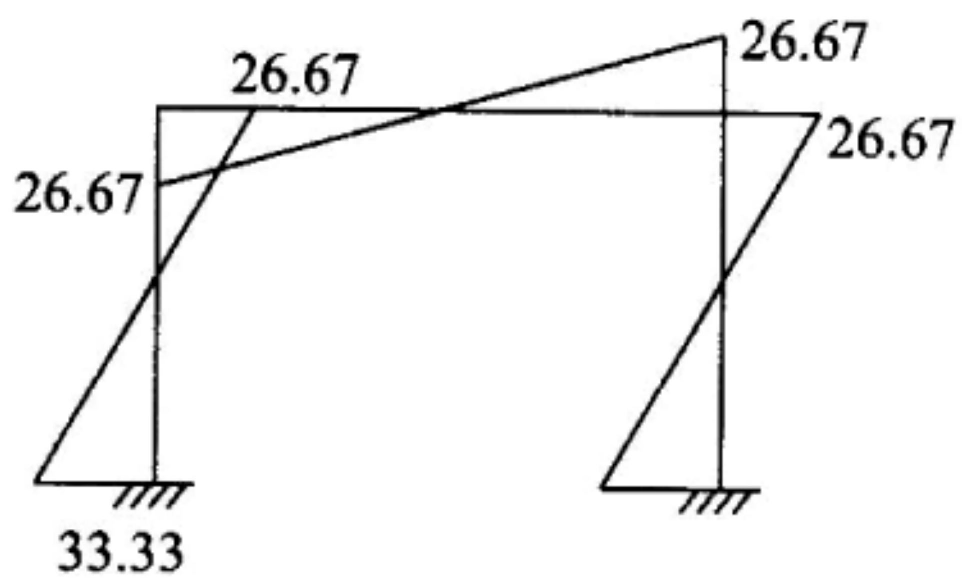


图 7-2-61

故由 $M=\overline{M}_1x_1+M_P$，作出最后弯矩图 M，如图 7-2-62 所示。



M图

图 7-2-62

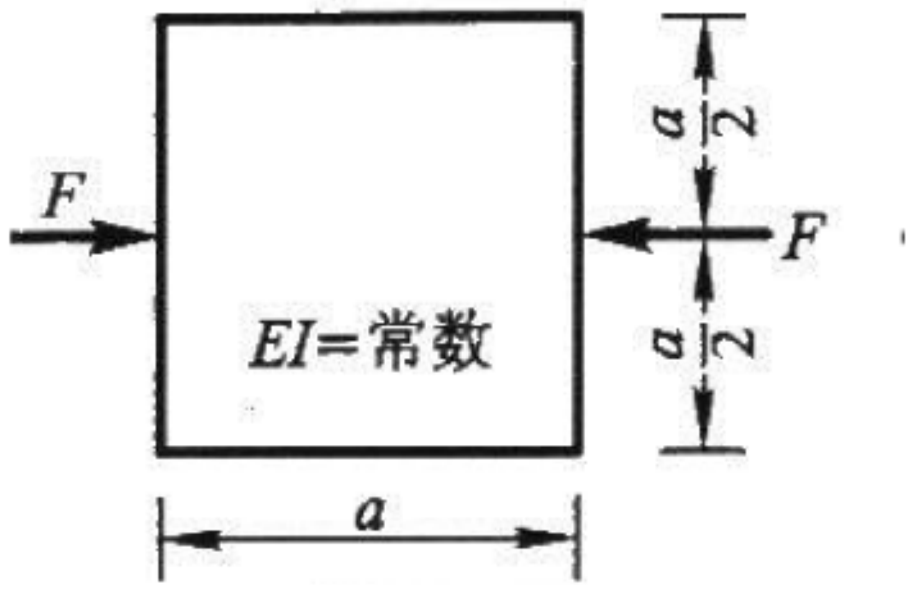


图 7-2-63（题 7-17）

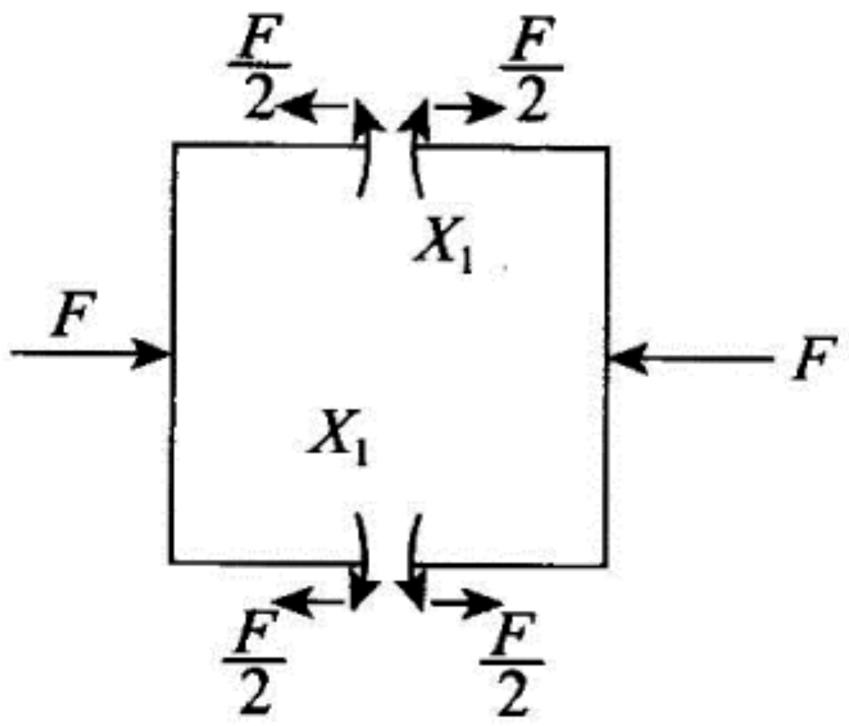


图 7-2-64（基本体系）

7-17　解：此体系为正对称结构，取基本体系如图 7-2-64 所示，可知所选点处剪力为$F_N=\frac{F}{2}$，未知力为 X_1。

作出单位力弯矩图 $\bar{M}_1$ 和原荷载弯矩图 M_P，如图 7-2-65（a）所示。

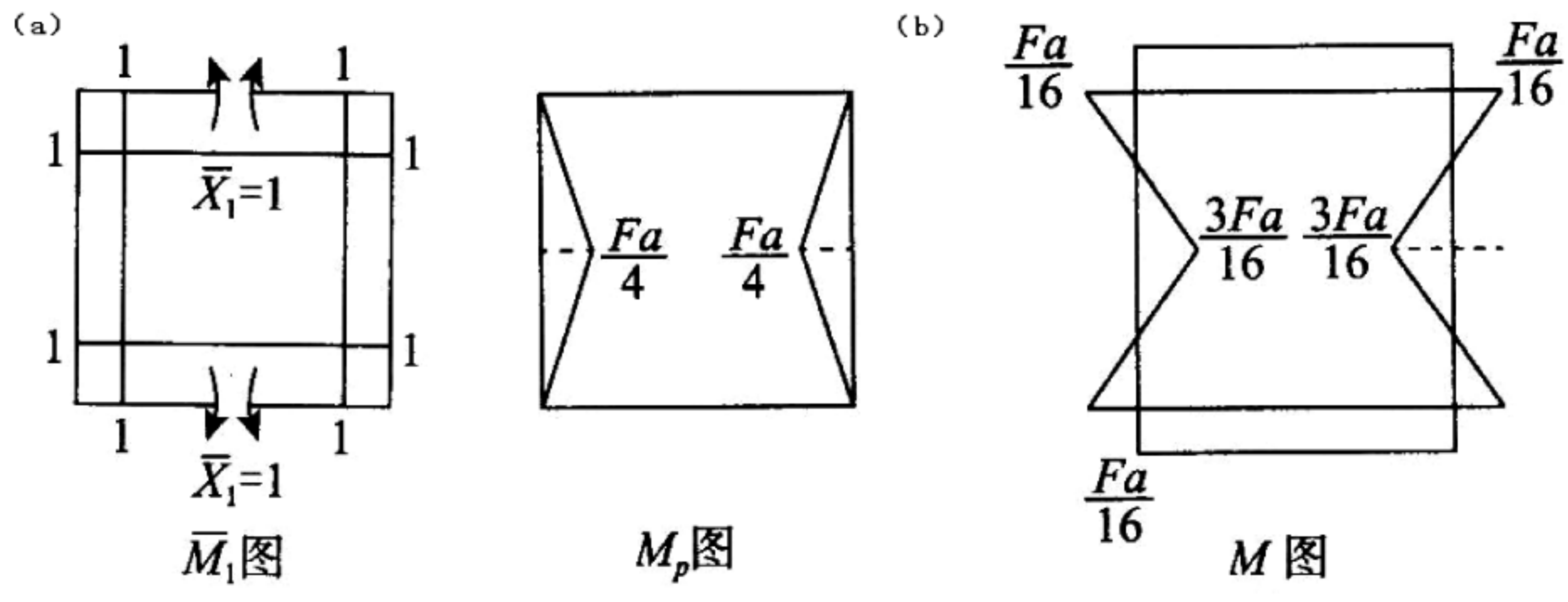


图 7-2-65

根据力法求解，计算出多余未知力 X_1，具体步骤如下

$$\delta_{11}=\frac{4}{EI}(1\times a\times 1)=\frac{4a}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{4}{EI}(\frac{1}{2}\times\frac{Fa}{4}\times\frac{a}{2}\times 1)=\frac{Fa^2}{4EI}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\frac{\frac{Fa^2}{4EI}}{\frac{4a}{EI}}=-\frac{Fa}{16}$$

故由$M=\overline{M}_1X_1+M_P$，可作出最终弯矩 M 图，如图 7-2-65（b）所示。

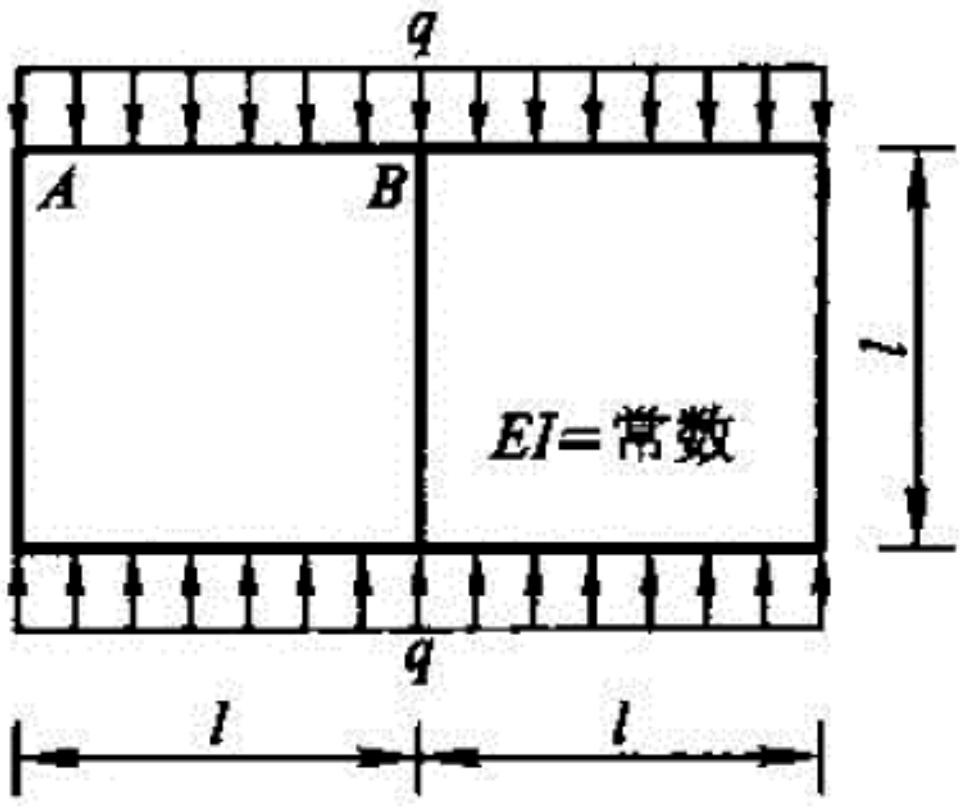


图 7-2-66（题 7-18）

7-18 解：取 1／4 结构分析，因体系为对称结构，可简化处理这是二次超静定结构，选择基本体系多余未知力为 X_1、X_2，作出单位力下的弯矩图$\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-67 所示。

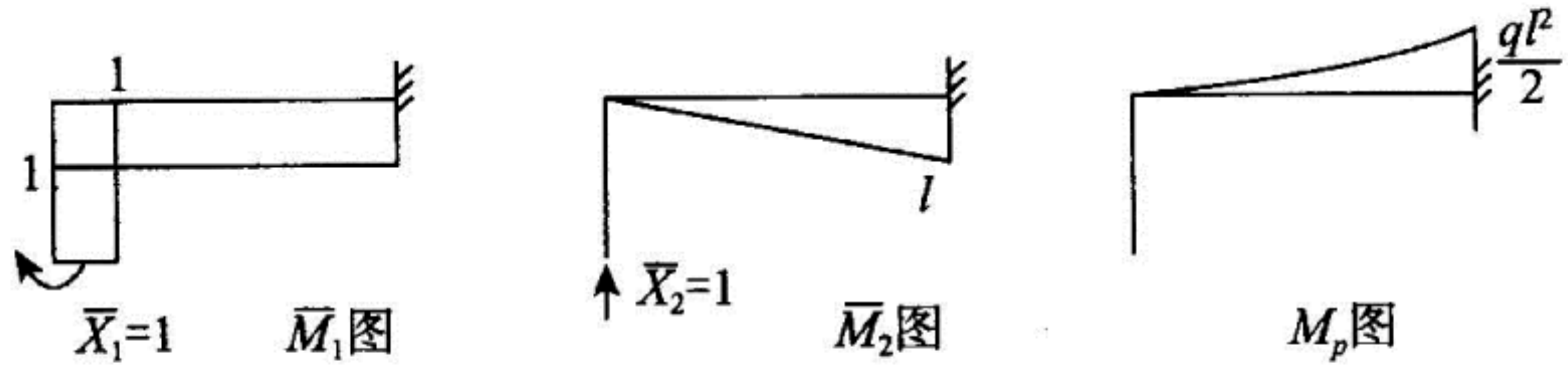


图 7-2-67

根据力法求解，计算典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left[1\times\frac{l}{2}\times1+1\times l\times1\right]=\frac{3l}{2EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{l^2}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{l^3}{3EI},\Delta_{1P}=-\frac{ql^3}{6EI},\Delta_{2P}=-\frac{ql^4}{8EI}$$

代入力法基本方程计算出多余未知力 X_1、X_2

$$\begin{cases}\frac{3l}{2}X_1+\frac{l^2}{2}X_2-\frac{ql^3}{6}=0\\ \frac{l^2}{2}X_1+\frac{l^2}{3}X_2-\frac{ql^4}{8}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-\frac{ql^2}{36}\\ X_2=\frac{5ql}{12}\end{cases}$$

由$M=\overline{M_1}X_1+\overline{M_2}X_2+M_P$，画出最终 M 图，如图 7-2-68 所示。

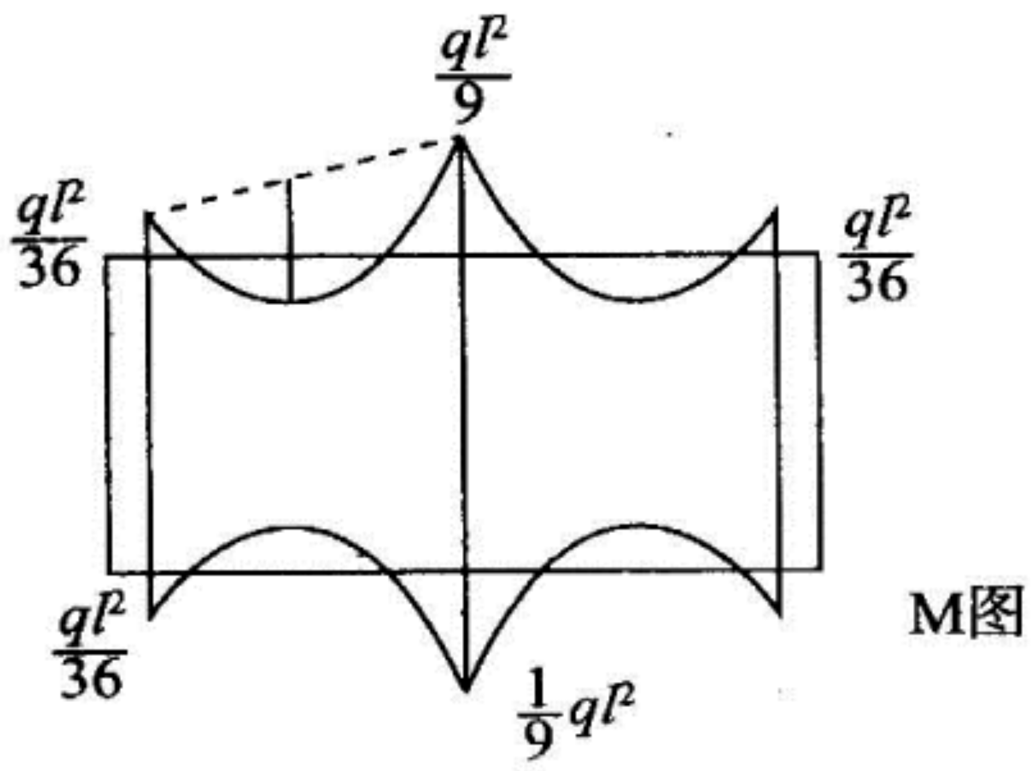


图 7-2-68

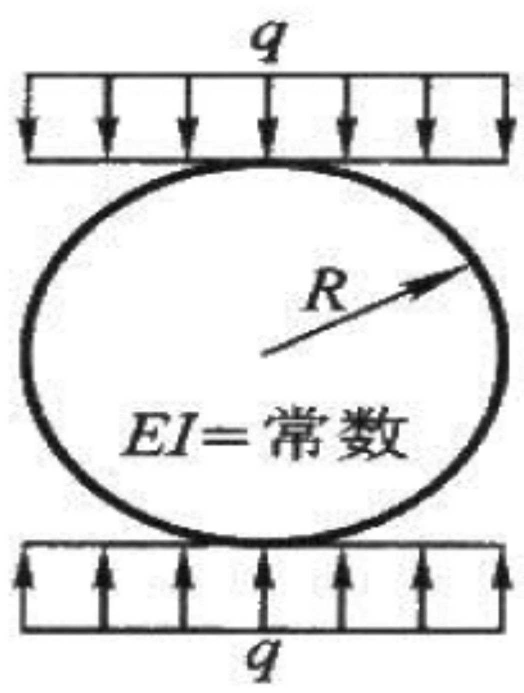


图 7-2-69（题 7-19）

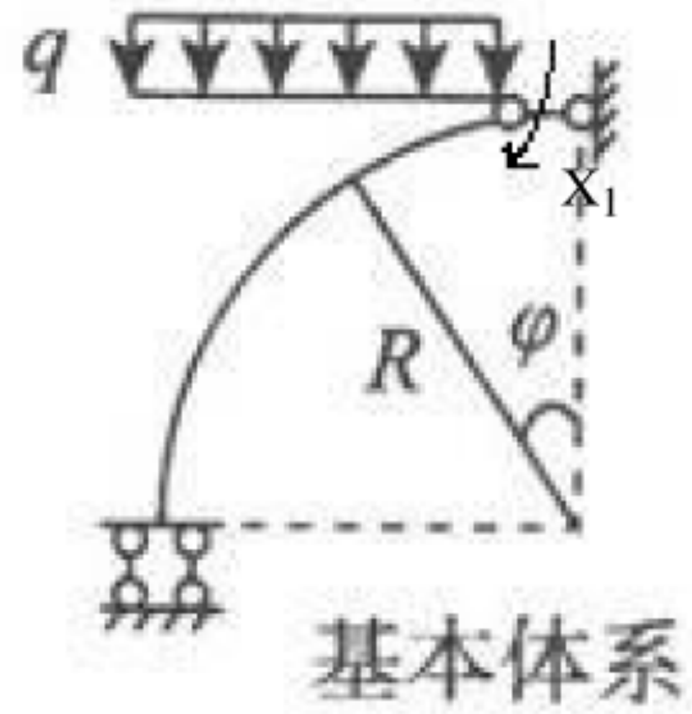


图 7-2-70

7-19　解：取 1 / 4 结构分析，这是一次超静定结构，基本体系如图 7-2-70 所示，未知力为 X_1，力法计算过程如下

$$EI\delta_{11}=\frac{\pi R}{2}$$

$$EI\triangle_{1P}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q(R\sin\varphi)^2}{2}Rd\varphi$$

$$=\frac{qR^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{\pi qR^3}{8}$$

$$X_1=\frac{EI\Delta_{1P}}{EI\delta_{11}}=\frac{qR^2}{4}$$

$$M=\frac{qR^2}{4}-\frac{qR^2}{2}\sin^2\varphi$$

由此可画出 M 图，如图 7-2-71 所示。

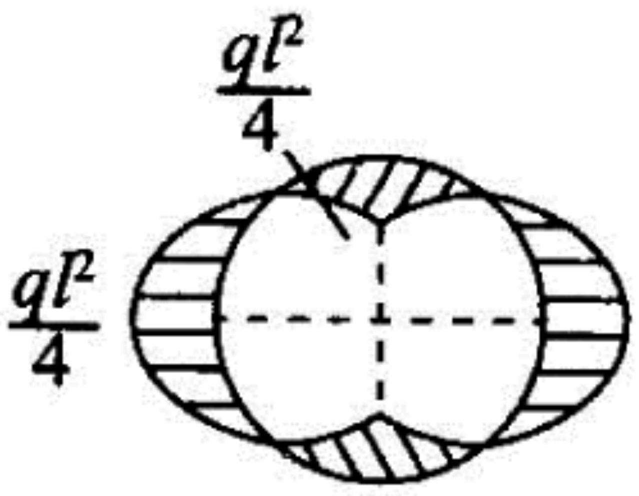


图 7-2-71

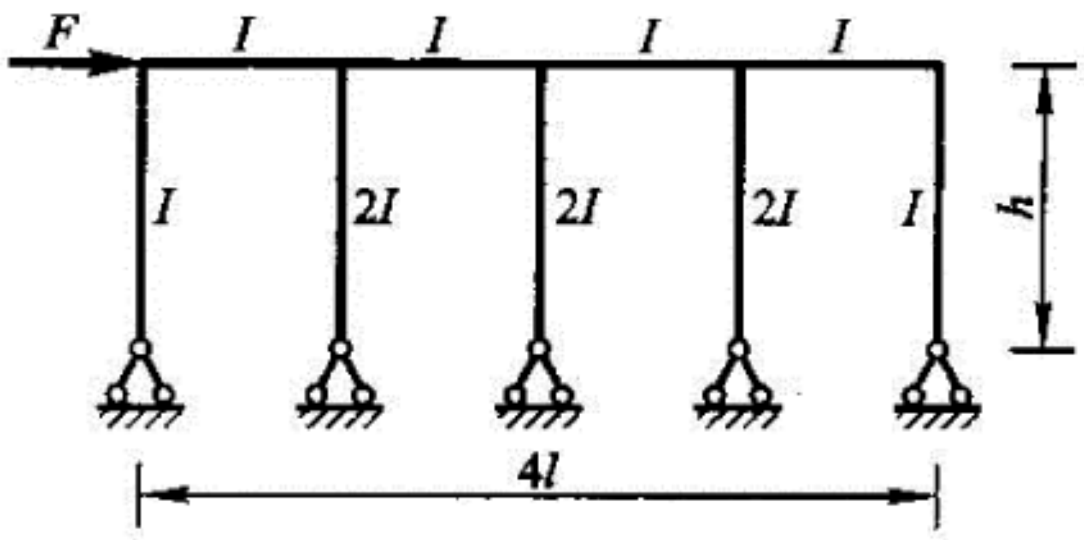


图 7-2-72（题 7-20）

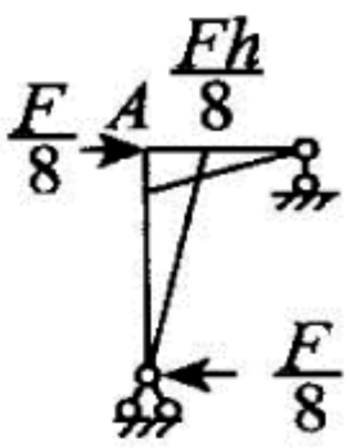


图 7-2-73（基本体系）

7-20　解：取基本体系如图 7-2-73 所示，这是静定结构，由静定结构知识可知 $M_A=\frac{F}{8}\cdot h=\frac{Fh}{8}$，故可直接画出最终 M 图，如图 7-2-74 所示。

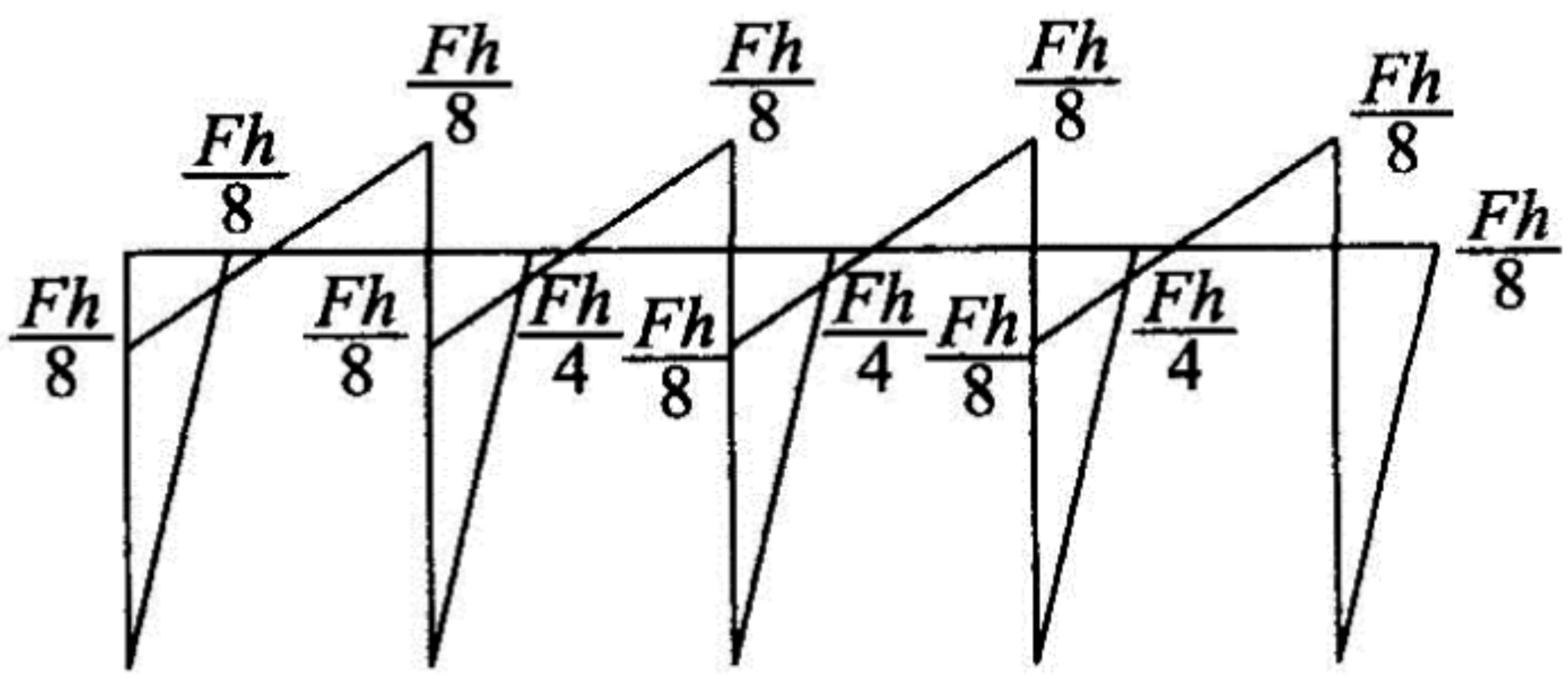


图 7-2-74

7-21　试作图示刚架的 M 图。（提示：支座反力是静定的，可将支座去掉代替以反力并视为荷载。结构有竖直、水平两个对称轴，荷载对竖轴是正对称的。将荷载对水平轴分解为正反对称两组，正对称组作用下册为零（忽略轴向变形时），不需求解；反对称时只有一个多余未知力。）

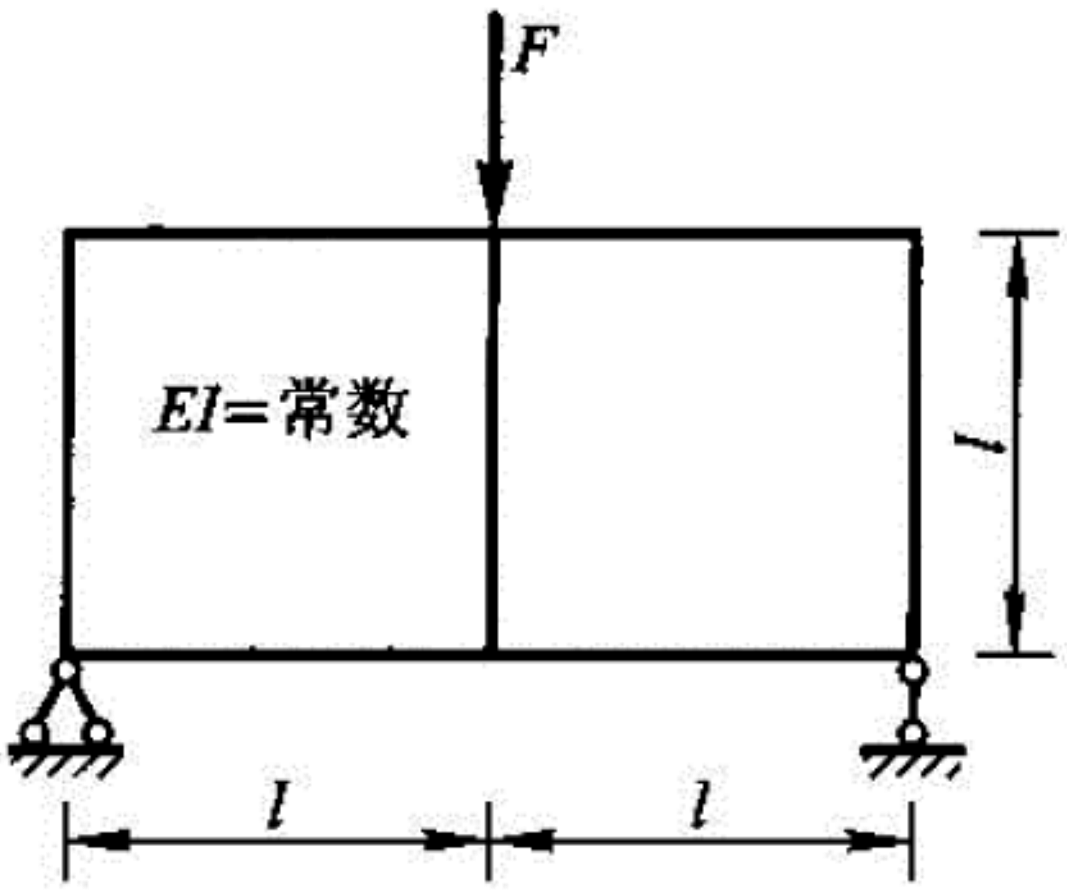


图 7-2-75（题 7-21）

解：该题结构是 6 次超静定结构，但反力静定，去掉支座代以反力，则外力对竖直中轴正对称，将外力分解为对水平中轴为正、反对称两组，则正对称时弯矩为零，反对称时如图 7-2-76（a）所示，可取 1／4 结构，如图 7-2-76（b）所示，仅为一次超静定结构，可解得 X_1＝3F/14。根据$M=\overline{M}_1X_1+M_P$，可得最终弯矩图 M，如图 7-2-76（c）所示。

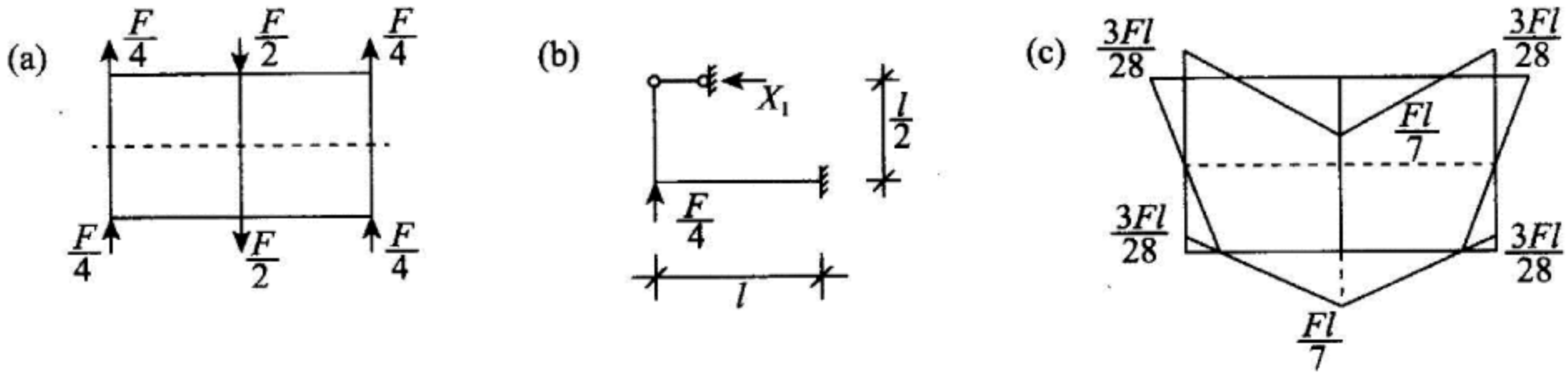


图 7-2-76

7-22　试计算图示连续梁，作 M、F_s 图，求出各支座反力，并计算 K 点的竖向位移和截面 C 的转角。（提示：取三跨简支梁为基本结构，即以支座 B、C 处截面的弯矩为多余未知力求解较简便。）

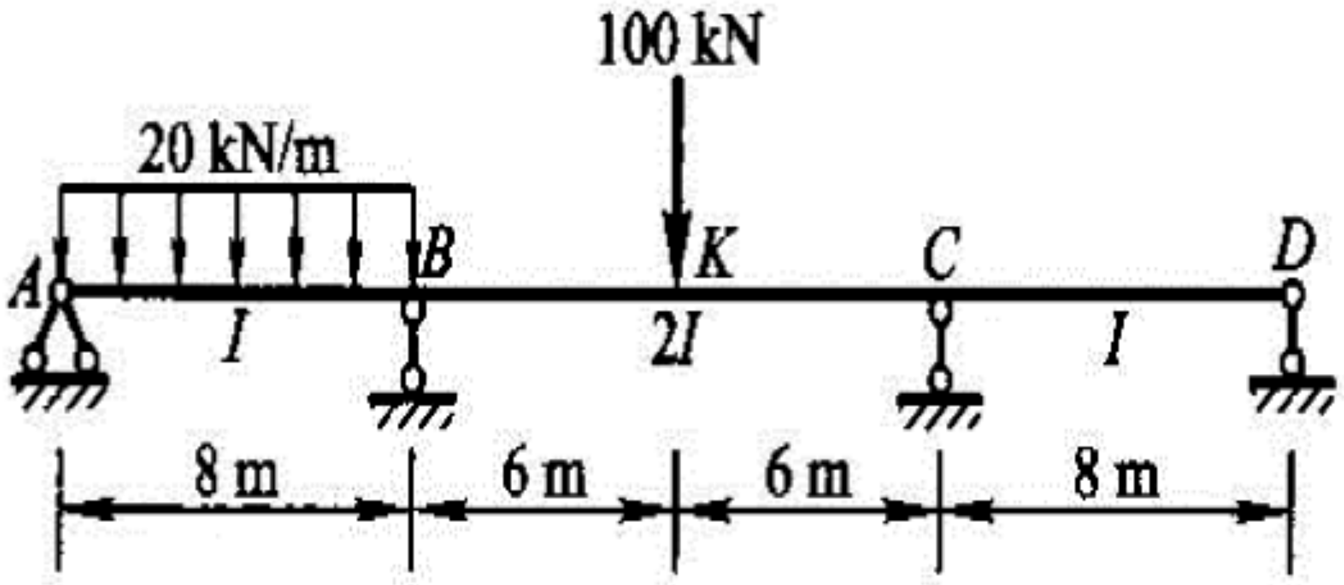


图 7-2-77（题 7-22）

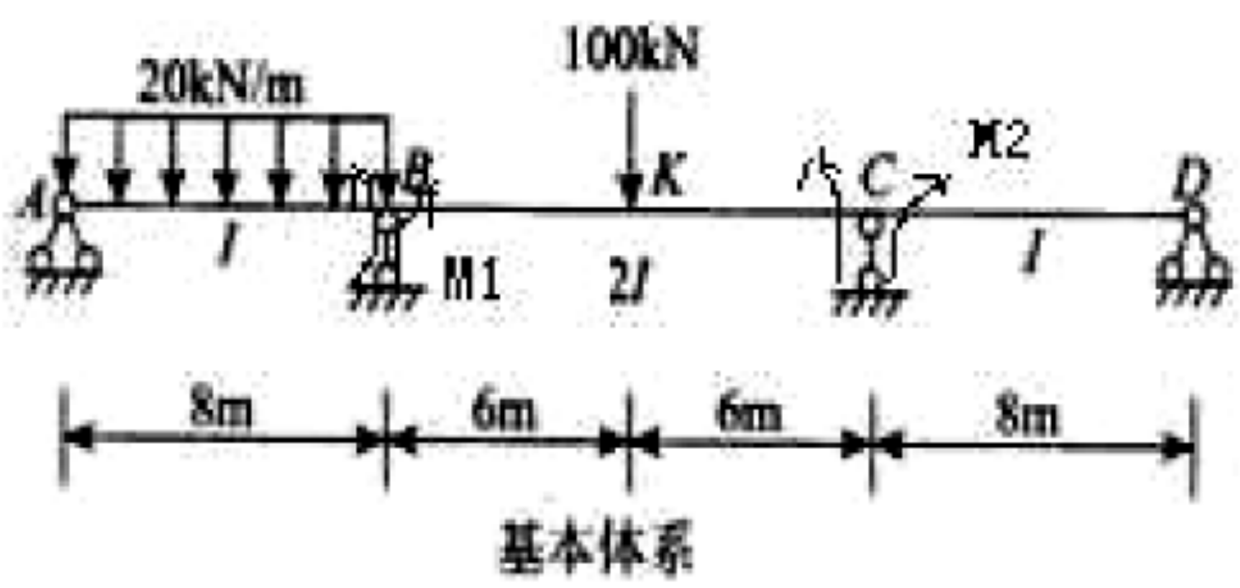


图 7-2-78（基本体系）

解：这是二次超静定结构，取基本体系如图 7-2-78 所示，多余反力为 X_1、X_2，作出单位力下的弯矩图$\overline{M}_1$、

$\bar{M}_2$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-79 所示。

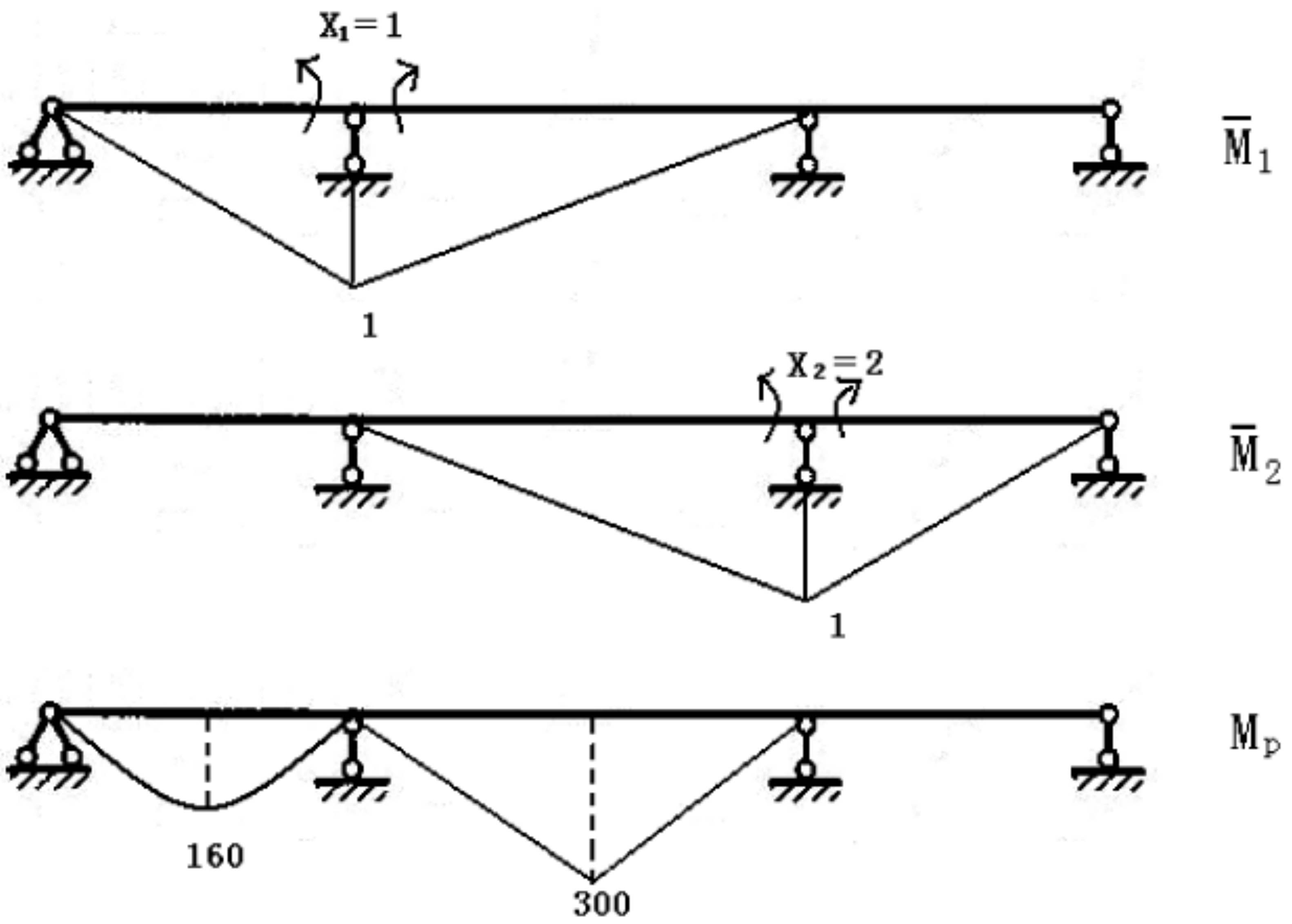


图 7-2-79

计算典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times8\times1\times\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times12\times1\times\frac{2}{3}\right]=\frac{14}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI},\delta_{22}=\frac{14}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{2630}{3EI},\quad \Delta_{2P}=\frac{1350}{3EI}$$

列出基本方程，计算 X_1、X_2 得

$$\begin{cases}\frac{14}{3}X_1+X_2+\frac{2630}{3}=0\\ X_1+\frac{14}{3}X_2+\frac{1350}{3}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}X_1=-175.2\ \text{kN}\cdot\text{m}\\ X_2=-58.9\ \text{kN}\cdot\text{m}\end{cases}$$

由 $M=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+M_P$，可得到最终弯矩图 M，易作出剪力图 Q，如图 7-2-80 所示。

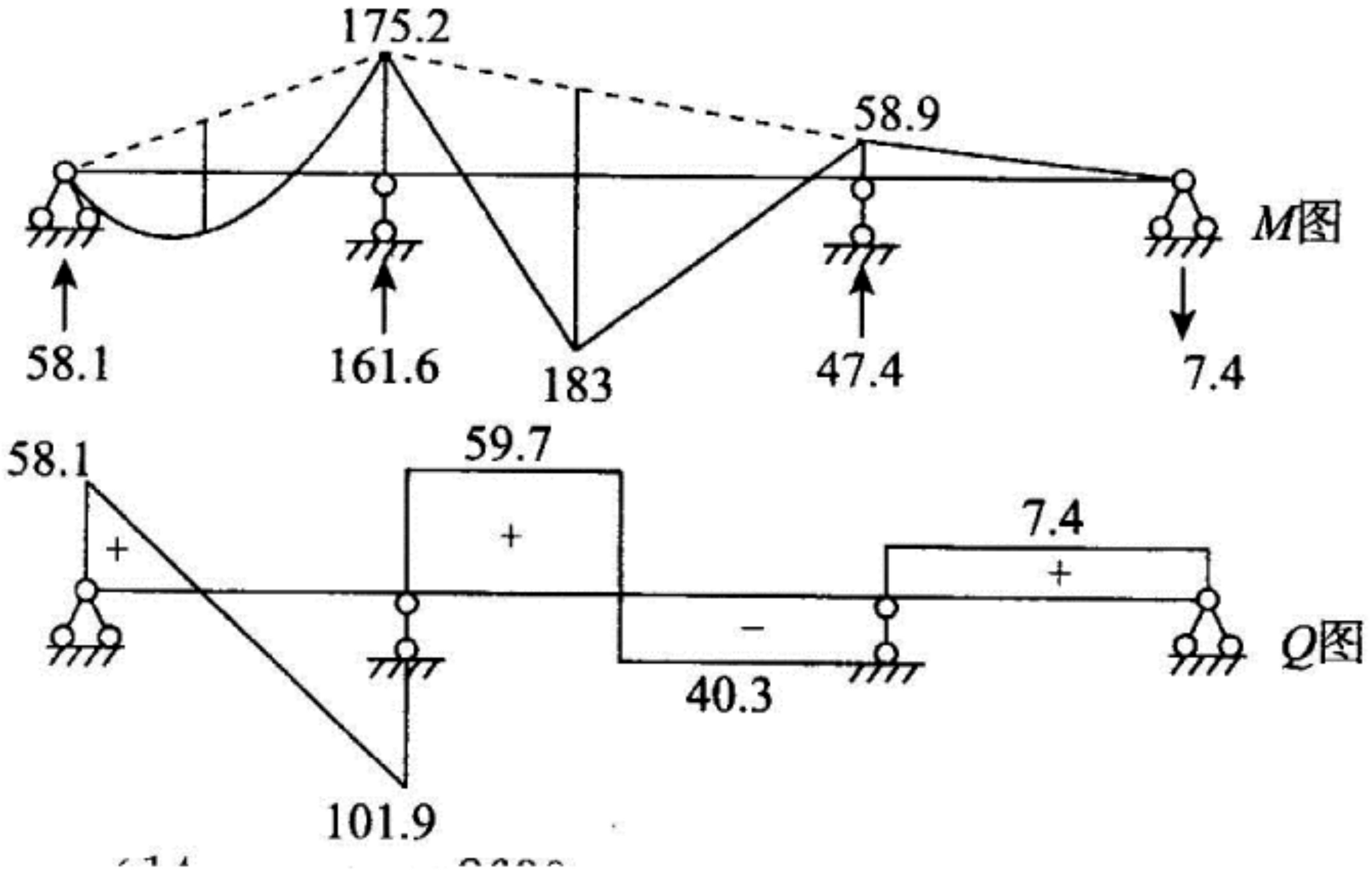


图 7-2-80

超静定结构与静定结构位移一致，故可按静定分析。在 D 点处施加竖向单位力和逆时针单位力偶，作出弯

矩图如图 7-2-81 所示。

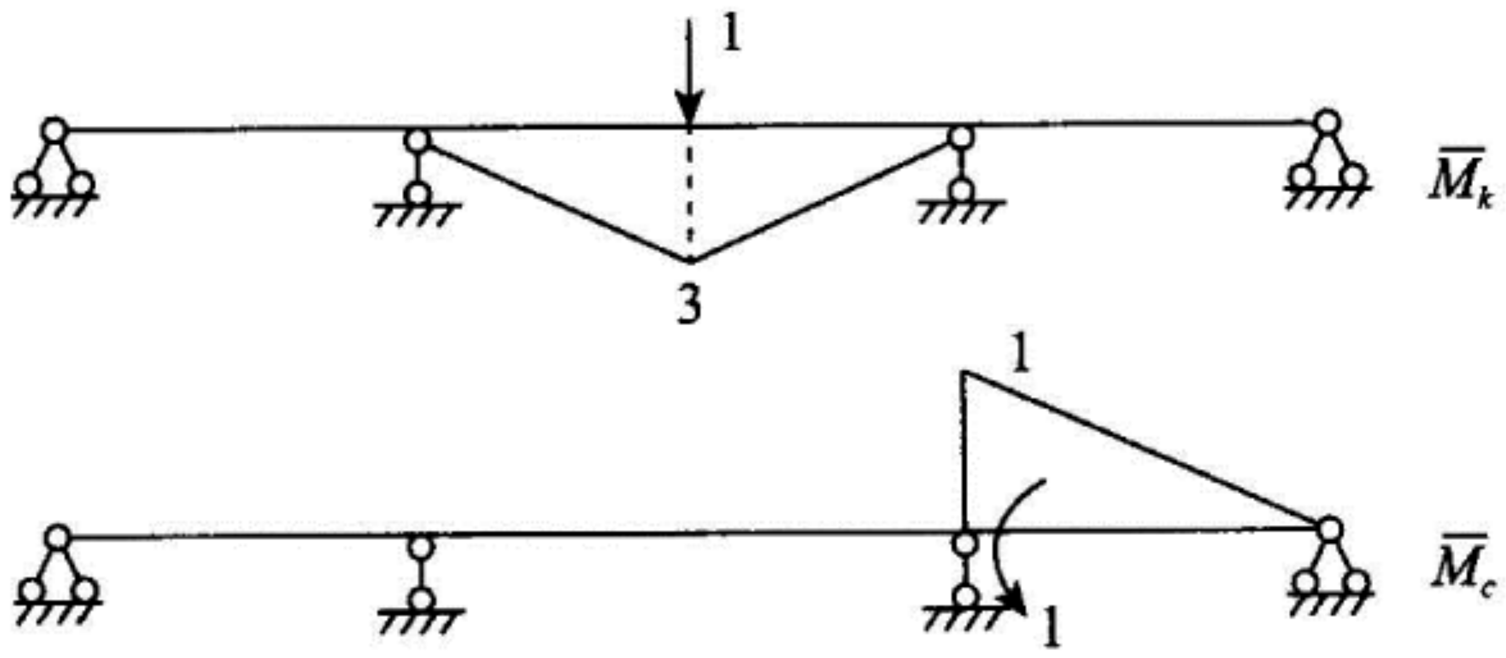


图 7-2-81

由图乘法计算位移得

$$\Delta_{kv}=\frac{1}{2EI}\left(-\frac{3\times12}{2}\times\frac{175.2+58.9}{2}+\frac{100\times12^3}{48}\right)=\frac{747}{EI}(\downarrow)$$

$$\varphi_C=\frac{1}{EI}\times\frac{58.9\times8}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{157}{EI}\text{（逆时针方向）}$$

7-23　试求题 7-7 中 D 点的竖向位移及铰 D 左右两截面的相对转角。

解：超静定体系某点位移与静定结构相同，故取任意一基本静定结构在 D 点施加竖向单位力和一对单位力偶，作出对应的弯矩图，与作出的超静定结构在原荷载作用下的弯矩图 M 进行图乘即可求得对应的位移，如图 7-2-82 所示。

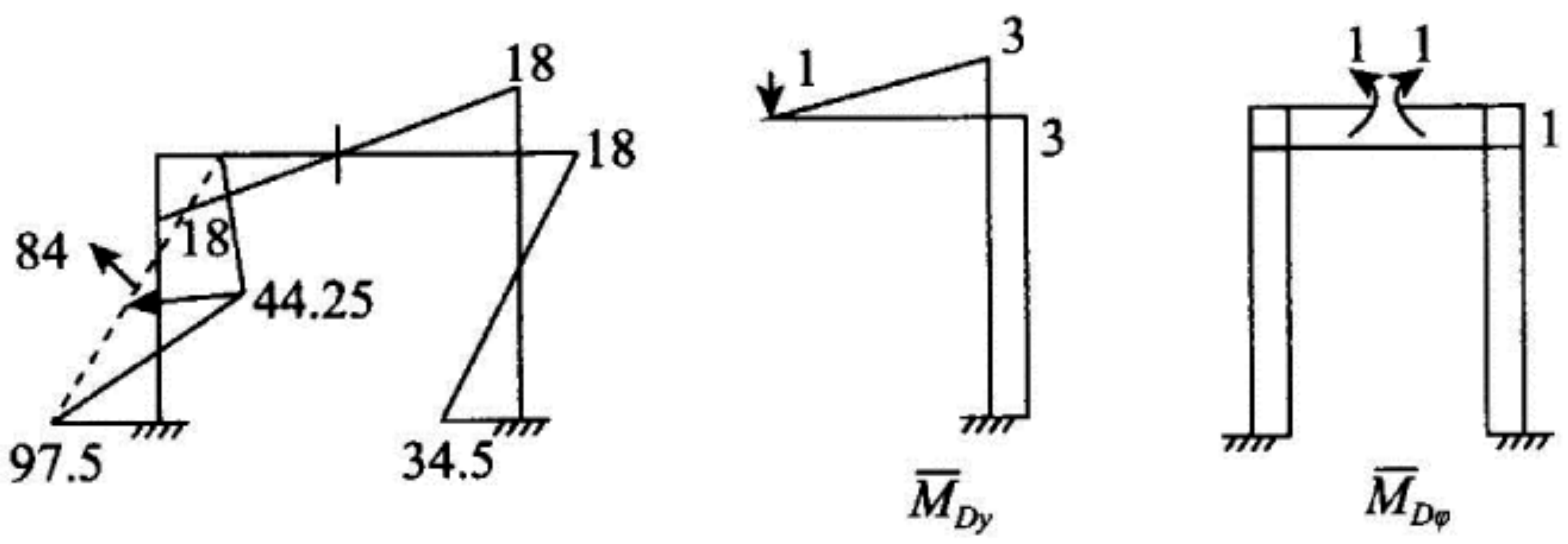


图 7-2-82

$$\Delta_{kv}=\frac{1}{EI}\left[\frac{18\times3}{2}\times2+3\times6\times\frac{(18-34.5)}{2}\right]=-94.5(\uparrow)$$

$$\Delta_{\varphi D}=\frac{1}{EI}\left(\frac{34.5\times6}{2}-\frac{97.5\times6}{2}+\frac{84\times6}{2}\right)=\frac{63}{EI}\text{（上方角度增大）}$$

7-24　试在题 7-2～7-22 中任选二、三题进行最后内力图的校核。

解：因为已求出 M 图且合力已知，可求出各杆剪力，从左至右对体系验算，以最后一个力为判别条件，若相等则题解正确。取 7-2、7-22 题进行验算，均正确。

7-25　试问图示各结构的弯矩图是否正确？

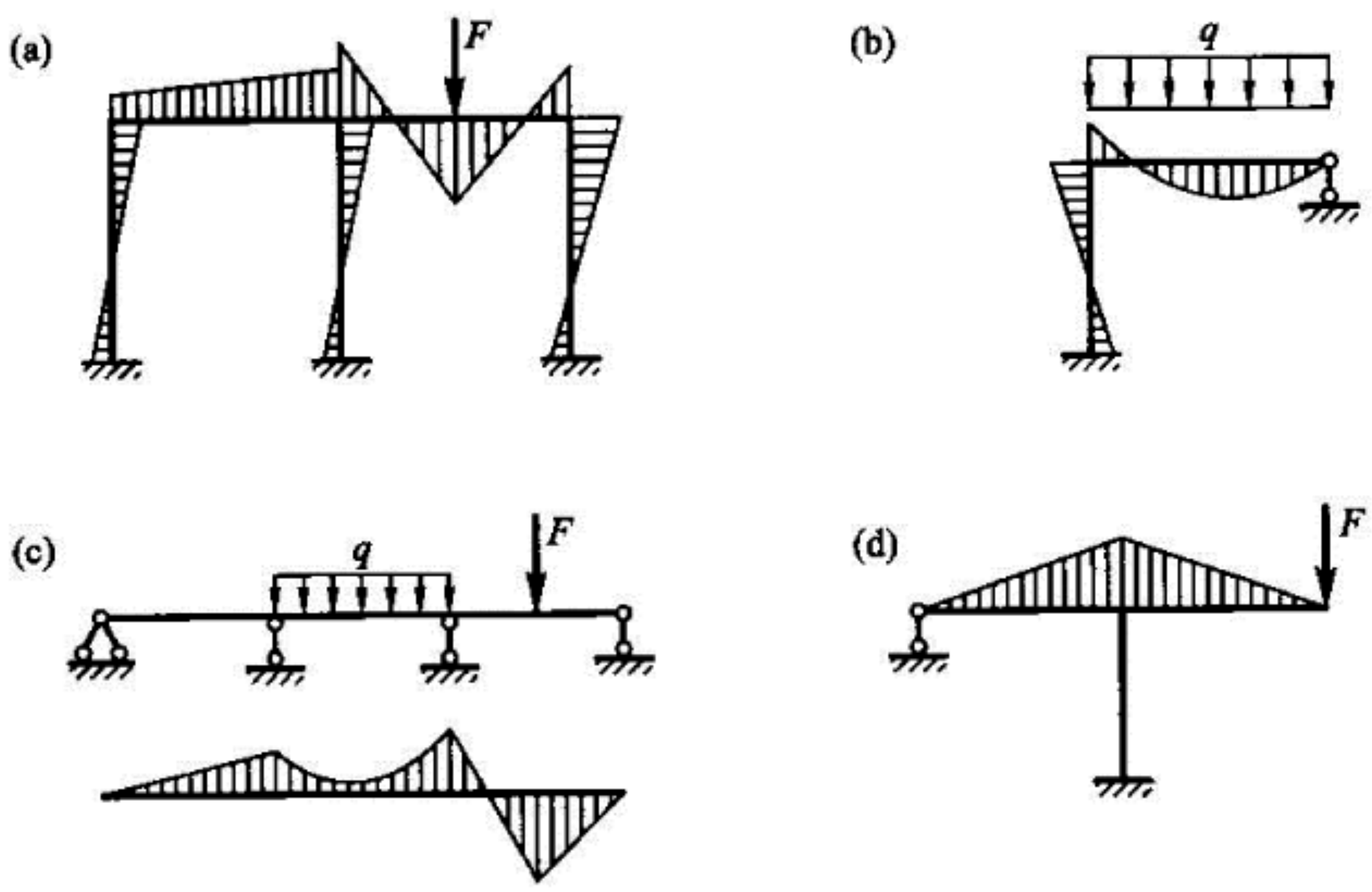


图 7-2-83（题 7-25）

答：（a）错误。因为左、中结点，∑M≠0；截断各柱取上部为隔离体，三柱剪力同向，∑X≠0，不满足平衡条件。

（b）错误。竖向柱有剪力，截断柱取上部分隔离体，∑X≠0，不满足平衡条件。

（c）错误。左起第二支座处相对转角为零，不能满足，即不能满足变形协调条件。

（d）错误。左支座处竖向位移为零条件，不能满足，即不能满足变形协调条件。

7-26　结构的温度改变如图所示，EI 常数，截面对称于形心轴，其高度 $h=l/10$，材料的线膨胀系数为 α。试：（a）作 M 图；（b）求杆端 A 的角位移。

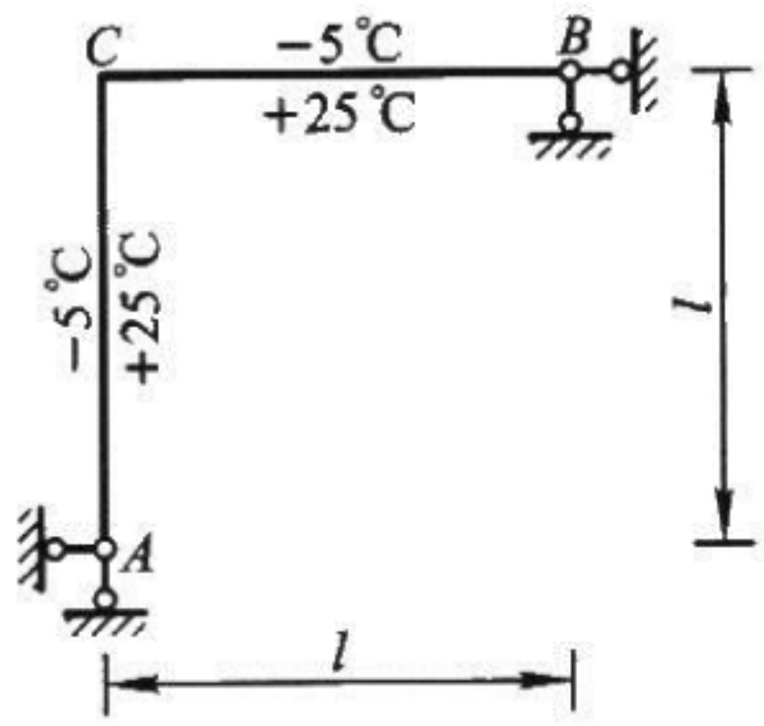


图 7-2-84（题 7-26）

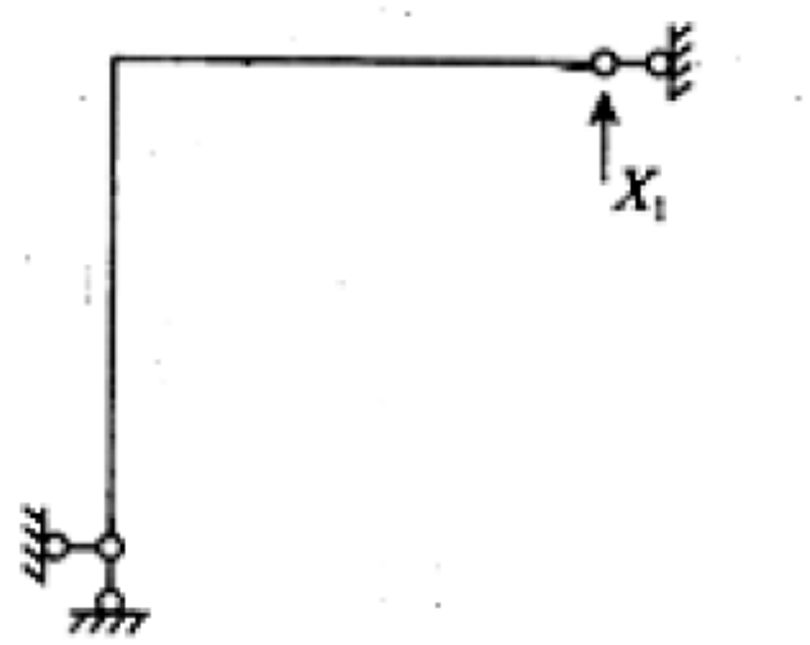


图 7-2-85（基本体系）

解：（a）作 M 图

取基本体系，多余未知力 X_1，作出单位力下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 并计算出轴力 N，如图 7-2-86（a）所示。此体系是由温度引起的，计算 Δ_{1t}。计算步骤如下：

$$\delta_{11}=\frac{2l^3}{3EI},\Delta_{1t}=\alpha(\frac{25-5}{2}\times 2l)+\alpha\frac{25+5}{h}\times 2\times\frac{l^2}{2}=20\alpha l+300\alpha l=320\alpha l$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=-\frac{480\alpha EI}{l^2}$$

可根据叠加绘出最后的弯矩图 M，如图 7-2-86（b）所示。

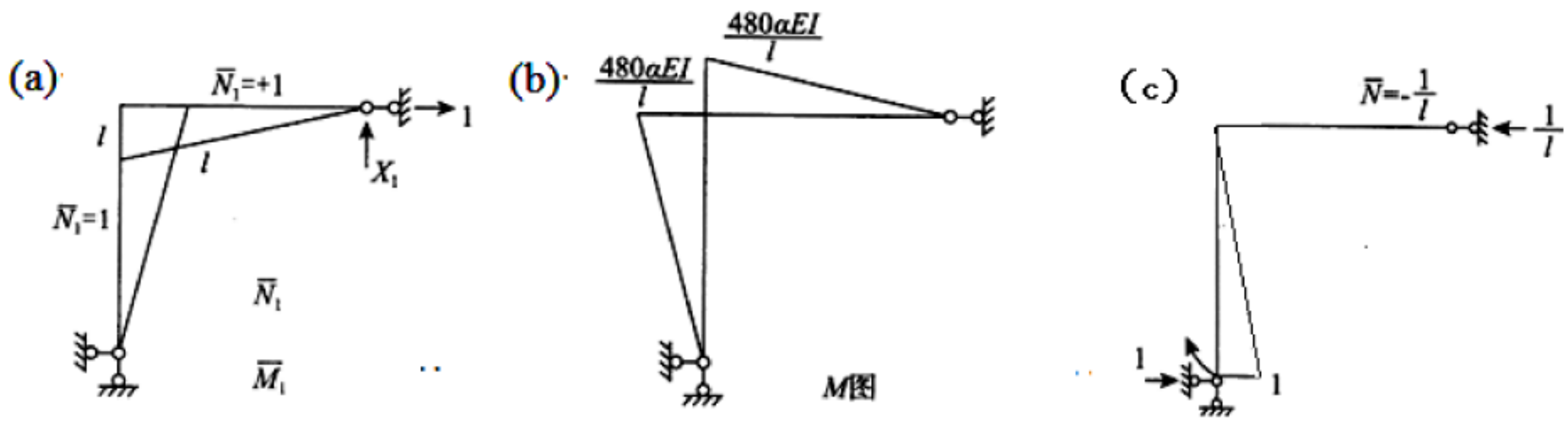


图 7-2-86

（b）杆端 A 的角位移

在 A 端施加单位力偶，计算出结构的弯矩和轴力，如图 7-2-86（c）所示。

$$\varphi_A=\frac{1\times 480\alpha EI}{EI\times 2l}l\times\frac{1}{3}+\alpha\times\frac{25-5}{2}\left(-\frac{1}{l}\right)\times l+\alpha\cdot\frac{25-(-5)}{h}\cdot\frac{l}{2}$$
$$=-80\alpha-10\alpha+160\alpha=60\alpha\text{（顺时针）}$$

7-27　图示连续梁为一工字钢制成，温度变化为 $t_1=20℃$，$t_2=0℃$，钢的 $\alpha=1\times 10^{-5}℃^{-1}$，$E=210GPa$。试求梁内最大正应力；并讨论若加大工字钢号码能否达到降低应力的目的？

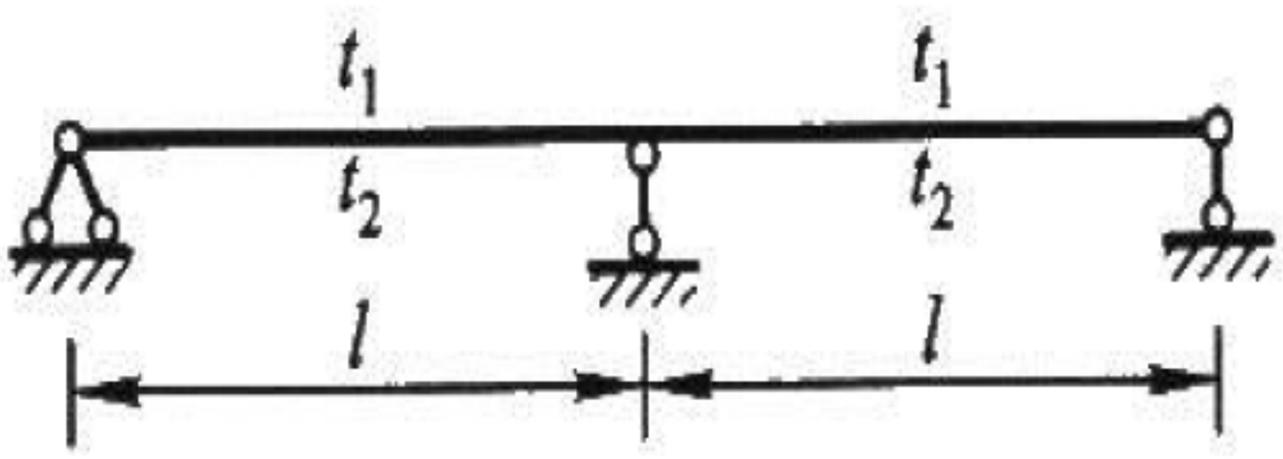


图 7-2-87（题 7-27）

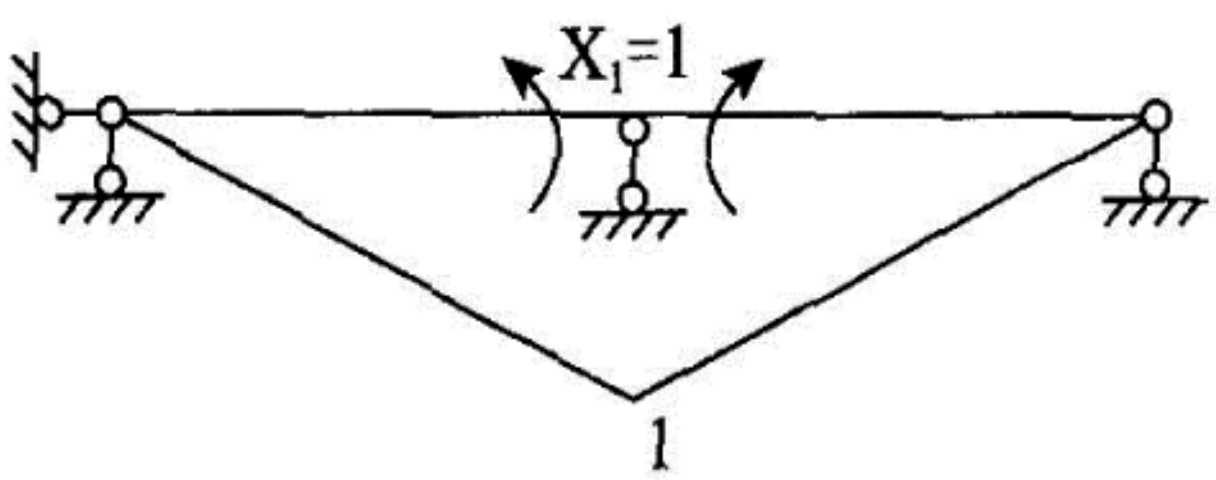


图 7-2-88

解：这是一次超静定结构，取基本体系，中间组合节点用未知量 X_1 代替弯矩变成铰节点，如图 7-2-88 所示。求解该超静定结构，步骤如下

$$\delta_{11}=\frac{2l}{3EI},\quad \Delta_{1t}=\frac{\alpha(t_2-t_1)}{h}\times 2\times\frac{1\times l}{2}=-20\frac{\alpha l}{h}$$

$$x_1=-\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}}=30\frac{\alpha EI}{h}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{30\sigma EI/h}{\frac{I}{h/2}} = 15\alpha E = 31.5MPa$$

显然σ_{max}与 I、h 无关，加大工字钢号码σ_{max}不变。

7-28　图示桁架各杆 EA 均相同，其中 AB 杆制作时较设计长度短了 Δ。现将其拉伸（设受力在线弹性范围内）拼装于桁架上，试求拼装后该杆的长度。

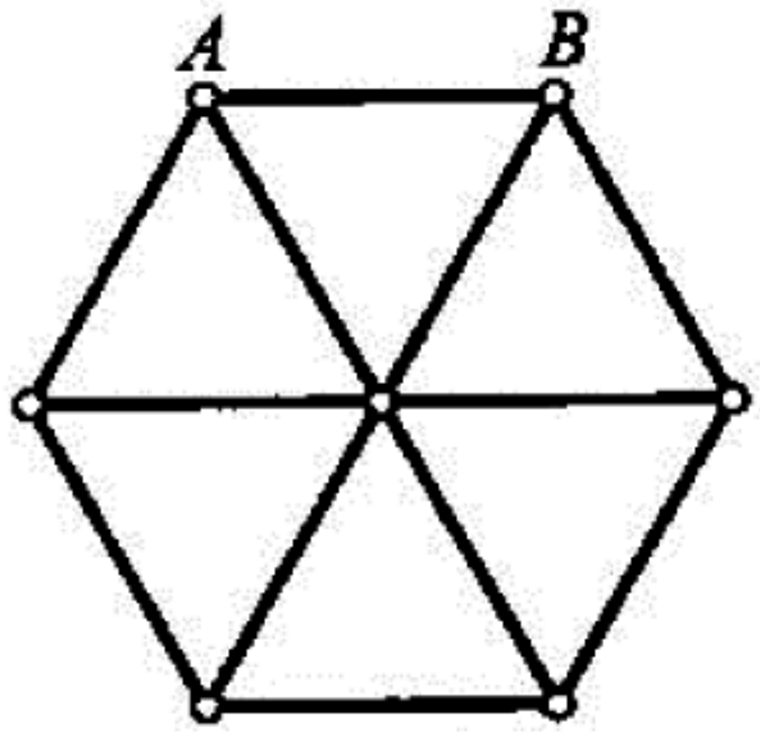


图 7-2-89（题 7-28）

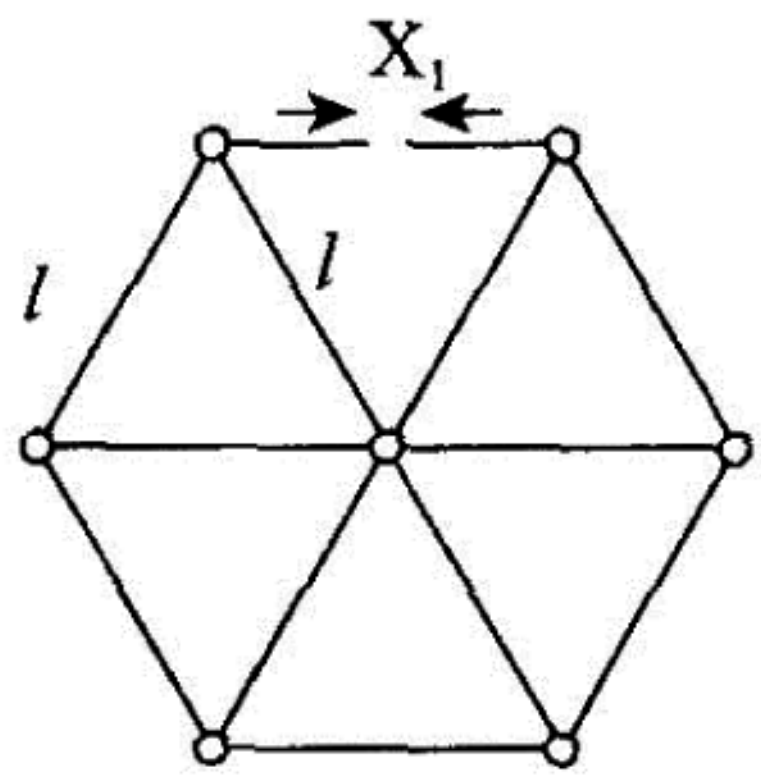


图 7-2-90

解：这是一次超静定结构，取基本体系如图 7-2-90 所示，未知力为 X_1。

计算典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11} = \frac{12l}{EA}$$

$$\Delta_{1\Delta} = \sum N_1 \Delta l = -\Delta$$

代入典型方程

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

计算得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{EA\Delta}{12l}(\text{拉力})$$

进一步算得 AB 杆的长度如下

$$l_{AB} = l - \Delta + \frac{X_1 l}{EA} = l - \Delta + \frac{EA\Delta}{12l}\frac{l}{EA} = l - \frac{11}{12}\Delta$$

7-29　梁的支座发生位移如图所示，试以两种不同的基本体系进行计算绘制 M 图。

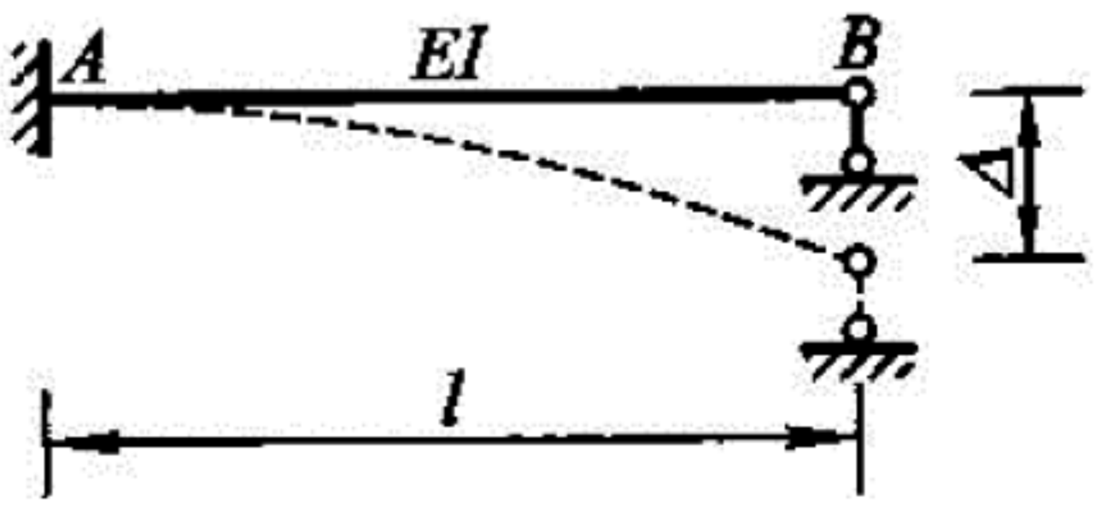


图 7-2-91（题 7-29）

解：基本体系 I，如图 7-2-92 所示。

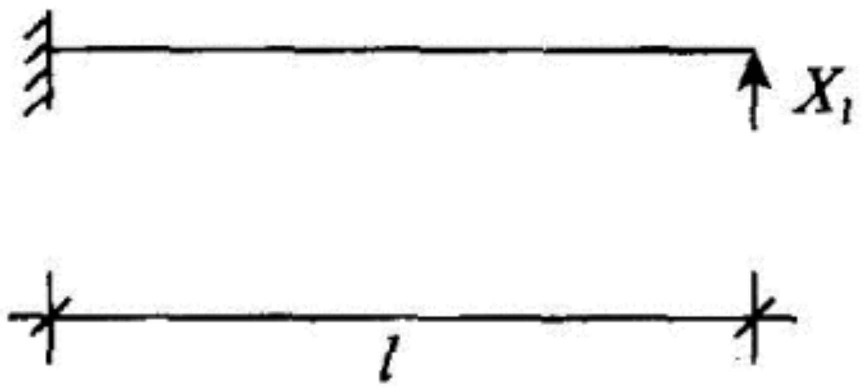


图 7-2-92

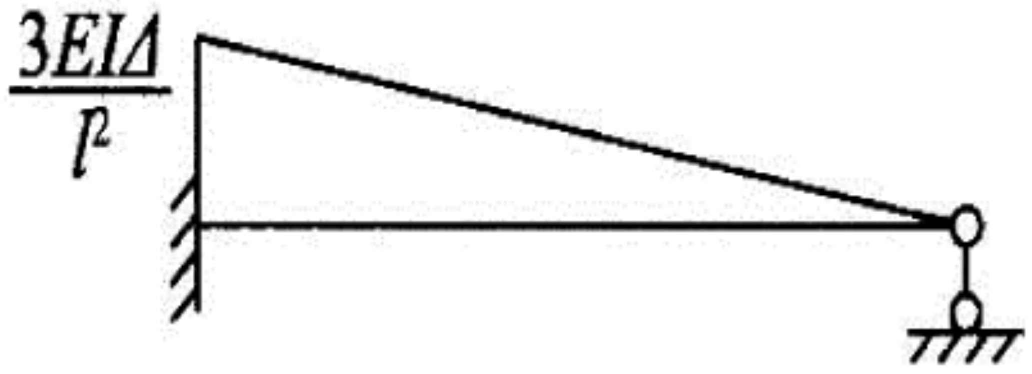


图 7-2-93

力法计算的具体步骤如下

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1\Delta}=-\Delta$$

$$\frac{l^3}{3EI}x_1+0=-\Delta$$

$$x_1=-\frac{3EI\Delta}{l^3}$$

故由 $M=\overline{M}_1X_1+M_P$，可得出最后的弯矩图 M，如图 7-2-93 所示。

基本体系 II，如图 7-2-94 所示，

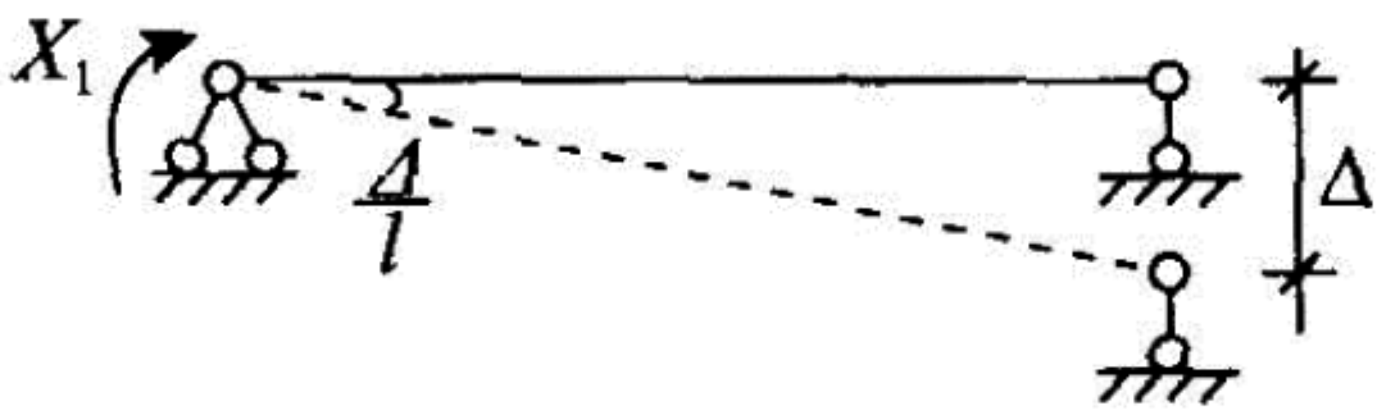


图 7-2-94

力法计算的具体步骤如下

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1\Delta}=0$$

$$\frac{l}{3EI}x_1+\frac{\Delta}{l}=0$$

$$x_1=-\frac{3EI\Delta}{l^2}$$

同理，可作出最后的弯矩图 M，如图 7-2-93 所示

7-30　图示结构的支座 B 发生了水平位移 α=30mm（向右），6=40mm（向下），ϕ：0.01rad，已知各杆的

$I=6400cm^4$，E＝210GPa。试：（a）作 M 图；（b）求 D 点竖向位移及 F 点水平位移。

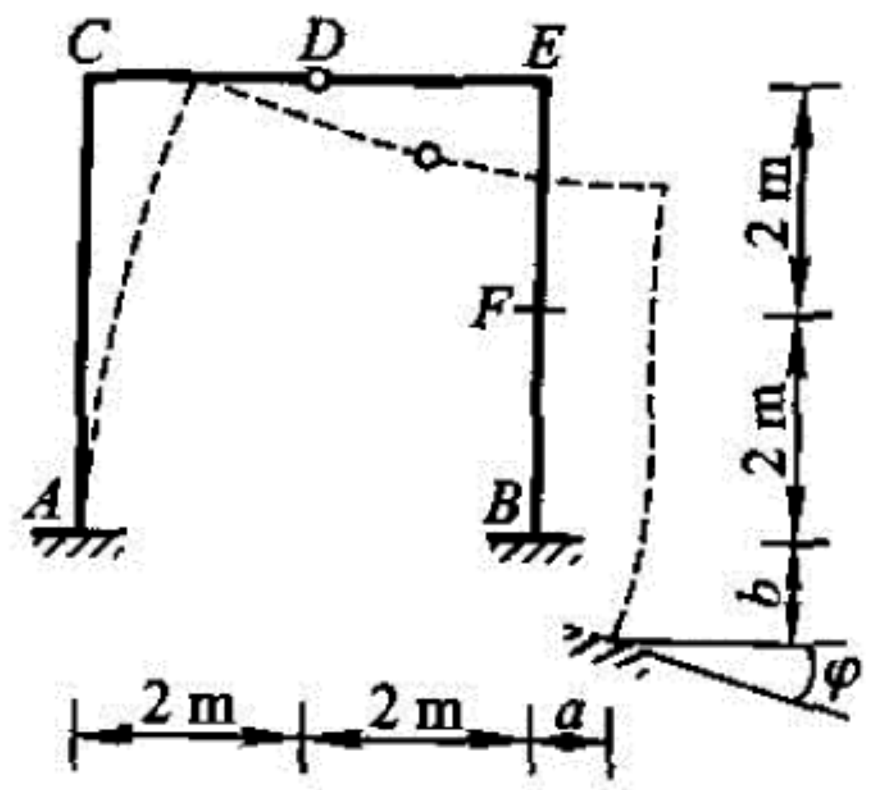


图 7-2-95（题 7-30）

解：（a）作 M 图

这是二次超静定结构，取基本体系，两个未知力 X_1，X_2，作出单位力下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-96（a）、（b）所示。具体计算过程如下

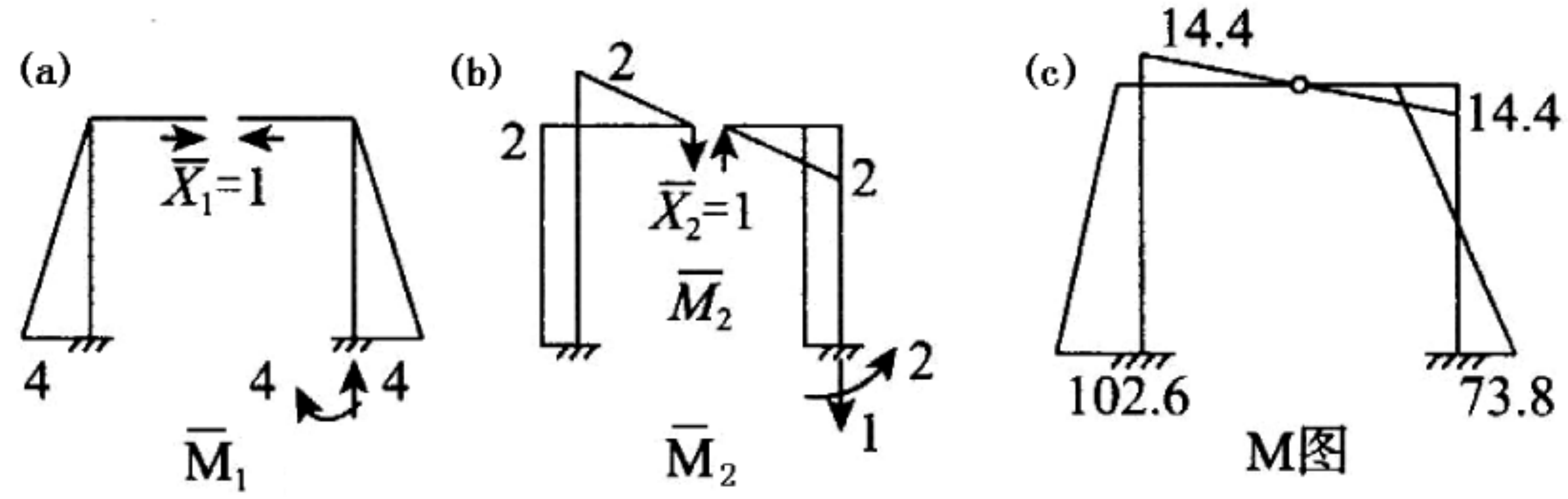


图 7-2-96

$$EI=210\times10^9\times10^{-3}\times6400\times10^{-8}=13440\ kN\cdot m^2$$

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{2}{3}\times4\right)=\frac{128}{3EI}$$

$$\delta_{11}=\delta_{12}=0,\quad \delta_{22}=\frac{112}{3EI}$$

$$\Delta_{1\Delta}=-(1\times0.03+4\times0.01)=-0.07m$$

$$\Delta_{2\Delta}=-(1\times0.04-2\times0.01)=-0.02m$$

$$x_1=\frac{0.07\times3\times13440}{128}=22.05kN$$

$$x_2=\frac{0.02\times3\times13440}{112}=7.20kN$$

由 $M=\bar{M}_1X_1+\bar{M}_2X_2+M_P$，可得到最终弯矩图 M，如图 7-2-96（c）所示。

（b）D 点竖向位移及 F 点水平位移

为求 D 点竖向位移和 F 点水平位移，分别在基础结构得出 D 点和 F 点施加竖向单位力和水平单位力，作出对应弯矩图如图 7-2-97 所示，利用图乘法求解位移如下

$$\triangle_{Dy}=\frac{1}{13440}\left[\frac{14.4\times2}{2}\times\frac{2\times2}{3}+\frac{(14.4+102.6)\times4}{2}\times2\right]$$

$$=36.25\times10^{-3}\text{m}\ (\downarrow)$$

$$\triangle_{Fx}=\frac{1}{13440}\left[\frac{2\times2}{2}\times\left(-\frac{5}{6}\times73.8+\frac{14.4}{6}\right)\right]-(-1\times0.03-2\times0.01)=41.2\times10^{-3}\text{m}(\rightarrow)$$



图 7-2-97

7-31 图示连续梁为 28a 工字钢，I＝7114cm^4，E＝210GPa，l＝10m，F＝50kN。若欲使梁内最大正、负弯矩的绝对值相等，试问应将中间支座升高或降低若干？

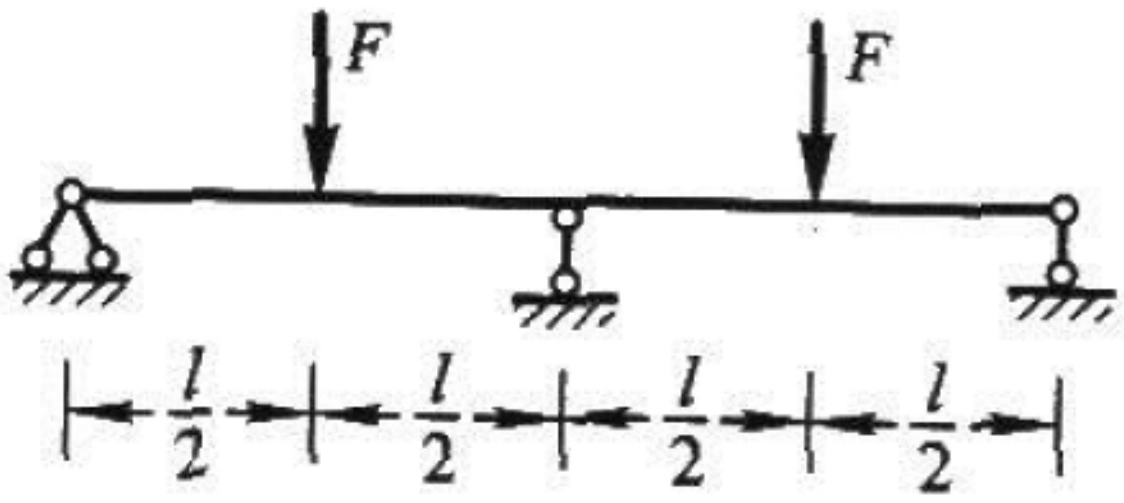


图 7-2-98（题 7-31）

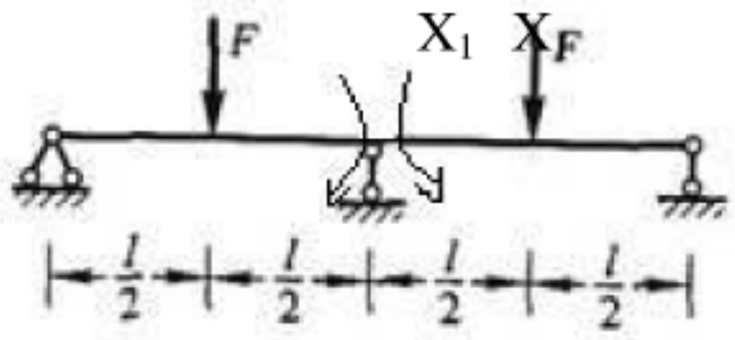


图 7-2-99（基本体系）

解：这是一次超静定结构，基本体系如图 7-2-99 所示，未知力 X_1，作出单位力下的弯矩图和原荷载下的弯矩图，如图 7-2-100 所示。

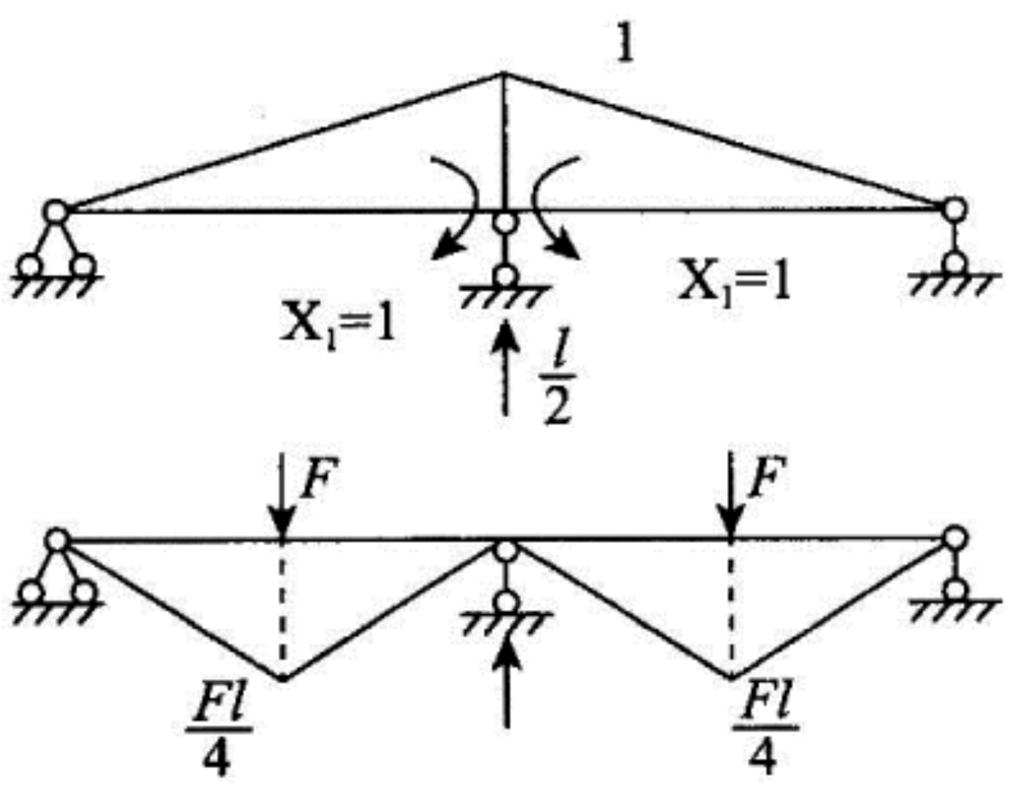


图 7-2-100

力法求解典型方程为

$$\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}+\Delta_{1\Delta}=0$$

即

$$\frac{2l}{3EI}X_1-\frac{Pl^2}{8EI}+\frac{2\Delta}{l}=0$$

由题意 $X_1=\frac{Fl}{4}-\frac{X_1}{2}$，得 $X_1=\frac{Fl}{6}$

代入力法典型方程，算得支座位移如下

$$\Delta=\frac{Fl^3}{144EI}=\frac{50\times10^3\times10^3}{144\times210\times10^9\times7144\times10^{-8}}=23.2\times10^{-3}\,\text{m}\downarrow$$

7-32　图 7-2-101（a）为一带拉杆的刚架。拉杆上装有带正反螺纹的花篮螺栓（图 b），转动螺母可以改变拉杆长度以调整结构的内力。横梁、立柱均为 20b 工字钢，I＝2500cm，拉杆为圆钢，材料的 E＝210GPa，容许应力[σ]＝160MPa。若欲使刚架的最大正、负弯矩的绝对值相等，试设计拉杆直径 d 并确定螺栓调整量Δ。

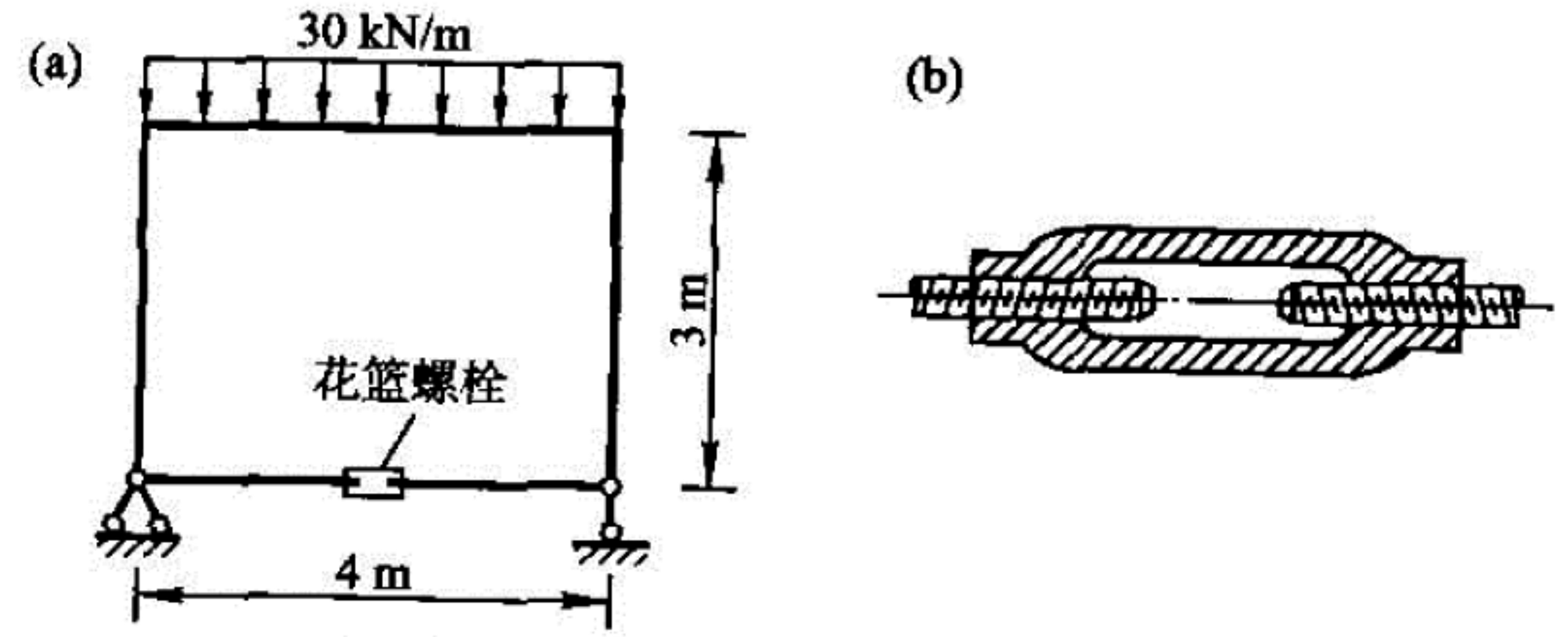


图 7-2-101（题 7-32）

解：此题虽为一次超静定结构，但有 X_1、A 以及Δ三个未知量，作出单位力和原荷载作用下的弯矩图如图 7-2-102（a）、（b）所示。

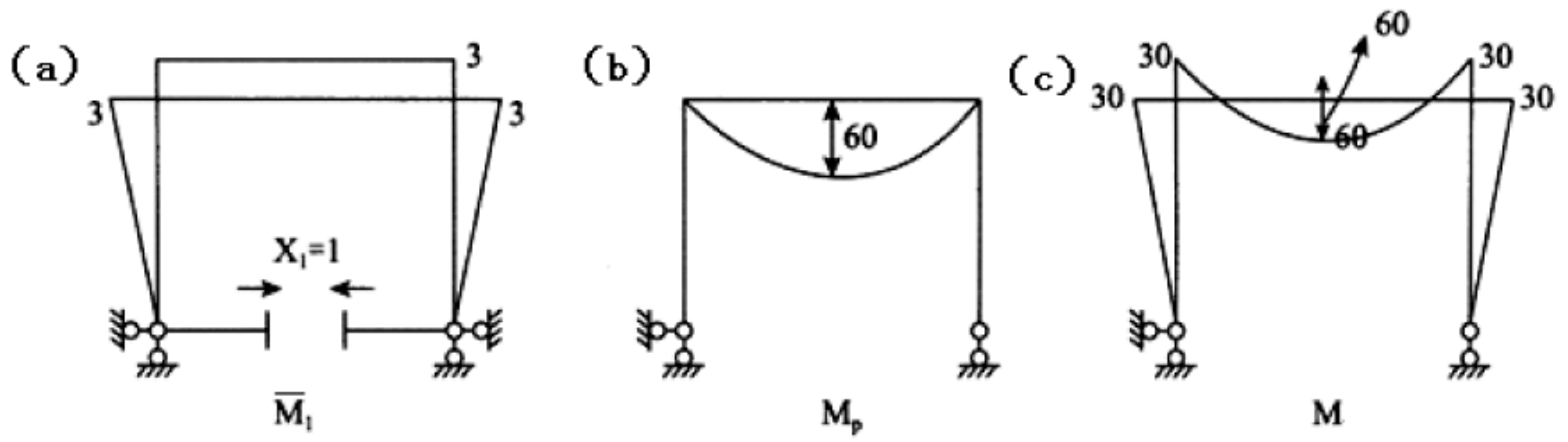


图 7-2-102

由正负弯矩绝对值相等有 $3X_1=30$，得 $X_1=10$kN。

根据 $M=\bar{M}_1X_1+M_p$，可绘制出弯矩图 M，如图 7-2-102（c）所示。

由

$$A\geqslant\frac{X_1}{[\sigma]}=\frac{10\times10^3}{160\times10^6}=62.5\times10^{-6}\ \text{m}^2=62.5\ \text{mm}^2$$

可选拉杆直 d＝10mm，A＝78.5mm^2。

由力法典型方程 $\delta_{11}x_1+\Delta_{1P}+\Delta=0$，可算得螺栓调整量如下

$$\left(\frac{54}{EI}+\frac{4}{EA}\right)X_1-\frac{480\times10^3}{EI}+\Delta=0$$

$$\Delta=\frac{1}{EI}\left[480-\left(54+4\frac{I}{A}\right)X_1\right]$$

$$=\frac{480-\left(54+4\times\frac{2500\times10^{-6}}{78.54\times10^{-6}}\right)\times10\times10^3}{210\times10^9\times2500\times10^{-8}}$$

$$=-0.01385\ \text{m(缩放)}$$

7-33　试作图示梁的 M 图，并求 c 点竖向位移。已知 EI＝常数，弹性支座的刚度系数 k＝EI/l^3。

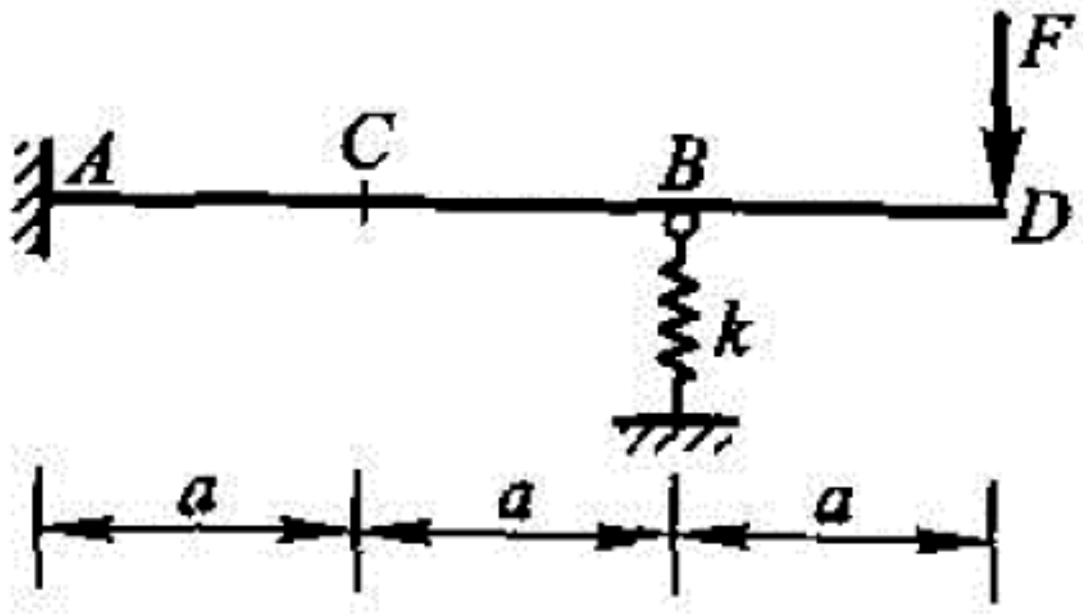


图 7-2-103（题 7-33）

解：此题为一次超静定结构，基本体系为用未知力 X_1 代替弹簧支座，作出单位力下的弯矩图 $\bar{M}_1$ 和原荷载下的弯矩图 M_P，如图 7-2-104（a)、（b）所示。

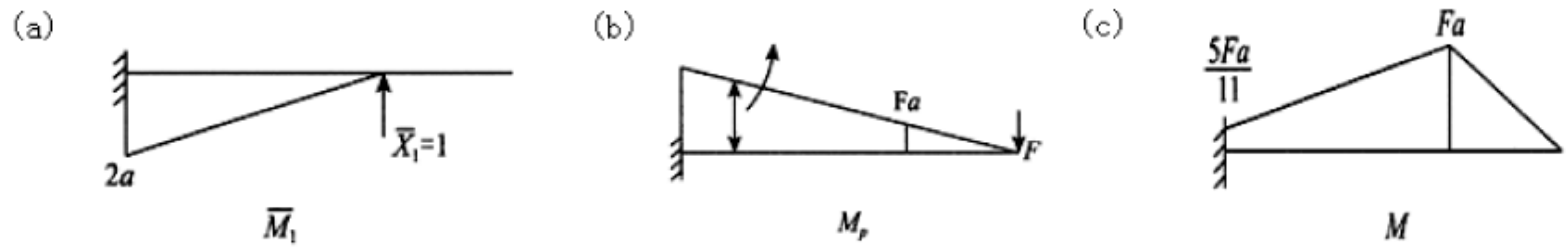


图 7-2-104

首先用力法求解该超静定结构，计算得到典型方程的系数和自由项

$$\delta_{11}=\frac{8a^3}{3EI},\quad \Delta_{1P}=-\frac{14Fa^3}{3EI}$$

代入典型方程求解得到

$$x_1=\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}+\dfrac{1}{k}}=\frac{14}{11}F$$

最终弯矩图 M 如图 7-2-104（c）所示，在基本结构的 C 点施加单位力，作出弯矩图，如图 7-2-105 所示，采用图乘法算位移得

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\frac{a^2}{2}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5Fa}{11}+\frac{Fa}{6}\right)=\frac{3}{11}\frac{Fa^3}{EI}\ (\downarrow)$$

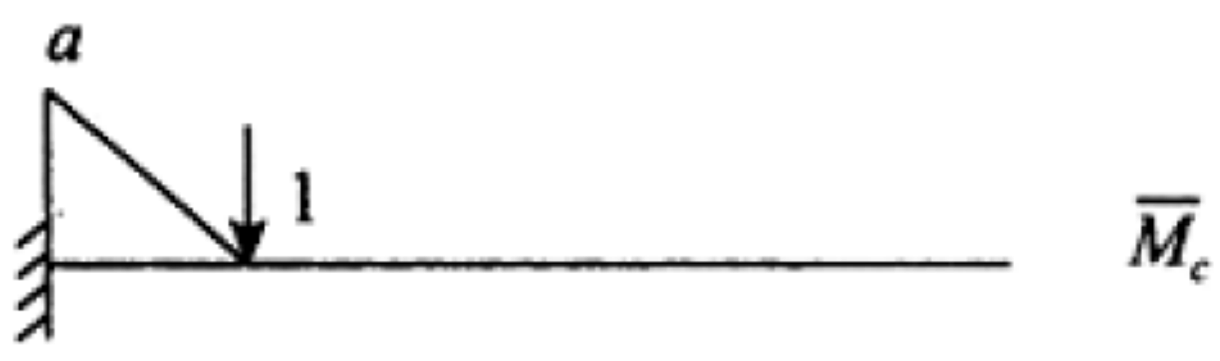


图 7-2-105

7-34　图示刚架 EI＝常数，两弹性支座刚度系数为 $k=3EI/l^3$。试绘制其弯矩图。

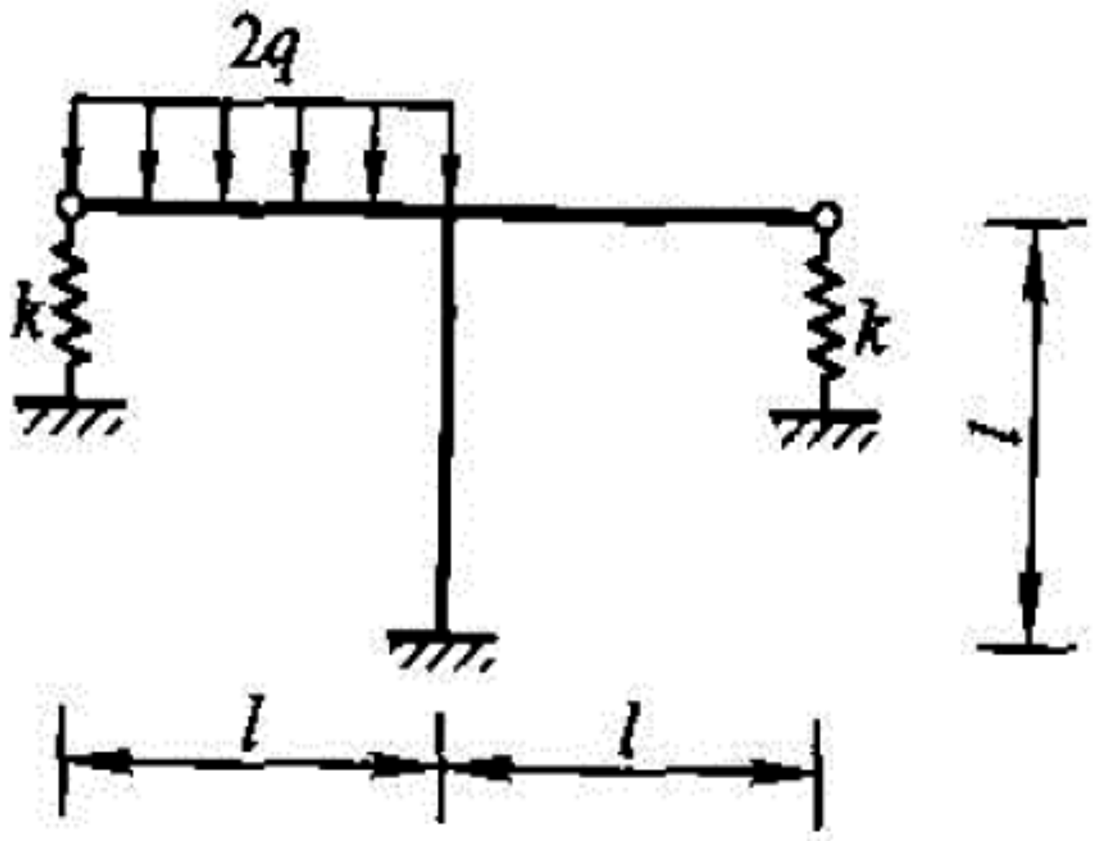


图 7-2-106（题 7-34）

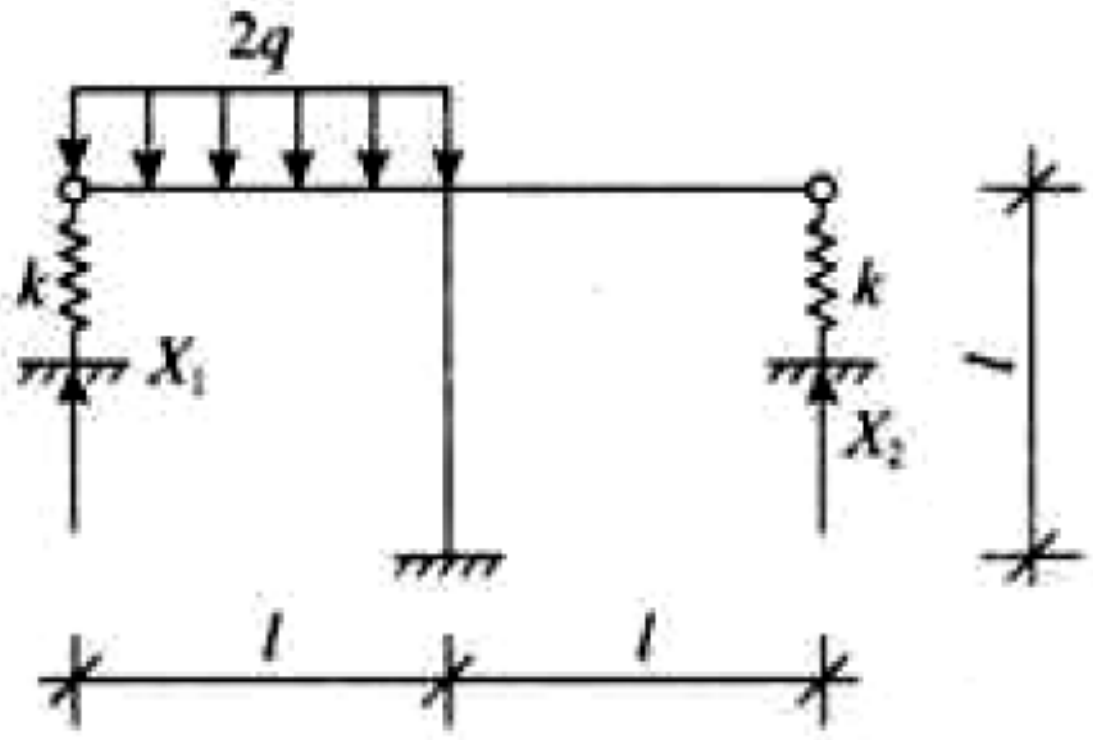


图 7-2-107（基本体系）

解：这是二次超静定结构，取基本体系如图 7-2-107 所示，两个未知力 X_1、X_2，作出单位力下的弯矩图 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 和原荷载作用下的弯矩图 M_P，如图 7-2-108 所示。具体计算过程如下

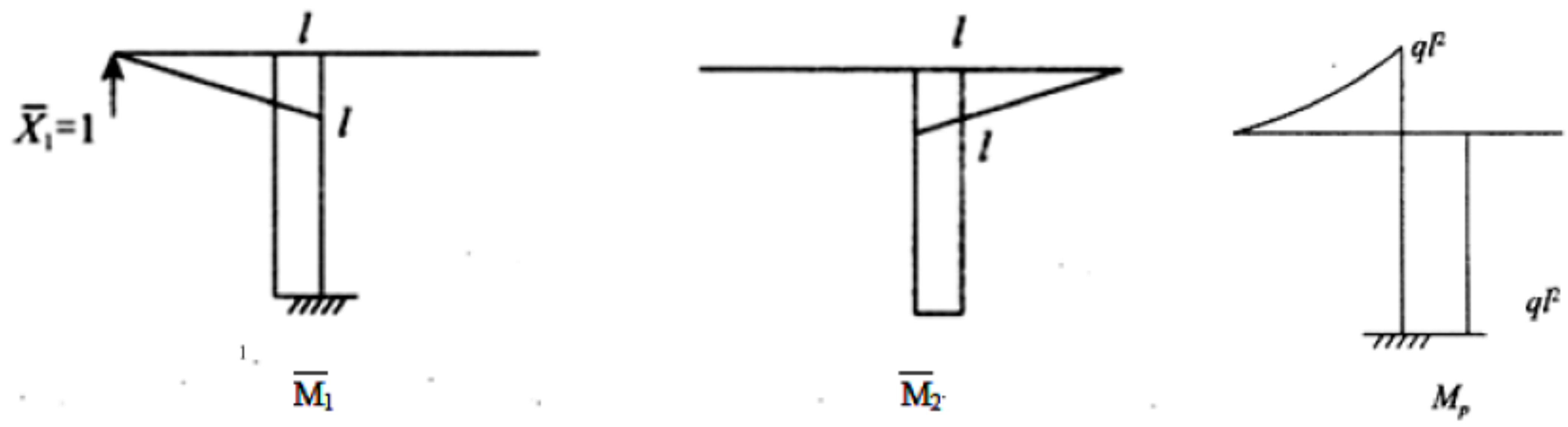


图 7-2-108

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{4l^3}{3EI},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{l^3}{EI},\quad \Delta_{1P}=-\frac{5ql^4}{4EI},\quad \Delta_{2P}=\frac{ql^4}{EI},$$

代入基本方程 $\begin{cases}\frac{4}{3}x_1-x_2-\frac{5}{4}ql=-\frac{x_1}{3}\\ -x_1+\frac{4}{3}x_2+ql=-\frac{x_2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{39}{64}ql(\uparrow)\\ x_2=\frac{15}{64}ql(\downarrow)\end{cases}$

根据 $M=\bar{M}_1x_1+\bar{M}_2x_2+M_P$，画出最终弯矩图 M，如图 7-2-109 所示。

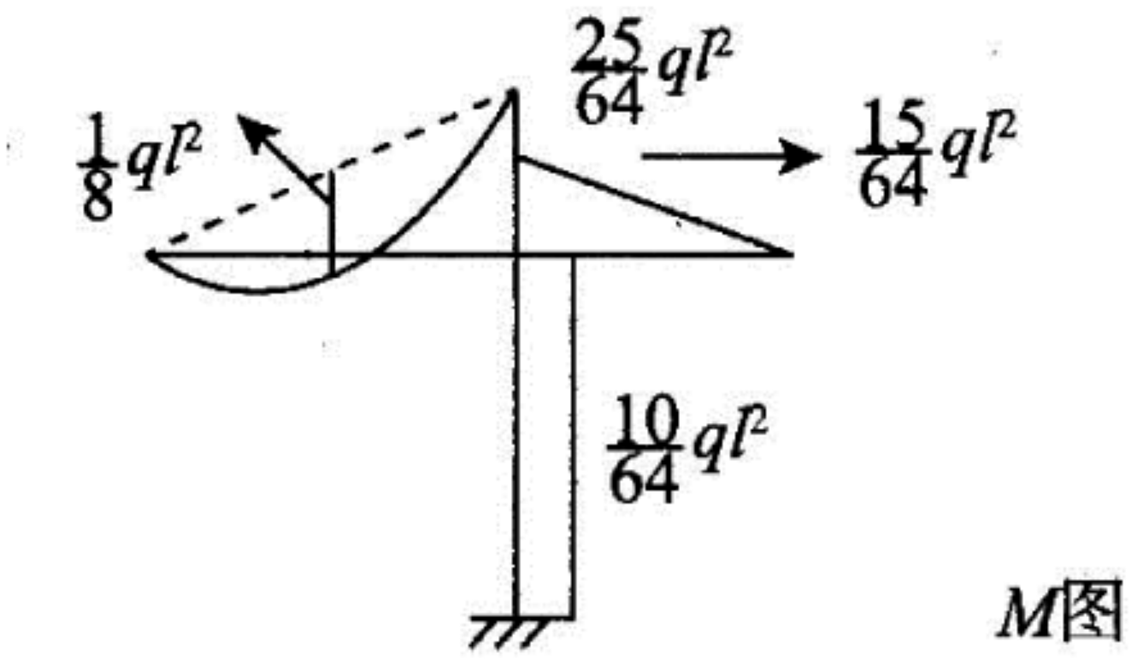


图 7-2-109

7-35　试用积分法计算图示等截面半圆无铰拱的内力。

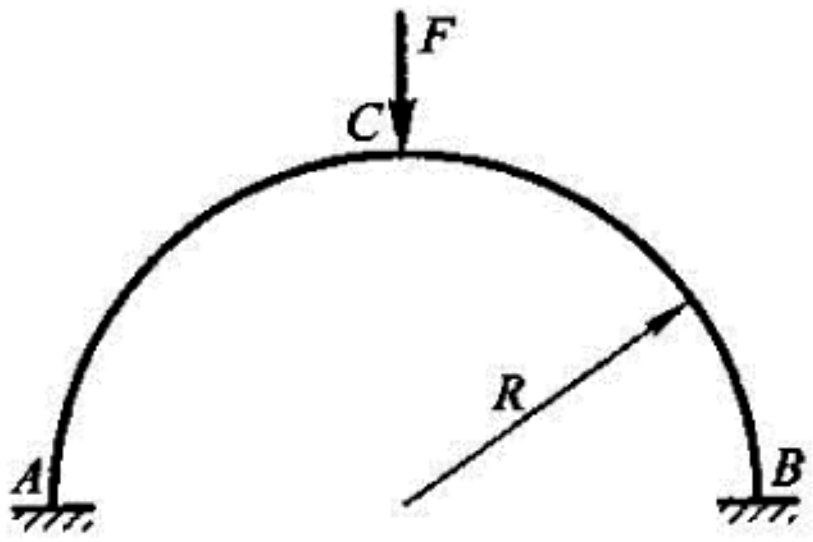


图 7-2-110（题 7-35）

解：根据弹性中心法求解，具体过程如下

$$y_s=\int g_1\frac{\frac{ds}{EI}}{\int\frac{1}{EI}ds}=\frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(1-\sin\varphi)Rd\varphi}{\int_{ds}}=\frac{2R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{\pi R}=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R$$

$$y=y_1-y_s=R(1-\sin\varphi)-\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R=\left(\frac{2}{\pi}-\sin\varphi\right)R$$

$$M_P=-\frac{F}{2}R\cos\varphi,EI\delta_{11}=\int ds=\pi R$$

$$EI\delta_{12}=\int y^2ds=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}-\sin\varphi\right)^2R^2R\,d\varphi=2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}\sin\phi+\sin^2\phi\right)d\phi$$

$$=2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{4}{\pi}+\frac{2}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)R^3$$

$$EI\Delta_{1P}=\int M_Pds=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{F}{2}R\cos\varphi Rd\varphi=-FR^2$$

$$EI\Delta_{2P}=\int yM_Pds=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}-\sin\varphi\right)R\left(-\frac{F}{2}R\cos\varphi\right)Rd\varphi$$

$$=-FR^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$=-FR^3\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)$$

由力法基本方程解得

$$X_1=\frac{FR}{\pi}=0.3138FR,X_2=\frac{4-\pi}{\pi^2-8}F=0.4591F$$

$$M=\frac{FR}{\pi}+\frac{4-\pi}{\pi^2-8}F\left(\frac{2}{\pi}-\sin\varphi\right)R-\frac{FR}{2}\cos\varphi$$
$$=FR(0.6106-0.4591\sin\varphi)=0$$

当

$$\frac{dM}{d\phi}=FR(-0.4591\cos\phi+0.5\sin\phi)=0,$$

有

$$\tan\varphi=\frac{0.4591}{0.5}=0.9182$$

此时 $M_{min}=0.0682FR$。

推算得到剪力 Q 和轴力 N 的表达式并画出内力图 7-2-111 所示。

$$Q=0.4591F\cos\varphi-0.5F\sin\varphi, N=0.4591F\sin\varphi+0.5F\cos\varphi$$

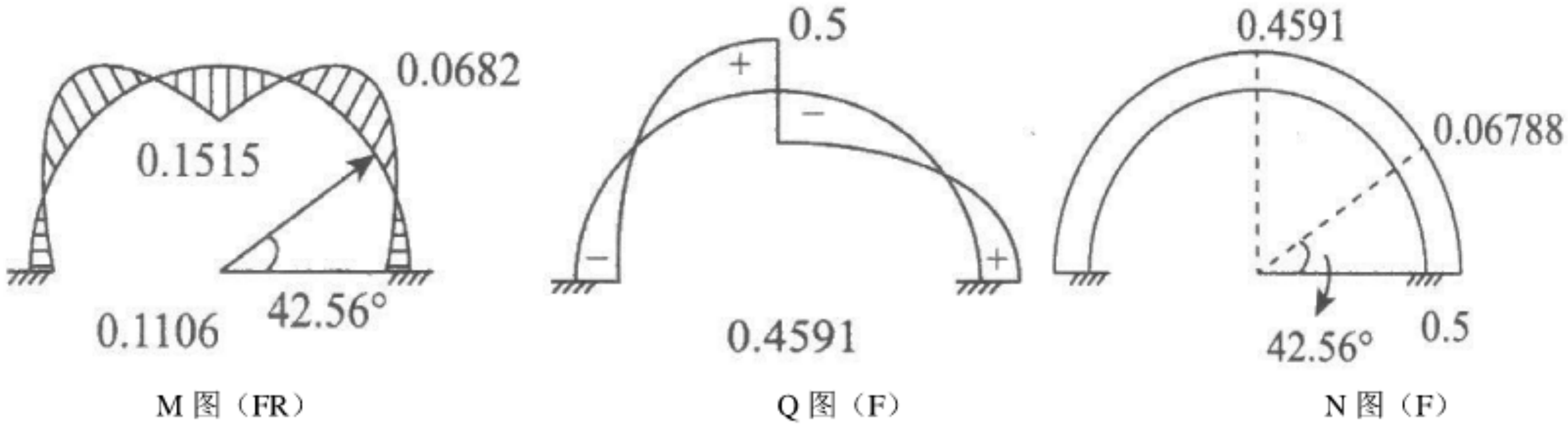


图 7-2-111

7-36 试求图示抛物线系杆拱截面 K 的弯矩、剪力和轴力。计算时可采用 $I=\frac{I_C}{\cos\varphi}$，拱中轴力和剪力对位移的影响可略去不计。已知拱顶 $EI_C=5000kN\cdot m^2$，拉杆 $E_1A_1=2\times10^5$ kN。

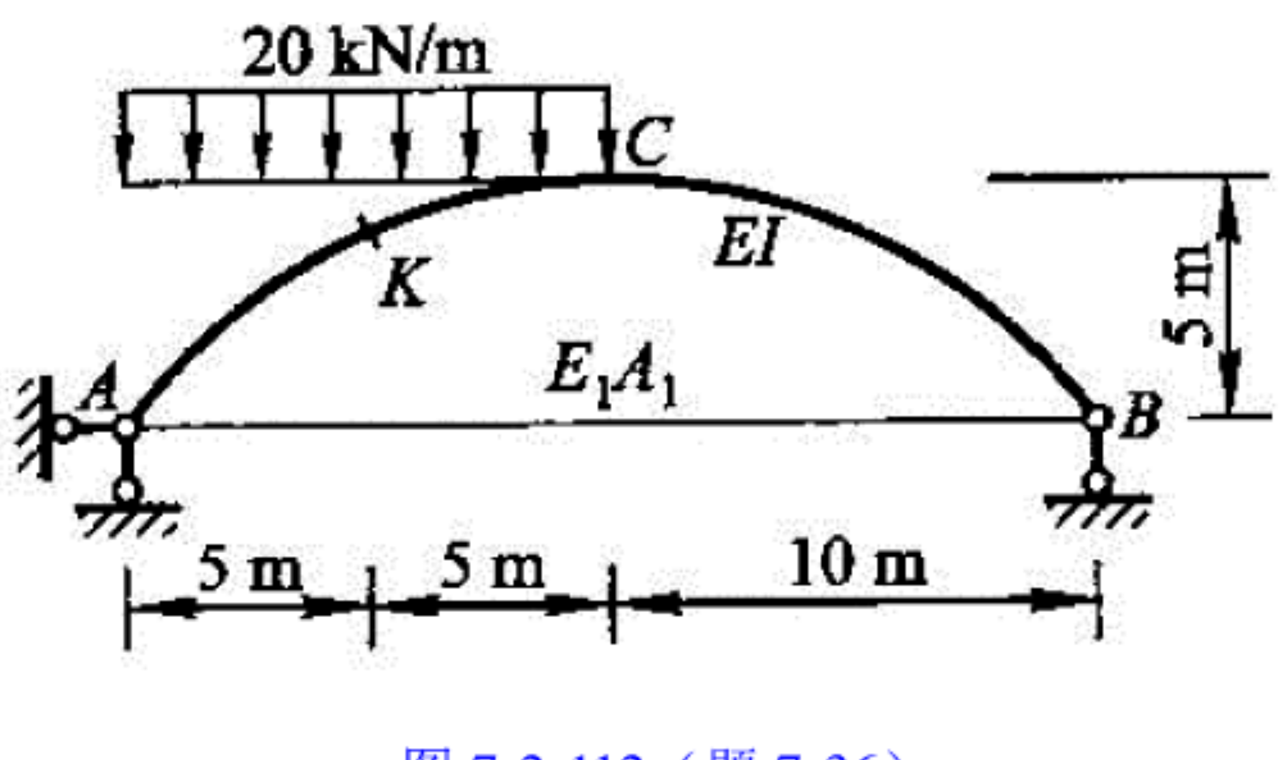


图 7-2-112（题 7-36）

解：由几何条件，以左支座为原点，拱轴方程为

$$y=\frac{4f}{l^2}x(1-x)$$

力法的求解过程如下（计算过程有问题）

$$\delta_{11}=\int y^2\mathrm{d}s/EI+\frac{1}{E_1A_1}=\frac{1}{EI_C}\int_0^l\left[\frac{4f}{l^2}(1-x)x\right]^2\mathrm{d}x+\frac{l}{E_1A_1}$$

$$=\frac{8f^2l}{15EI_C}+\frac{l}{E_AA_1}=\frac{8}{15}\frac{f^2l}{EI_C}\left(1+\frac{15}{8}\frac{EI_C}{E_1A_1}\right)$$

$$=\frac{8f^2l}{15EI_C}\left(1+\frac{15}{8}\times\frac{5000}{2\times10^5\times5^2}\right)=\frac{8F^2l}{15EI}\times1.001875$$

$$\delta_{11}=\int y^2ds/EI+\frac{l}{E_1A_1}=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[\frac{4f}{l^2}(1-x)x\right]^2+\frac{l}{E_1A_1}$$

$$=\frac{8f^2(10-15l+6l^2)}{15EI}+\frac{l}{E_1A_1}$$

$$\Delta_{1P}=\int-yM_P\frac{ds}{EI}=-\frac{1}{EI_c}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{4f}{l^2}(lx-x^2)\left(\frac{3ql}{8}x-\frac{qx^2}{2}\right)dx-\frac{1}{EI_c}\int_{\frac{l}{2}}^l\frac{4f}{l^2}(lx-x^2)\frac{ql}{8}x(l-x)dx$$

$$=\frac{fq}{2l^2EI_C}\int_0^{\frac{l}{2}}(3l^2x^2-7lx^3+4x^2)\mathrm{d}x-\frac{fq}{2l^2EI_C}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l^3x-2l^2x+lx^3)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{fq}{2l^2EI_C}\int_0^l(3l^2x^2-7lx^3+4x^2)\mathrm{d}x-\frac{fq}{2l^2EI_C}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l^3x-2l^2x+lx^3)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{fq}{2l^2EI_C}\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{64}+\frac{1}{40}+\frac{3}{8}-\frac{7}{12}+\frac{15}{64}\right)=\frac{qfl^3}{30EI_C}$$

$$X_1=\frac{ql^2}{16f\times1.001875}=\frac{20\times20^2}{16\times5\times1.001875}=99.81\ \text{kN}$$

$$y_k=3.75\ \text{m},\tan\varphi_k=0.5,\sin\phi_k=0.4472,\cos\varphi_k=0.8944$$

$$M_k=150\times5-\frac{20\times5^2}{2}-99.81\times3.75=125.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$Q_k=(150-20\times5)\times0.8944-99.81\times0.4472=0.085\ \text{kN}$$

$$N_k=(150-20\times5)\times0.4472+99.81\times0.8944=111.63\ \text{kN}$$

（教材 F_{NAB}＝99.8kN，我觉得这应该是直杆 AB 的轴力，而不是抛物线系杆 K 截面的轴力）

7-37 试求图示等截面圆弧两铰拱的推力 F，并求当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时的 F_n 值。计算时忽略剪力和轴力对位移的影响。（提示：为计算方便，可在拱的右部加一对称荷载 F，这样所得的推力将是一个荷载作用时推力的 2 倍。计算宜采用极坐标，转换式为 x＝R（sinα-sinφ），

y＝R（cosφ-cosα），ds＝Rdφ）。

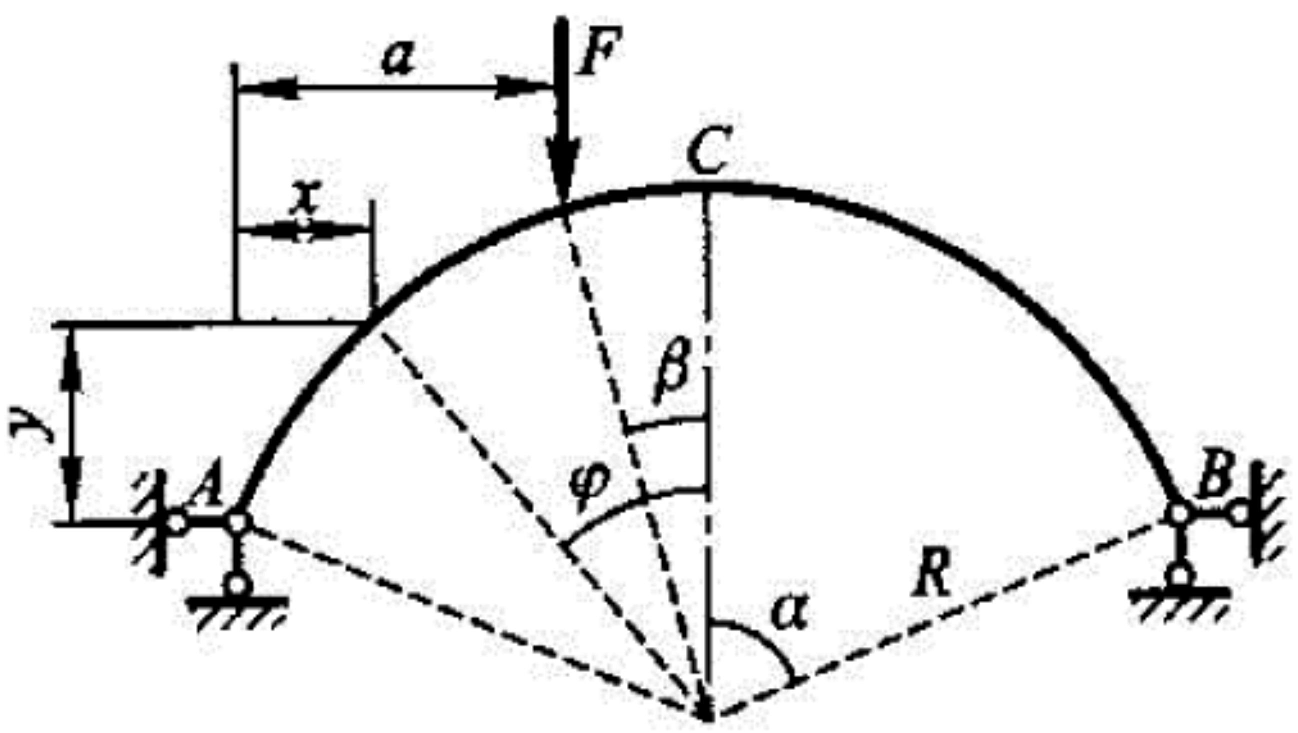


图 7-2-113（题 7-37）

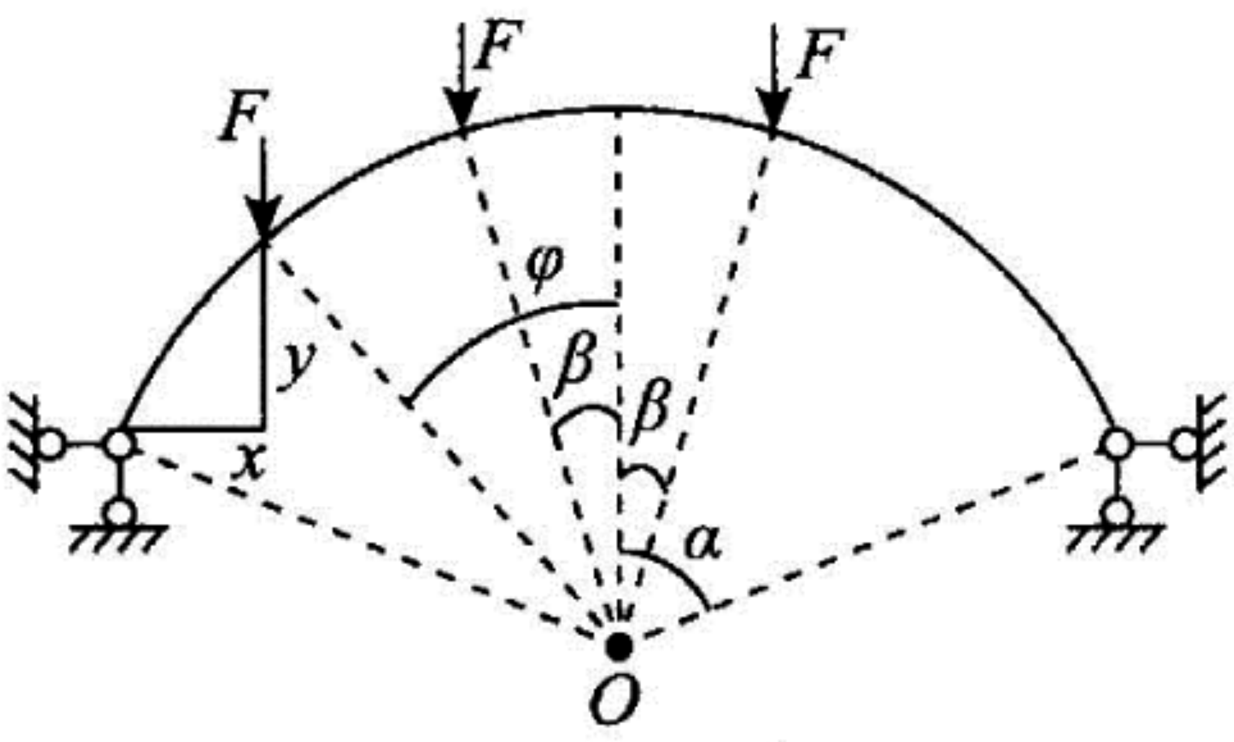


图 7-2-114（题 7-37 解图）

解：应用力法求解具体过程如下

$$EI\delta_{11}=\int y^2 ds=\int R^2\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)^2 Rd\varphi$$
$$=2\int_0^{\alpha}R^3\left(\cos^2\varphi-2\cos\varphi\cos\alpha+\cos 2\alpha\right)d\varphi$$
$$=2R^3\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-2\cos\alpha\cos\varphi+\cos^2\alpha\right)d\varphi$$
$$=2R^3\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\alpha\cos^2\alpha\right)$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，有$EI\delta_{11}=\frac{\pi R^3}{2}$；

$$-EI\Delta_{1P}=\int M_P y ds=\int_{\beta}^{\alpha}FR(\sin\alpha-\sin\beta)R(\cos\varphi-\cos\alpha)Rd\varphi+\int_0^{\beta}FR(\sin\alpha-\sin\beta)R(\cos\varphi-\cos\alpha)Rd\varphi$$
$$=FR^3\left[\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)-(\alpha-\beta)\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{2}-(\cos\alpha-\cos\beta)\cos\alpha\right]$$
$$-FR^3(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\beta-\beta\cos\alpha)$$
$$=FR^3\left[(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta-\beta\cos\alpha)-(\alpha-\beta)\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{2}-(\cos\alpha-\cos\beta)\cos\alpha\right]$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，有如下结果

$$-EI\Delta_{1P}=FR^3\left[(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)-\frac{\cos^2\beta}{2}\right]=FR^3\left(1-\sin^2\beta-\frac{\quad}{2}\right)=FR^3\frac{\cos^2\beta}{2}$$

此时可以计算出总的水平推力 H

$$H=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{F\cos^2\beta}{\pi}$$

因为水平推力为一个荷载作用时的两倍

$$F_H=\frac{H}{2}=\frac{F\cos^2\beta}{2\pi}$$

（教材 $F_H=\frac{F\cos^2\beta}{\pi}$）

7.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 7-3-1 所示对称结构，结点 C 的弯矩等于______，______侧受拉。[浙江大学 2006 研]

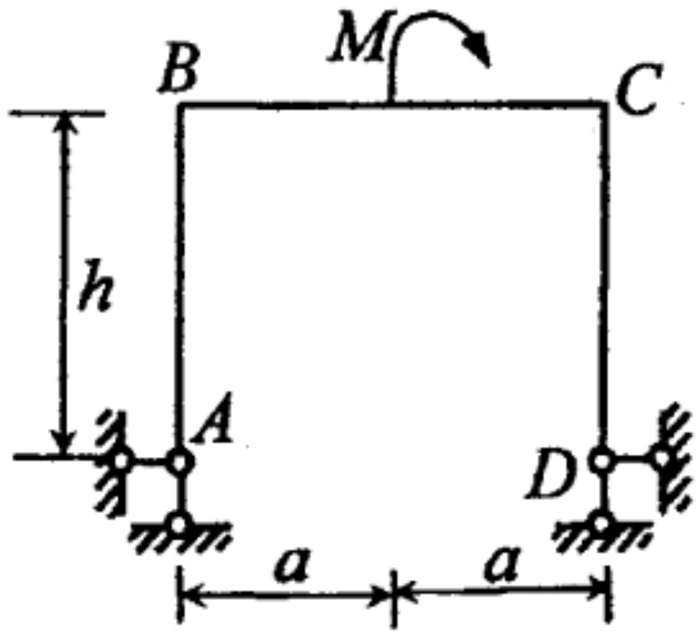


图 7-3-1

【答案】0；下

【解析】对称结构作用反对称荷载，取半结构下图 7-3-2（a）所示；该半结构为静定体系，可作出对应的弯矩图如下图 7-3-2（b），可知 C 点的弯矩为零，下侧受拉。

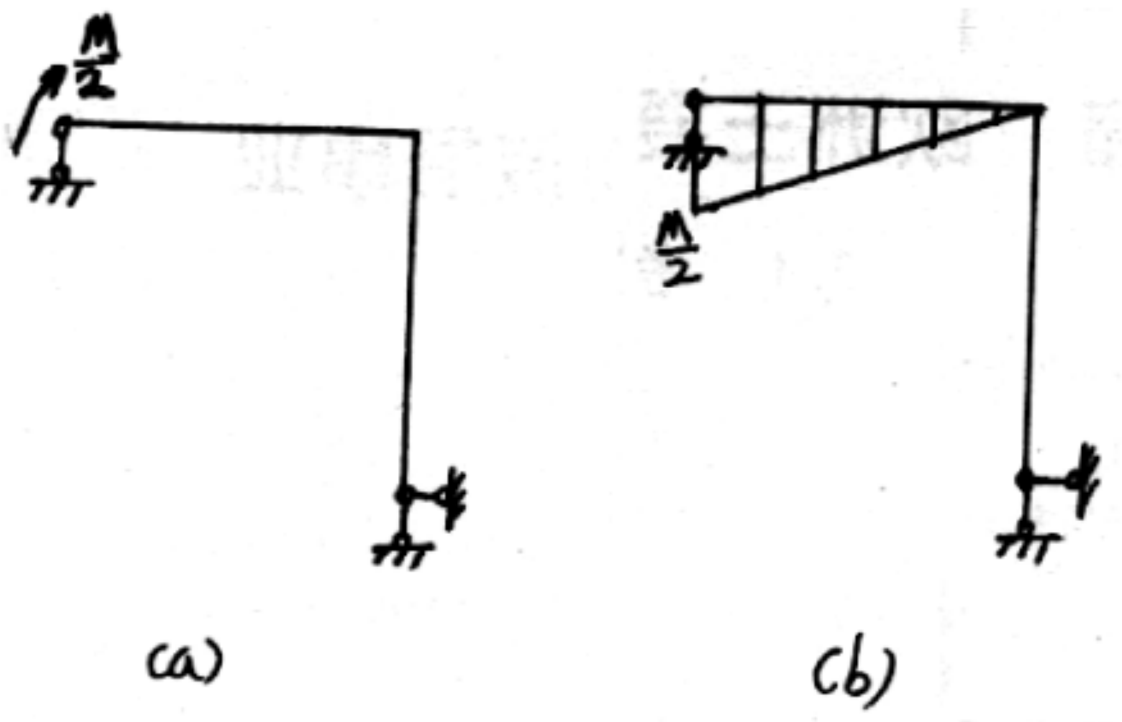


图 7-3-2

2．图 7-3-3 示结构，*EA*=常数，指定杆内力 *N*=______。[哈尔滨工业大学 2008 研]

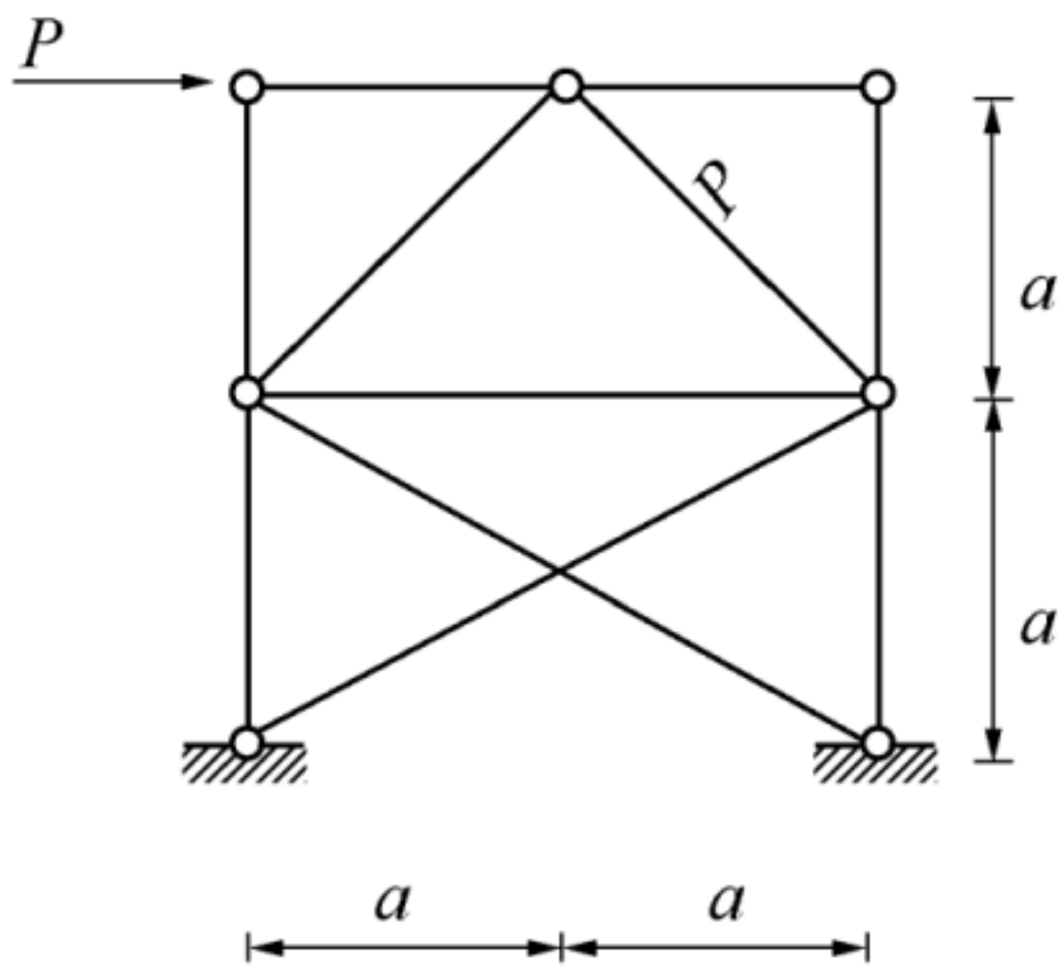


图 7-3-3

【答案】0

【解析】该结构为对称结构，将荷载 P 分解为同方向的两个 P/2（反对称力）和反方向的两个 P/2（正对称力）；对称结构在反对称荷载下只存在反对称的力，再根据结点平衡可知在这种情况下，指定杆的内力为零；对称结构在对称荷载作用下只存在对称的力，再根据结点平衡可知，指定杆的内力为零；综上，两者相加得到指定杆最终的内力 N=0。

3．图 7-3-4（a）所示桁架，EA 为常数，若采用图 7-3-4（b）所示基本体系，则力法典型方程中的Δ_{1P}为______。[西南交通大学 2007 研]

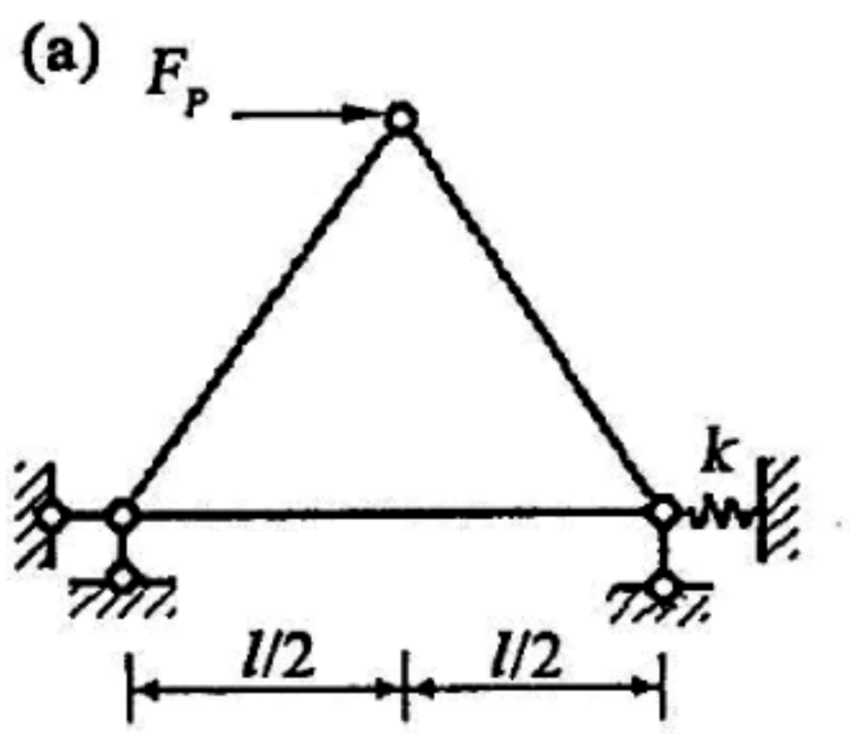


图 7-3-4

【答案】$F_P/2k$

【解析】此题需要特别注意弹簧在求解力法典型方程时对自由项Δ_{1P}的影响，单位荷载下的基本结构杆件的内力均为零；在 F_P 作用时，弹簧的压缩量为$F_P/2k$；在单位荷载作用下，弹簧处的约束反力为 1（向左）；所以

$$\Delta_{1P}=-\left(-\frac{F_P}{2k}\times 1\right)=\frac{F_P}{2k}。$$

二、选择题

1．图 7-3-5 示对称结构，其半结构计算简图为（　　）。[哈尔滨工业大学 2007 研]

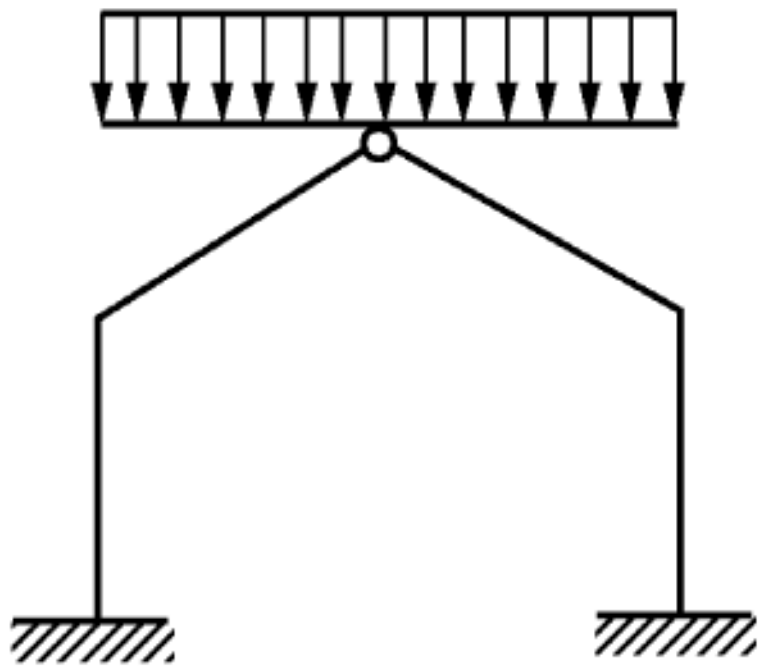
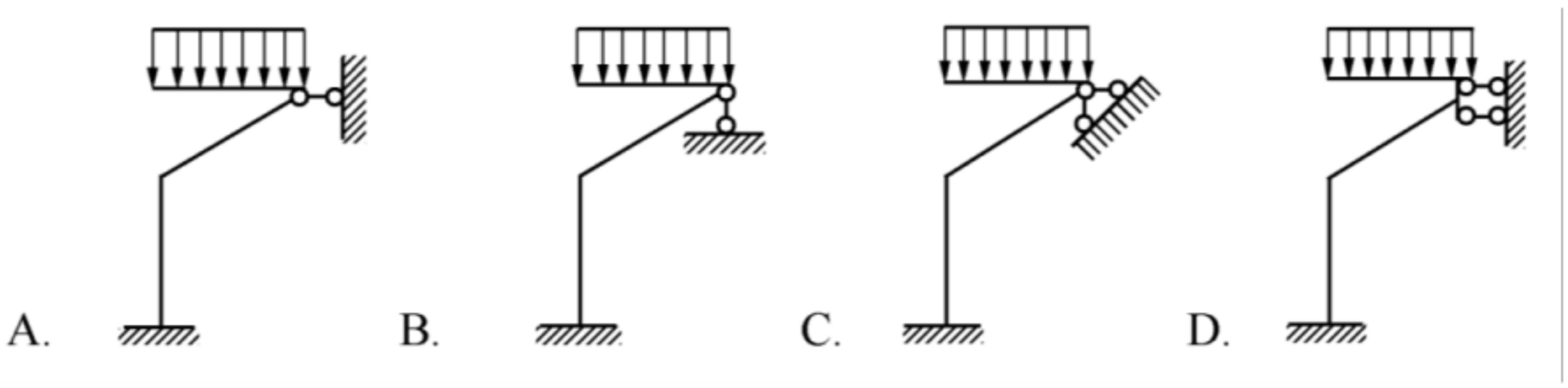


图 7-3-5



【答案】A

【解析】从位移的角度考虑，对称结构在对称荷载作用下，只存在对称的位移即为竖向位移，不存在反对称的位移即为水平位移；不存在哪个方向的位移，在哪个方向上就有约束，所以该题不存在水平位移，只存在水平约束。

2．用力法计算图 7-3-6 示结构时，使其典型方程中副系数全为零的力法基本结构是（　　）。[天津大学 2005 研]

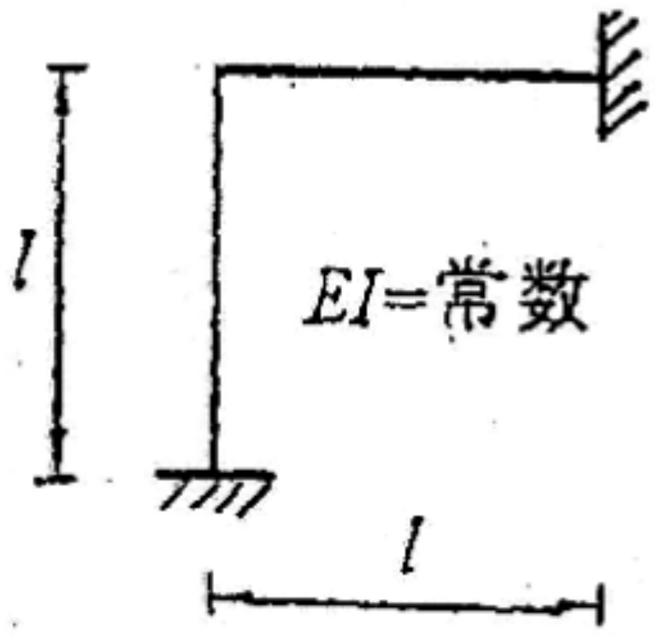
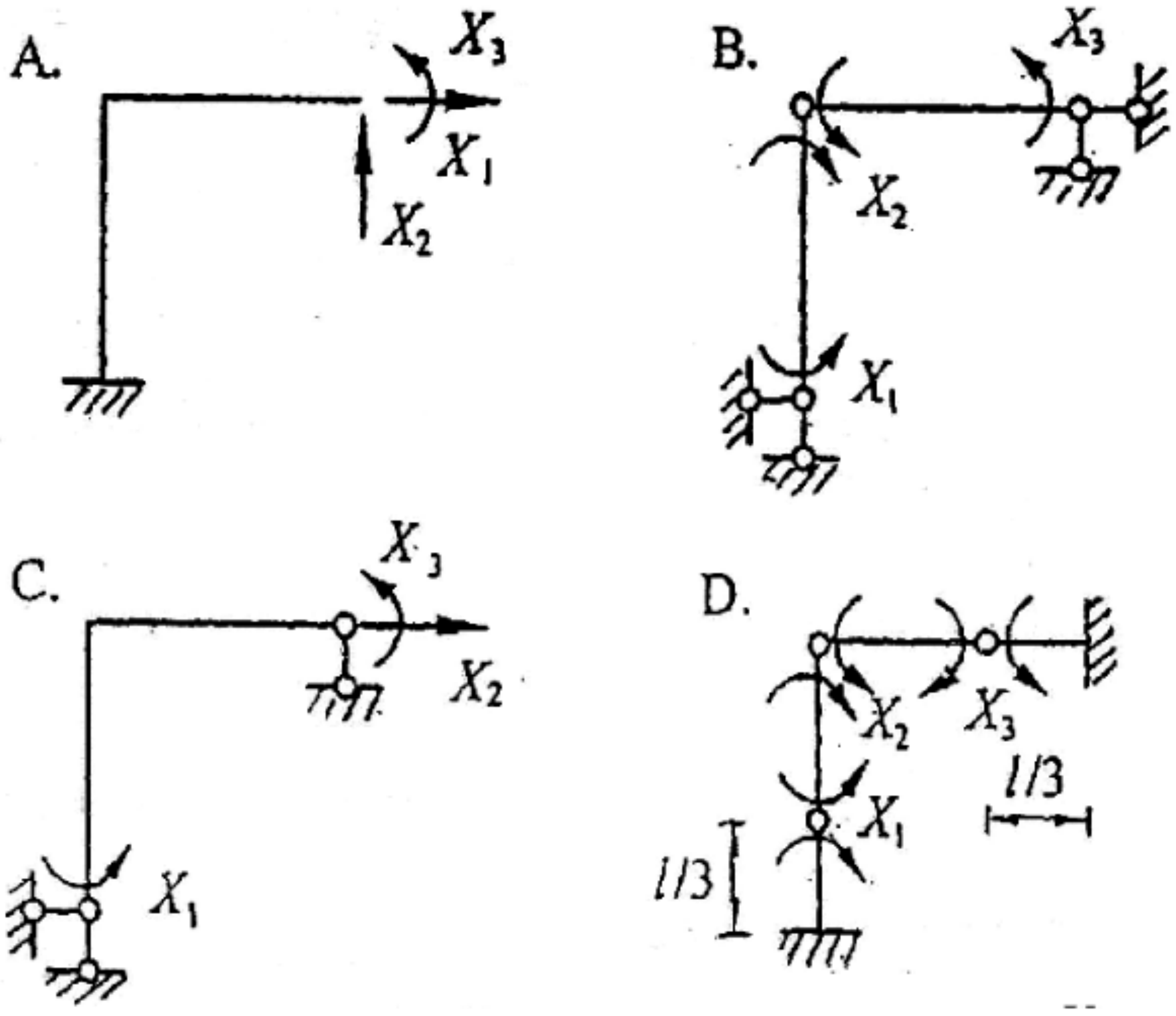


图 7-3-6



【答案】D

【解析】该结构为三次超静定结构，若使典型方程中副系数全为零，即在三个单位荷载下的弯矩图两两图乘均为零，D 图所示基本结构在三个单位荷载作用下的弯矩图如图 7-3-7 所示，显然两两图乘均为零。

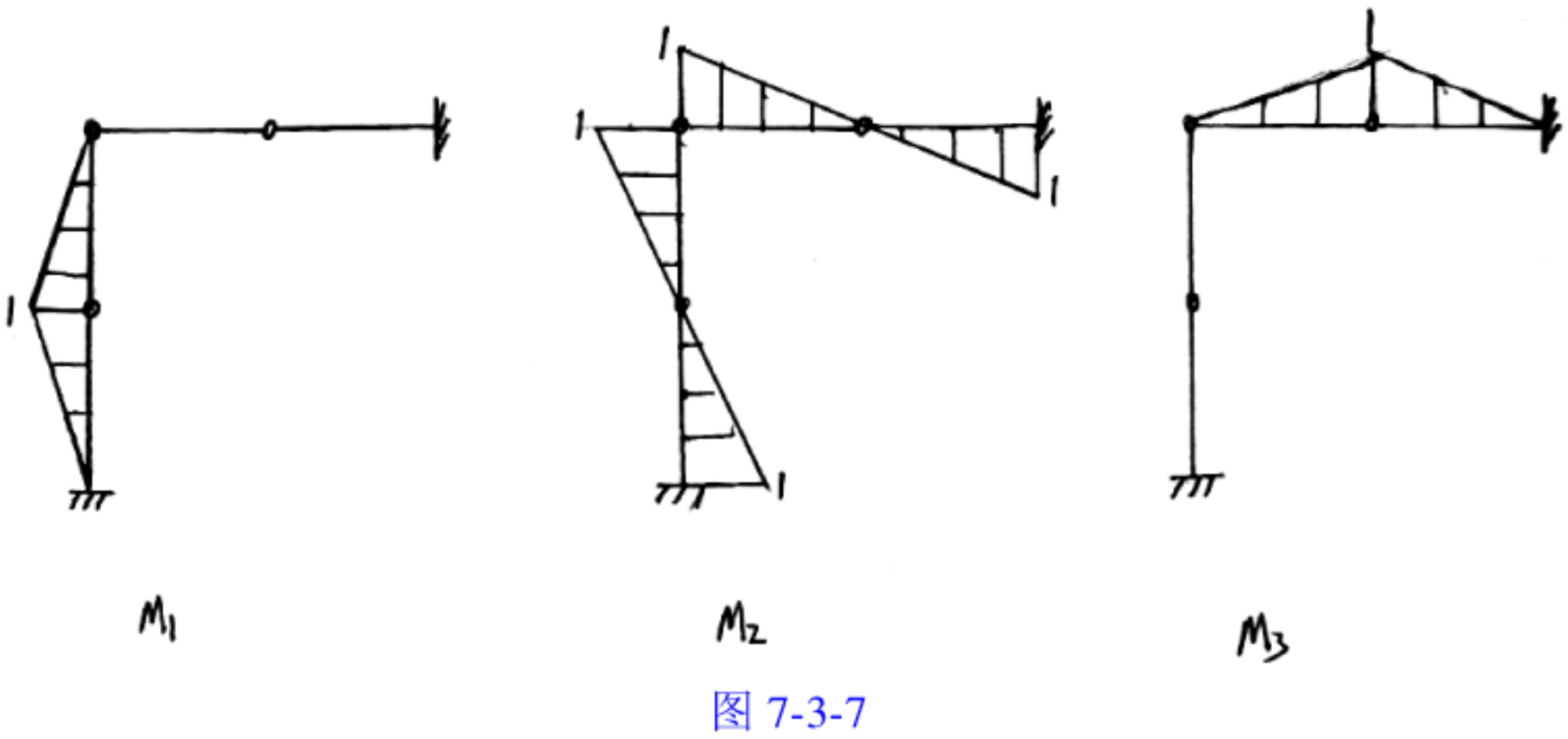


图 7-3-7

3．图 7-3-8 示（a）结构，如取图 7-3-8 示（b）为力法基本结构，则力法方程的系数Δ_{2C}等于（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．-b

B．0

C．b

D．a

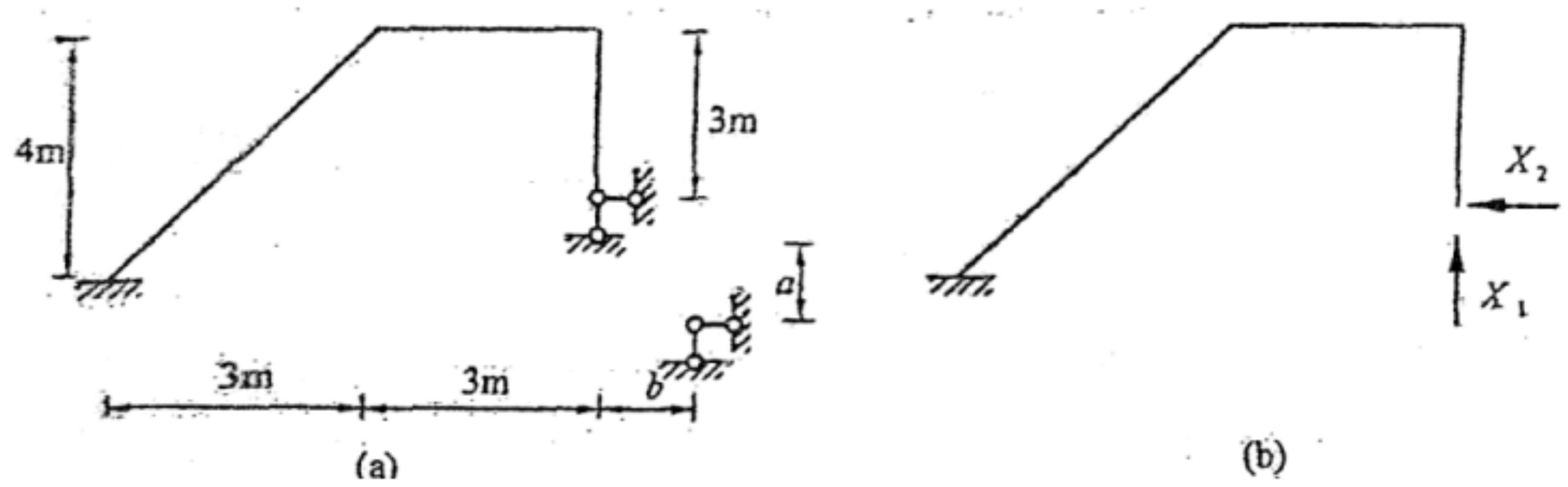


图 7-3-8

【答案】B

【解析】将移动的支座处视为多余约束时，$\Delta_{2C}=0$，因为基本结构不需要考虑支座位移带来的影响了。但在力法典型方程的右侧会出现已知的 a、b。

4．图 7-3-9 示结构，若取支座 A 反力为力法基本未知量 X_1，则当 I_1 增大时，δ_{11} 为（　　）。[浙江大学 2006 研]

A．变小；　　B．变大；　　C．不变；　　D．取决于 I_1/I_2 的值。

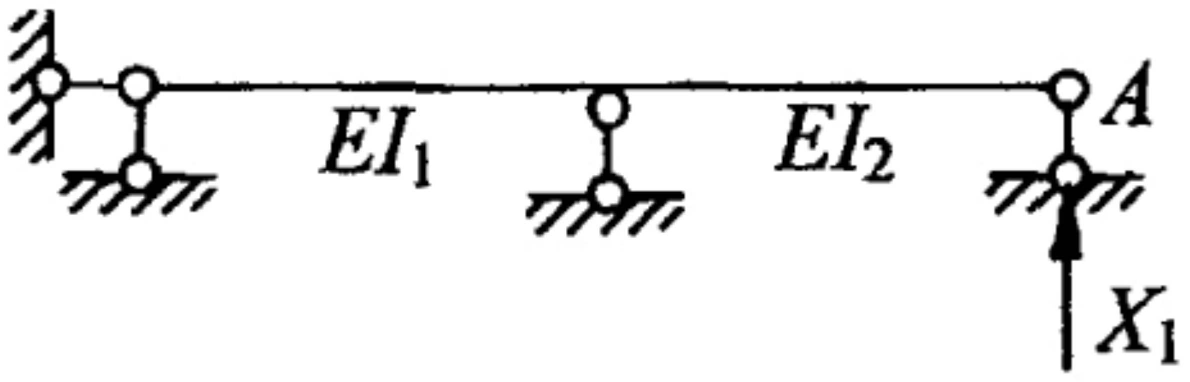


图 7-3-9

【答案】A

【解析】δ_{11} 为基本结构在单位多余未知力下的弯矩图（为三角形）的自乘，EI_1 必定在分母的位置，当 I_1 增大时，δ_{11} 的值一定减小。

5．图 7-3-10 所示结构 EI 为常数，中间截面 C 及 AB 杆内力应满足（　　）。[西南交通大学 2008 研]

A. $M\neq0$，$Q=0$，$N=0$，$N_{AB}\neq0$　　B. $M=0$，$Q\neq0$，$N=0$，$N_{AB}\neq0$

C. $M=0$，$Q\neq0$，$N=0$，$N_{AB}=0$　　D. $M\neq0$，$Q\neq0$，$N=0$，$N_{AB}=0$

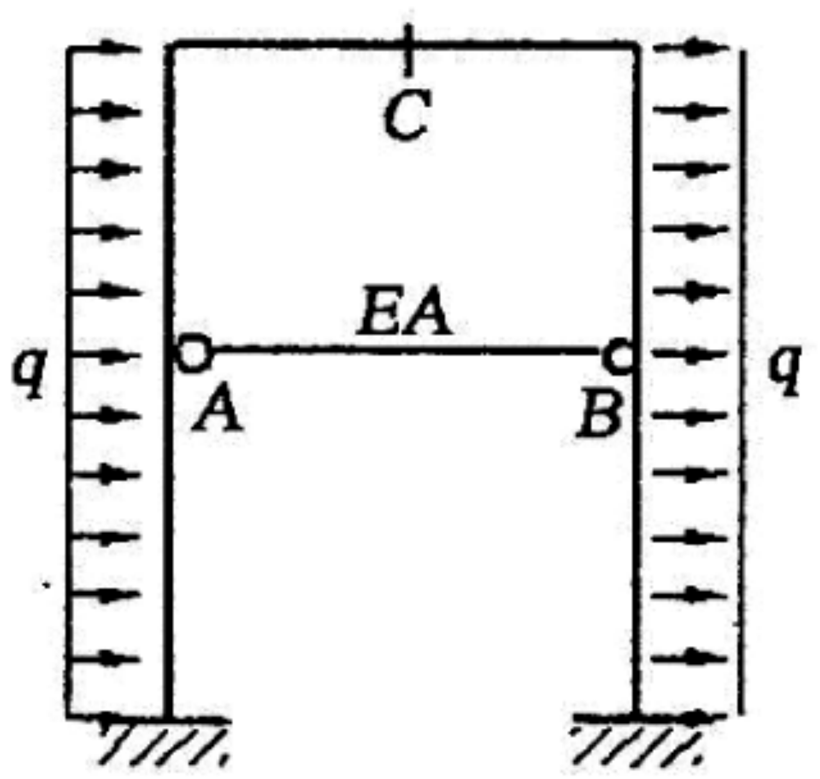


图 7-3-10

【答案】C

【解析】对称结构在反对称的荷载作用下，在中间截面处只存在反对称的内力，所以 C 截面存在剪力 Q，不存在弯矩 M 和轴力 N；AB 杆的轴力为 N_{AB} 是对称的，故也不存在。

6．如下图 7-3-11 所示 2 个结构，材料、外形、荷载和支撑均相同，它们左柱上端的弯矩关系是（　　）。[中

南大学 2003 研]

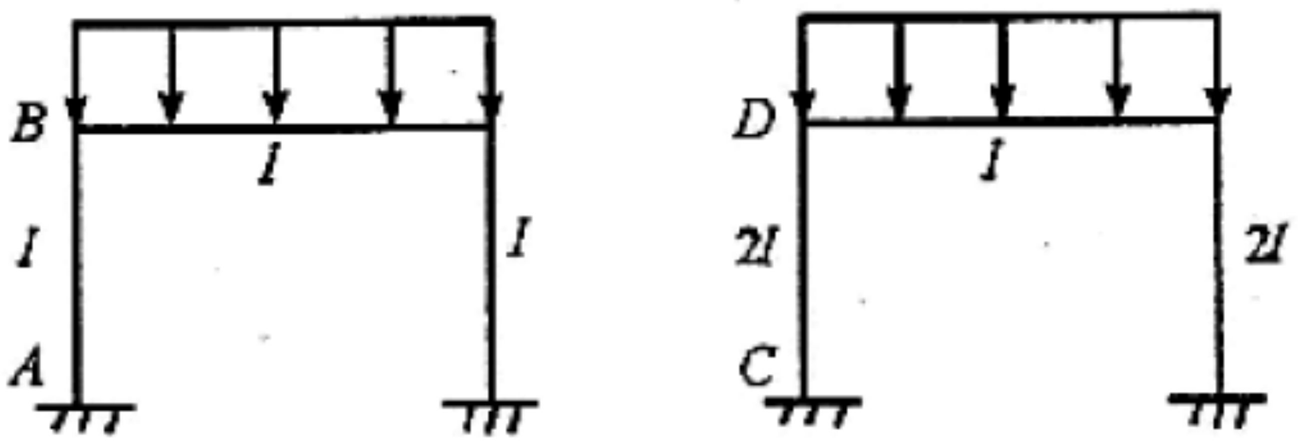


图 7-3-11

A. $M_{DC} > M_{BA}$　　B. $M_{DC} < M_{BA}$　　C. $M_{DC} = M_{BA}$　　D. 不一定

【答案】A

【解析】超静定结构的弯矩是按刚度分配的，显然 CD 杆与横梁的刚度比是 AB 杆与横梁刚度比的两倍，故 DC 端分配到的弯矩比 BA 端分配到的弯矩多，故 $M_{DC} > M_{BA}$ 。

7．力法基本方程使用条件是（　　）构成的超静定结构。[宁波大学 2009 研]

A. 弹塑性材料；　　C. 微小变形且线性弹性材料；

B. 任意变形的任何材料；　　D. 任意变形的线性弹性材料。

【答案】C

【解析】力法是指解除超静定结构的多余联系而得到静定的基本结构，以多余未知力作为基本未知量，根据基本体系应与原结构变形相同而建立的位移条件，首先求出多余未知力，然后由平衡条件计算其余反力、内力的方法。无使用条件的限制，可以应用于任何变形的任何材料，有使用条件的是求典型方程系数是的公式。

8．图 7-3-12 示结构用力法求解时，基本结构不能选（　　）。[哈尔滨工业大学 2007 研]

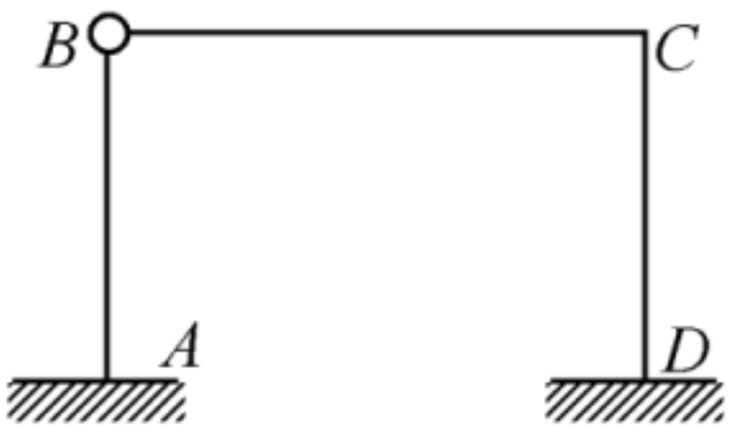


图 7-3-12

A．C 为铰结点，A 为固定铰支座

B．C 为铰结点，D 为固定铰支座

C．A、D 均为固定铰支座

D．A 为竖向链杆支座

【答案】D

【解析】力法的基本结构是无多余约束的几何不变体系；当 A 为竖向链杆时，根据两刚片规则，易判断出原结构会变为几何瞬变体系。

三、判断题

1．图 7-3-12（a）所示桁架结构可选用图（b）所示的体系作为力法基本体系（　　）。[西南交通大学 2008 研]

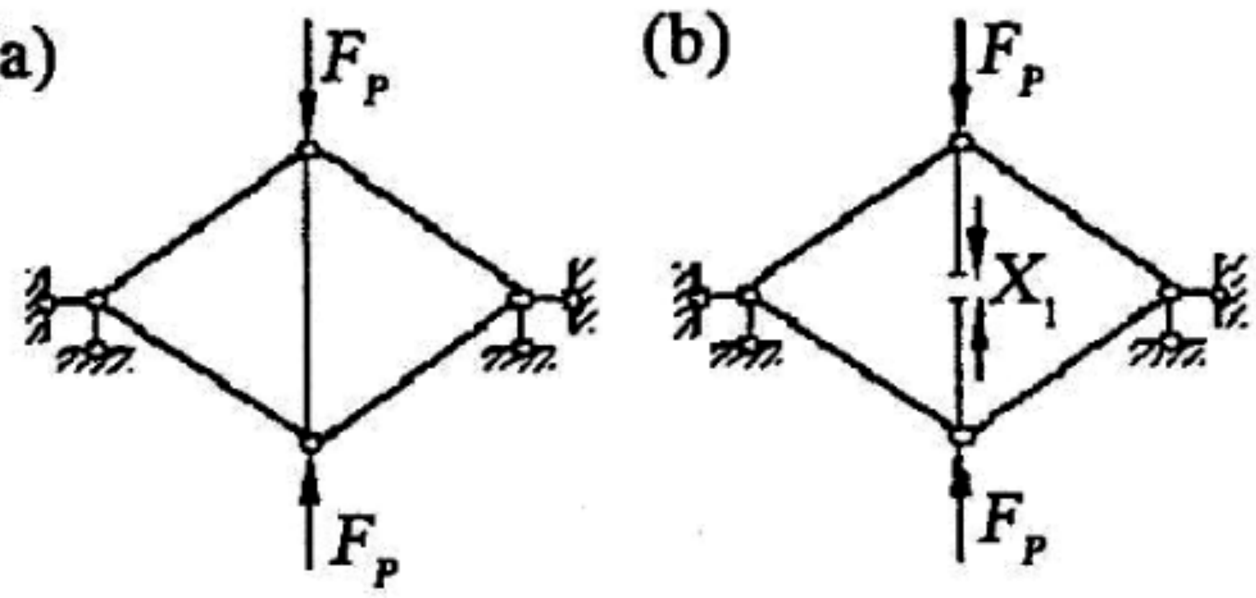


图 7-3-12

【答案】对

【解析】力法的基本结构是无多余约束的几何不变体系；对于图 7-3-12（b）进行几何组成分析：去掉一个二元体，根据三刚片规则，三刚片通过不共线的三个铰相联，为无多余约束的几何不变体系。

2．除荷载外，支座移动，温度改变，制造误差等外因均不引起任何结构产生内力（　　）。[湖南大学 2003 研]

【答案】错

【解析】对于静定结构除荷载外，支座移动，温度改变，制造误差等外因均不引起任何结构产生内力；但对于超静定结构荷载、支座移动，温度改变，制造误差等外因均会引起结构产生内力。

3．用图乘法计算超静定结构的位移时，虚拟状态的弯矩图可取任一力法基本结构对应的 $\bar{M}$ 图。[中南大学 2005 研]

【答案】对

【解析】由于超静定结构的内力并不因为所取的基本结构不同而有所改变，因此可以将其内力看作是按任一基本结构求得；故在计算超静定结构的位移时，也就可以将所设单位力施加于任一基本结构作为虚力状态。

四、计算题

1．用力法计算图 7-3-13 所示结构，并作结构的 M 图。[西南交通大学 2008 研]

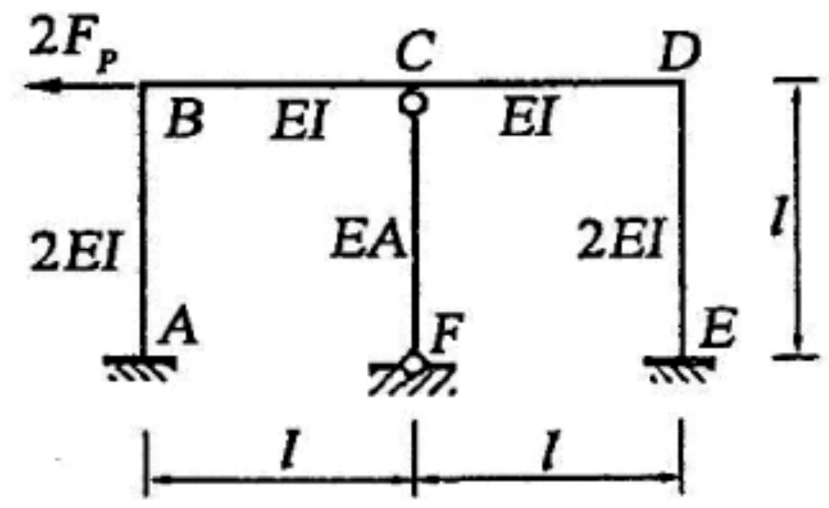


图 7-3-13

解：题图所示体系为对称体系，可以将荷载变化成两部分，一个是对称荷载，另一个是反对称荷载。

当荷载简化为反对称荷载时，取左半部分为研究对象，基本体系如下图 7-3-14 所示。

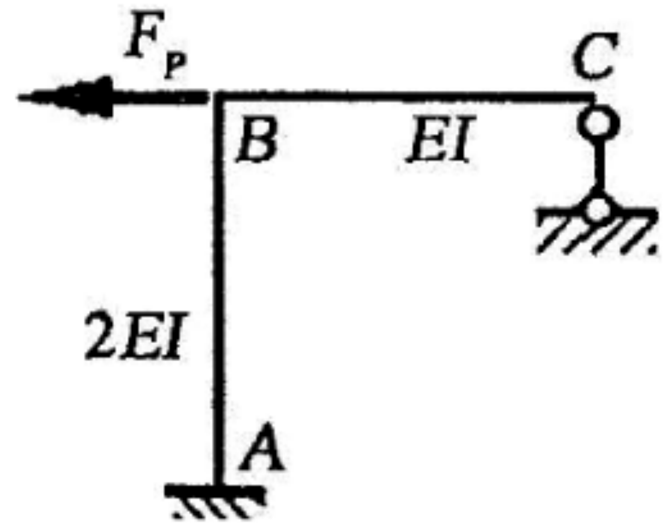


图 7-3-14

则力法的基本方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

利用图乘法可知，式中 $\delta_{11}=5l^3/6EI$ ， $\Delta_{1P}=-F_Pl^3/4EI$。

代入力法方程，解得 $X_1=3F_P/10$。

画出弯矩图如下图 7-3-15 所示。

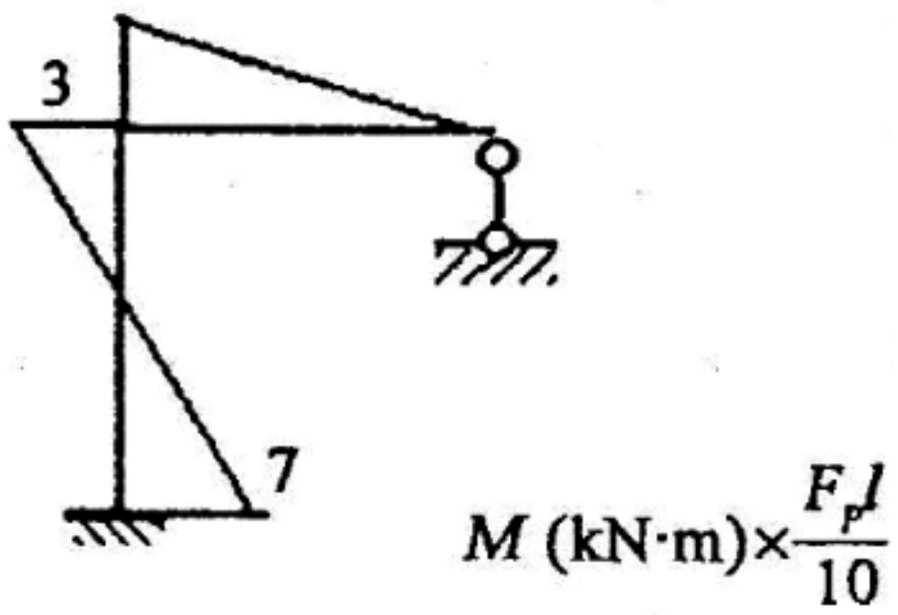


图 7-3-15

由于是对称结构，不计中间的竖杆的变形，因此弯矩图也为 0。故可知系统的弯矩图就是反对称的弯矩图。

2．用力法计算图 7-3-16 所示结构的弯矩图，写出分析过程。[东南大学 2005 研]

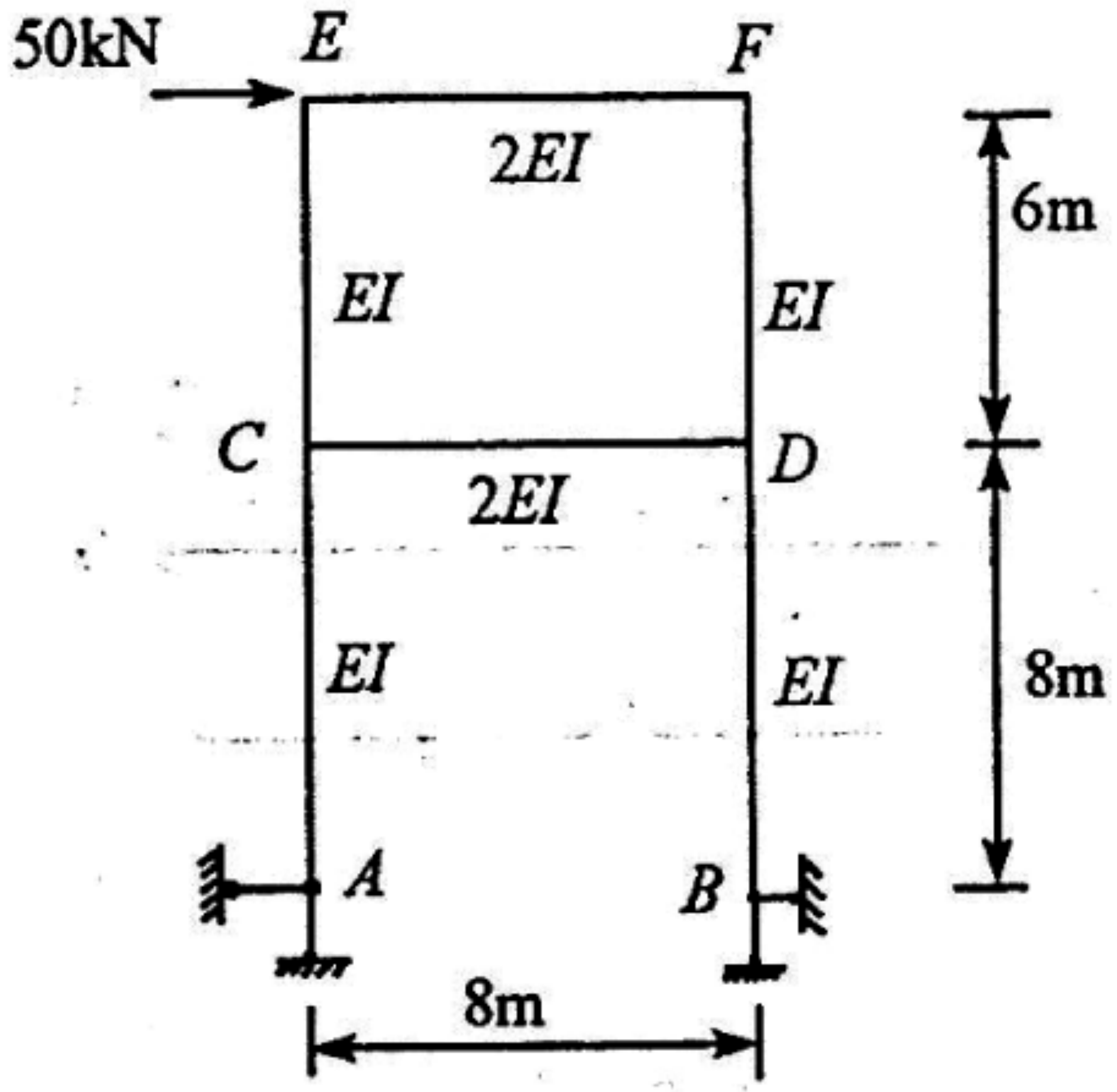


图 7-3-16

解：将荷载分解成两种，一种为对称荷载，另一种为反对称荷载。对于对称荷载，由于机构对称荷载对称，所以两边荷载抵消，不会产生弯矩，故不考虑。因此，只需考虑反对称荷载，此时的受力图 7-3-17 如下所示。

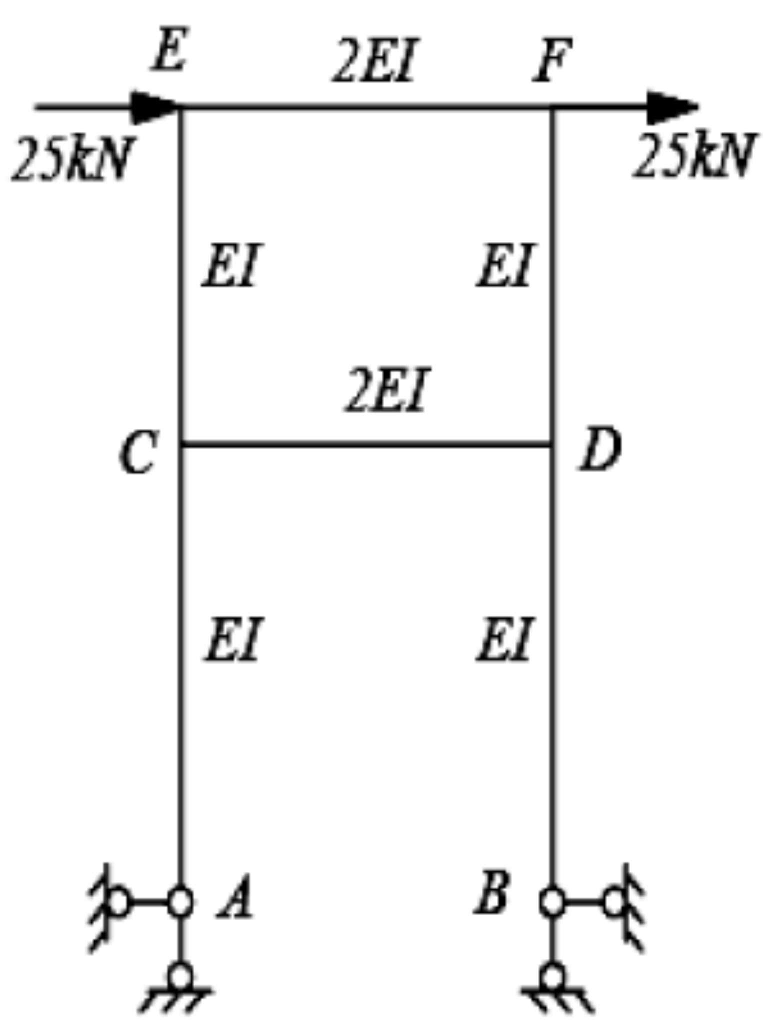


图 7-3-17

只需研究半个结构，此时横梁中只有剪力，故取基本结构如下图 7-3-18 所示。

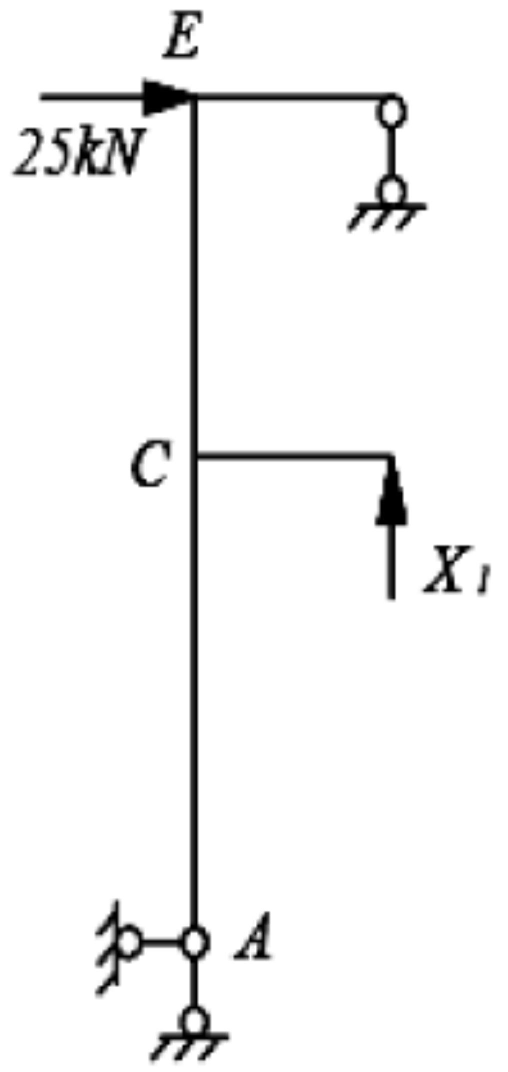


图 7-3-18

去掉 X_1 后，绘制此时的弯矩图 Mp，如下图 7-3-19 所示。

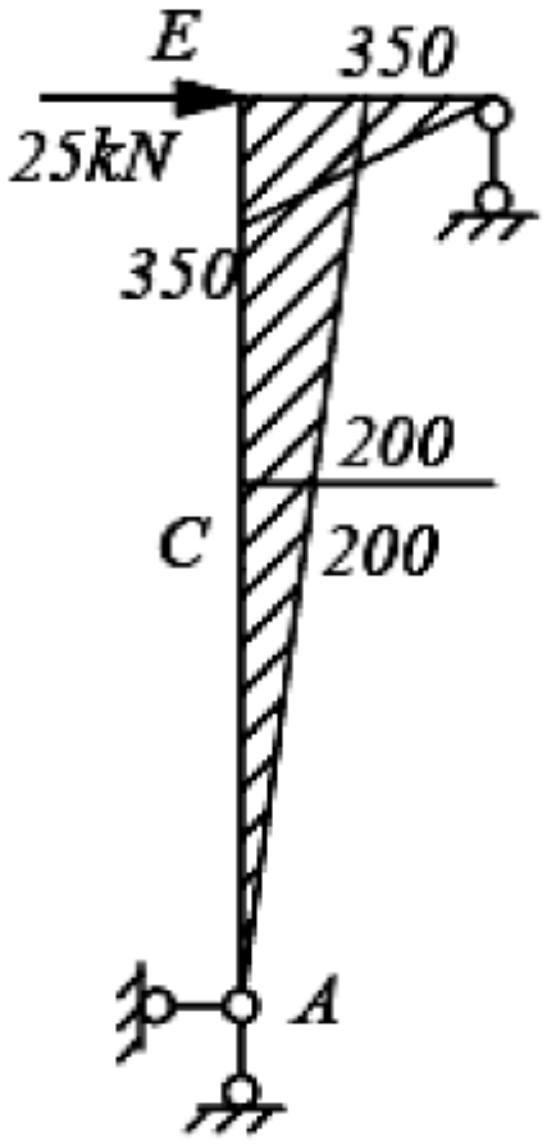


图 7-3-19

体系在单位荷载作用下的弯矩图如下图 7-3-20 所示。

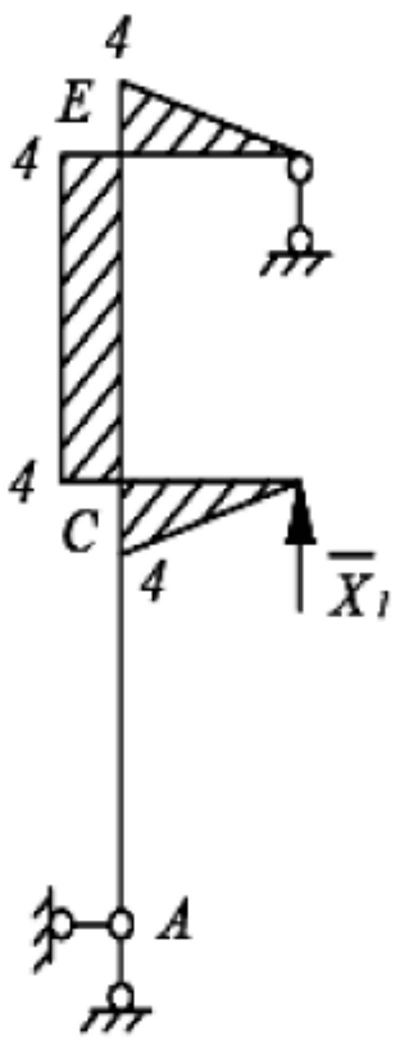


图 7-3-20

力法的典型方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

由图乘法可求得方程中的常数项和系数分别为

$$\delta_{11}=\frac{1}{2EI}\times(\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{2}{3}\times4+\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{2}{3}\times4)+\frac{1}{EI}\times(4\times6\times4)=\frac{352}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{2EI}\times(\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{2}{3}\times350)-\frac{1}{EI}\times(4\times6\times\frac{200+350}{2})=-\frac{22600}{3EI}$$

代入方程，可得$X_1=64.205kN$。

利用弯矩的叠加原理，可求得最后的弯矩图如下图 7-3-21 所示。

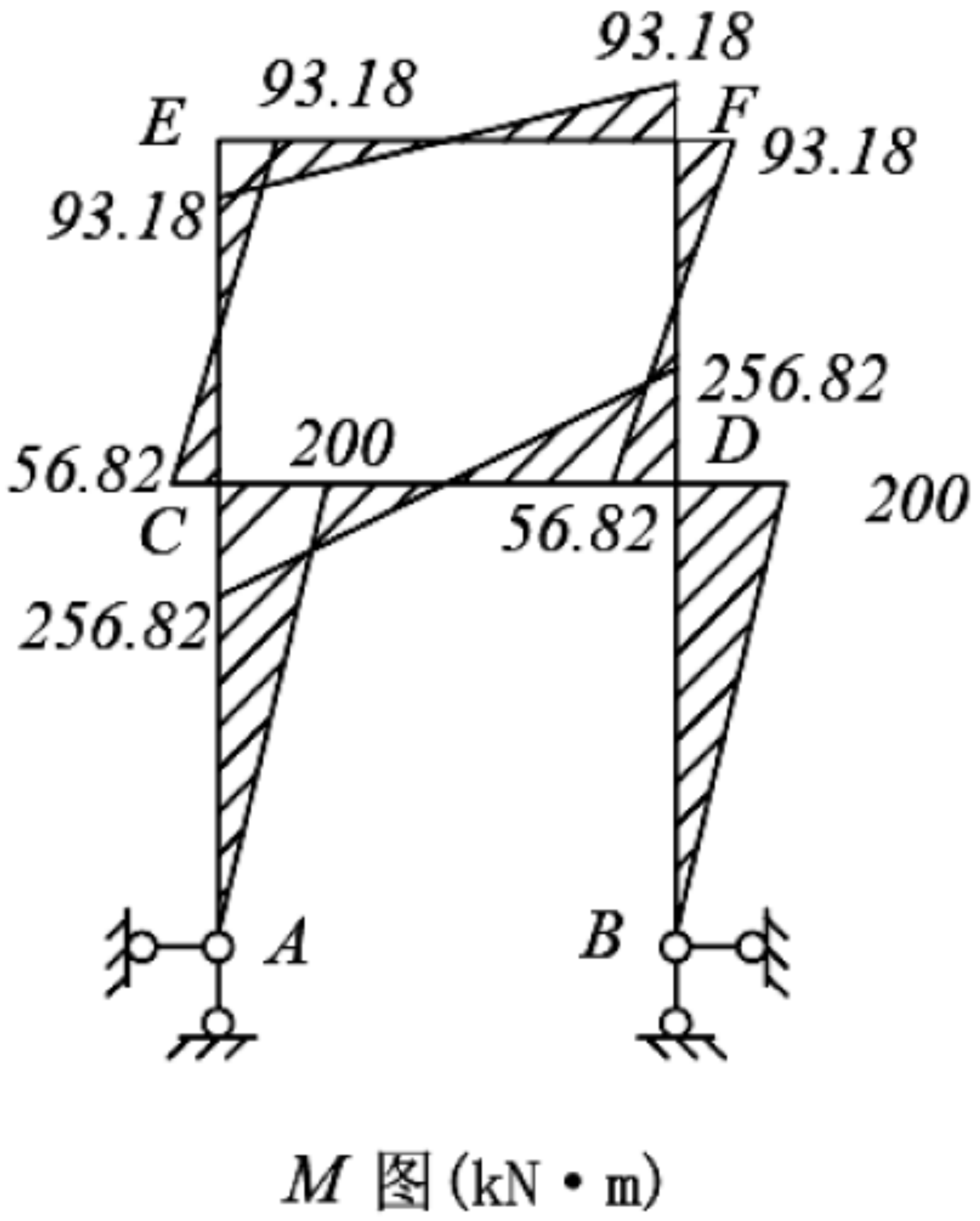


图 7-3-21

3．图 7-3-22 所示结构内部温度升高 30℃，外部温度不变，绘制结构弯矩图，并计算 E 点的竖向位移。已知结构杆件截面为矩形，截面高$h=0.6\text{m}$，材料线性膨胀系数α，EI为常数。[武汉科技大学 2009 研]

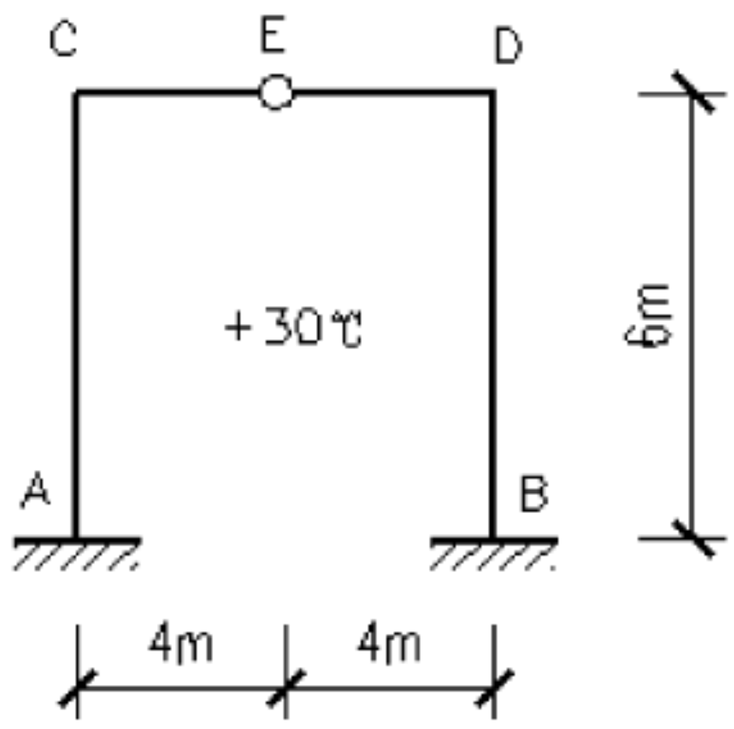


图 7-3-22

解：用力法求解。将题图所示结构简化为下图 7-3-23。

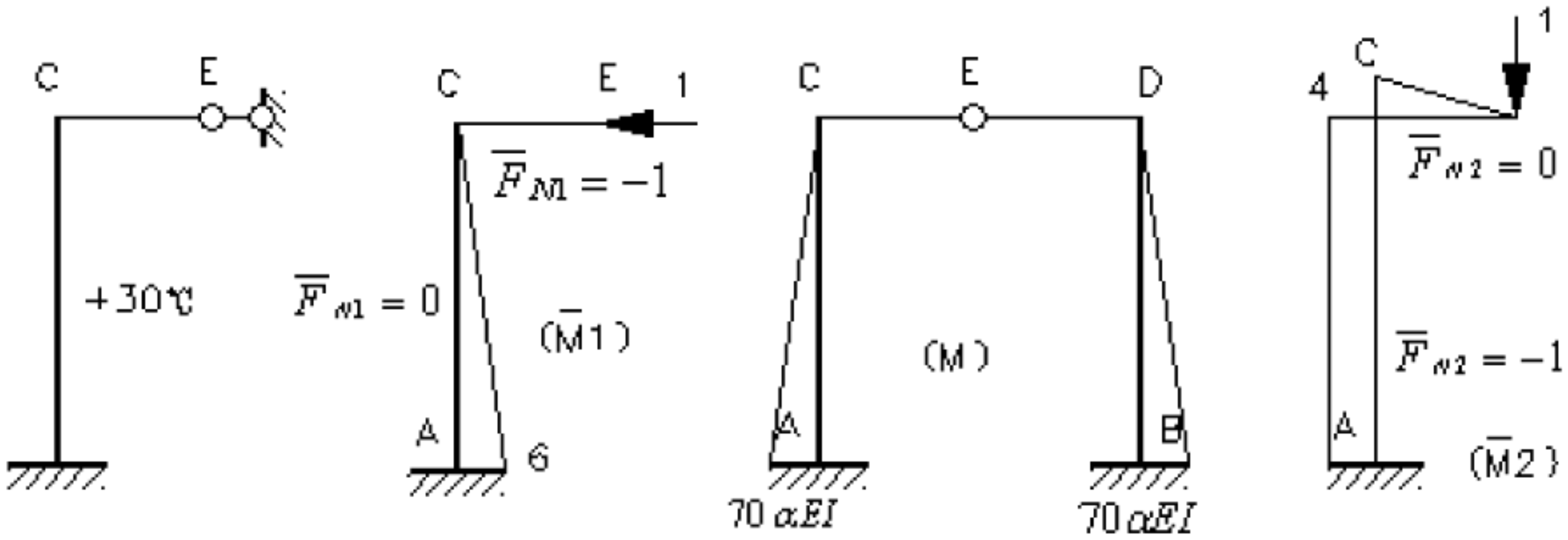


图 7-3-23

则有

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{2}{3}\times6)=\frac{72}{EI}$$

$$\Delta_{1t}=\sum\overline{F}_{N1}\alpha tl+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\overline{M_1}ds=-\alpha\times15\times4+\frac{30\alpha}{0.6}\times(\frac{1}{2}\times6\times6)=840\alpha$$

代入正则方程，可得 $x_1=-\dfrac{70\alpha EI}{6}$。

弯矩图如上图 7-3-23 所示。

则 E 点的位移为

$$\Delta_{EV}=-\alpha\times15\times6-\frac{30\alpha}{0.6}\times(\frac{1}{2}\times4\times4+4\times6)+\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times70\alpha EI\times6\times4)=-850\alpha$$

4．试用最简便的方法计算图 7-3-24 所示结构，并作 M 图，各杆 EI=常数。[福州大学 2007 研]

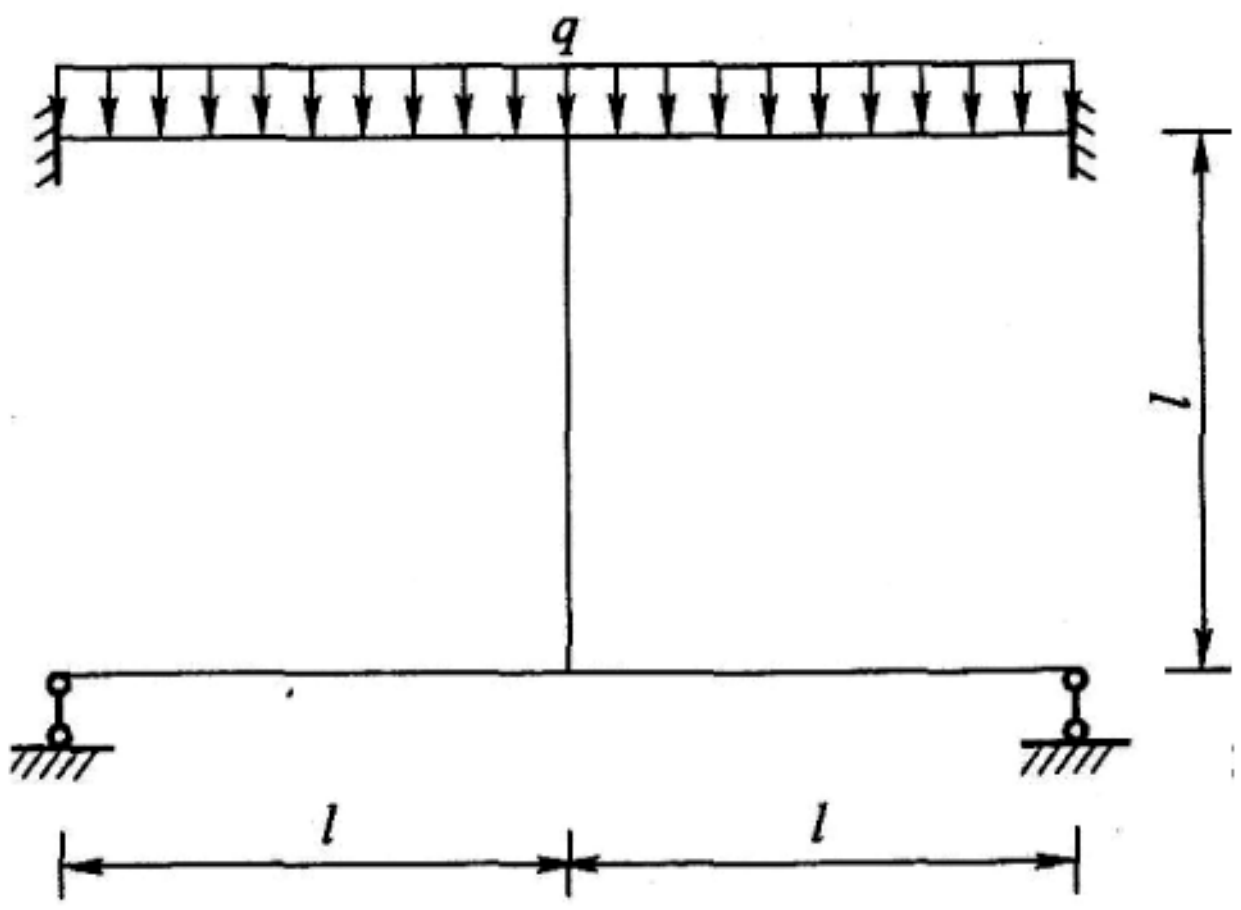


图 7-3-24

解：题图所示结构对称，荷载对称，所以可取半结构进行分析。在中间竖杆处断开，并加滑动支座，如下图 7-3-25 所示。

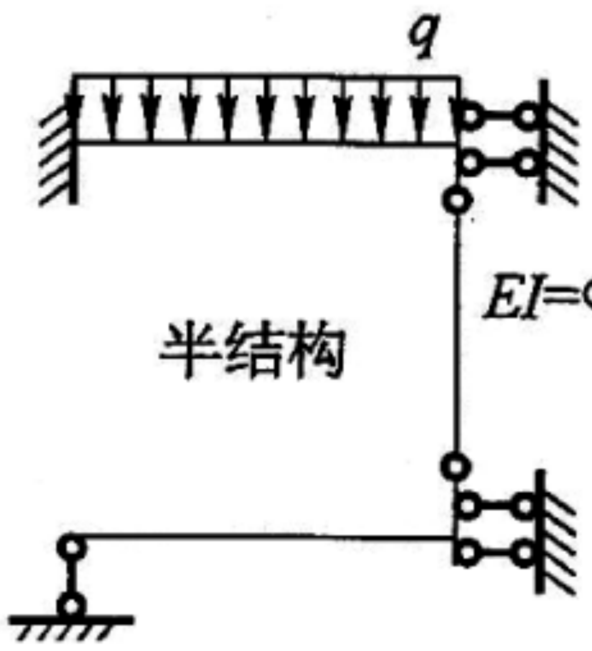


图 7-3-25

在竖杆的下支座加向下的单位力，由于为基本结构，则可画出此时的弯矩图 7-3-26 如下所示。

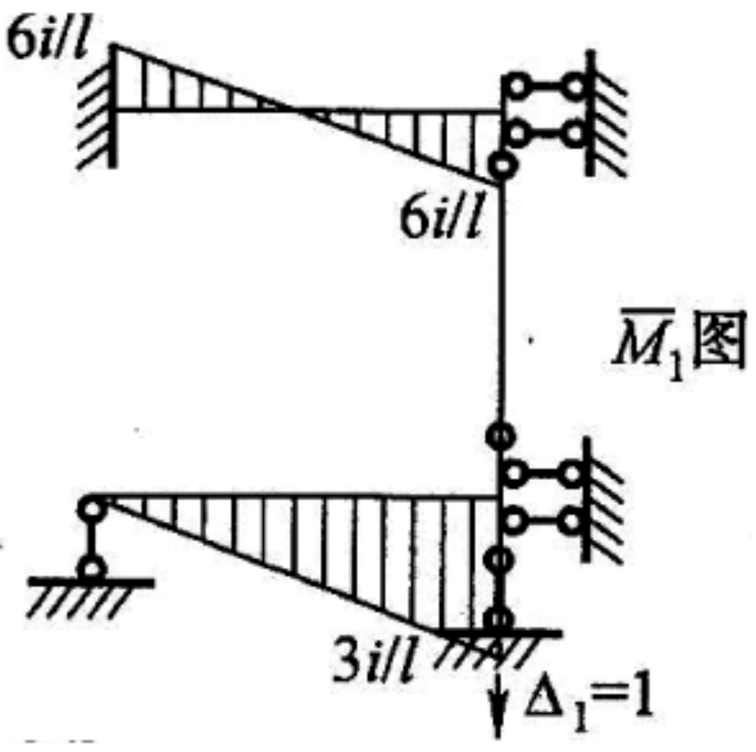


图 7-3-26

M_p 图如下图 7-3-27 所示。

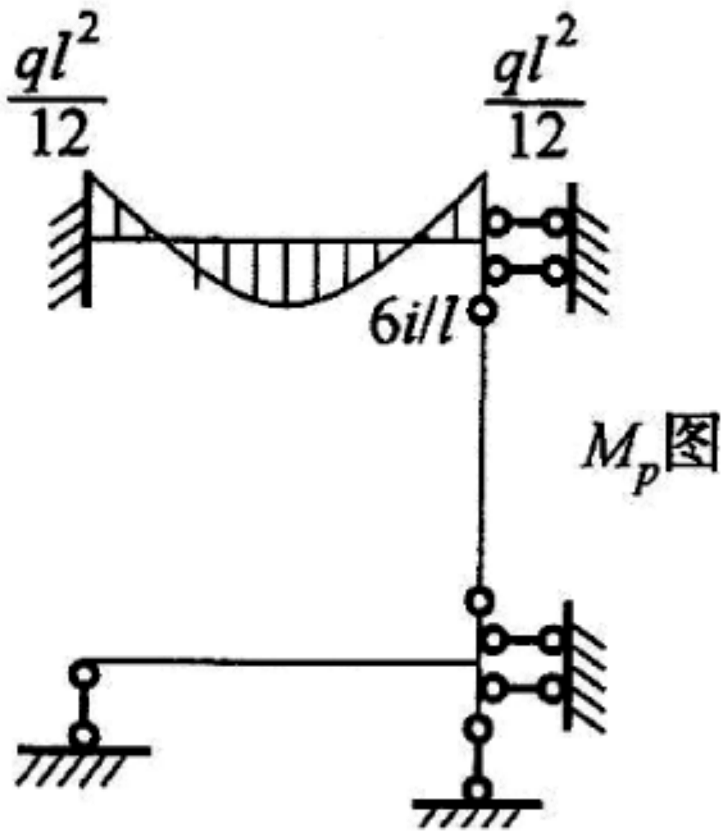


图 7-3-27

则由图乘法可得系数和自由项分别为

$$k_{11}=\frac{15i}{l^2},F_{1p}=-\frac{ql}{2}$$

所以位移为

$$\Delta_1=-\frac{F_{1p}}{k_{11}}=\frac{ql^3}{30i}$$

根据弯矩叠加可得所求最终弯矩图 7-3-28。

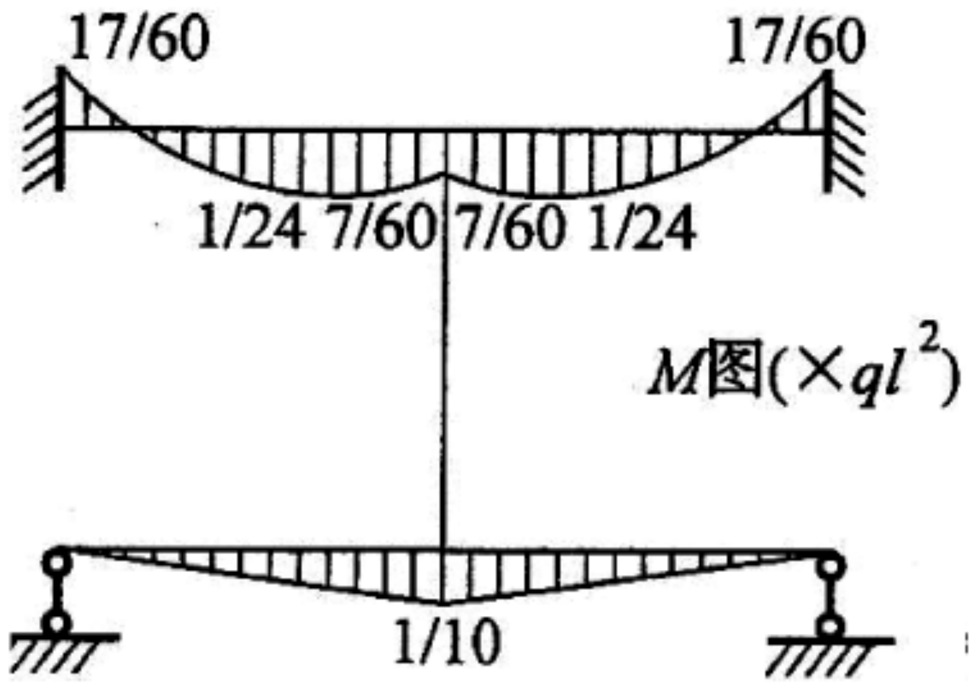


图 7－3－28

第 8 章　位移法

8.1　复习笔记

【知识框架】

- 位移法
  - 位移法的基本概念
    - 位移法的定义
    - 位移法的假设
    - 位移法与力法的异同点
      - 相同点：都是两种基本方法
      - 不同点
        - 基本未知量不同
        - 分析超静定结构步骤不同
        - 适用范围不同
    - 位移法需要解决的问题
  - 等截面直杆的转角位移方程
    - 由支座位移引起的杆端弯矩
    - 由载荷及温度变化等外因引起的杆端弯矩
    - 两端固定等截面梁的转角位移方程
    - 一端铰支另一端固定的转角位移方程
    - 等截面单跨超静定梁的固端弯矩和剪力
  - 位移法的基本未知量和基本结构
    - 基本未知量分类：角位移和线位移
    - 基本未知量数目：角位移数目和线位移数目
    - 位移法基本结构
    - 位移法基本体系
    - 特殊结构的未知量数目
  - 位移法的典型方程及计算步骤
    - 无侧移结构位移法计算
    - 有侧移结构位移法计算
    - n 个独立结点位移结构的位移法典型方程
    - 位移法的计算步骤
      - 加入附加联系得基本结构
      - 建立位移法典型方程
      - 求出各项系数及自由项
      - 求出基本未知量（位移）
      - 叠加法绘制最后弯矩图
  - 直接法建立平衡方程
  - 对称性的利用
    - 对称结构简化原则
    - 利用对称性解题技巧
  - 有侧移的斜柱刚架
    - 有侧移的斜柱刚架的定义
    - 位移法求解该结构的难点
    - 作结点位移线图
  - 温度变化时的计算
    - 温度变化时的计算难点
      - 典型方程中的自由项需考虑温度的影响
      - 温度变化时不能忽略杆的轴向变形
    - 温度变化时位移法的解题步骤

【重点难点归纳】

一、位移法基本概念

1．位移法的定义

确定原结构基本未知量，加入附加联系而得基本结构，令各附加联系发生与结构相同的结点位移，根据在载荷等外因和个结点位移共同作用下，各附加联系上的反力偶或反力均等于零的条件，建立方程，首先求出未知位移，然后再求出结构反力和内力的方法，称为位移法。

2．位移法假设

忽略受弯杆件的轴向变形，并设弯曲变形也是微小的，于是可以认为受弯直杆两端之间的距离在变形后仍保持不变。

3．位移法与力法异同点

（1）相同点

力法和位移法是分析超静定结构的两种基本方法。

（2）不同点

①基本未知量不同

a．位移法是以某些结点位移作为基本未知量；

b．力法是以多余未知力作为基本未知量。

②分析超静定结构的步骤不同

a．位移法是先确定某些位移，再据此推求内力；

b．力法是先设法求出内力，再计算相应的位移。

③适用范围不同

a．位移法一般适用于高次超静定刚架；

b．力法一般适用于低次超静定刚架。

4．位移法需解决的问题

（1）用力法算出单跨超静定梁在杆端发生各种位移时以及荷载等因素作用下的内力；

（2）确定以结构上的哪些位移作为基本未知量；

（3）如何求出这些位移。

二、等截面直杆的转角位移方程

1．由支座位移引起的杆端弯矩

图 8-1-1（a）所示两端固定的等截面梁，两端支座发生了位移。AB 杆沿杆轴方向的线位移以及在垂直杆轴方向的平移均不引起弯矩。

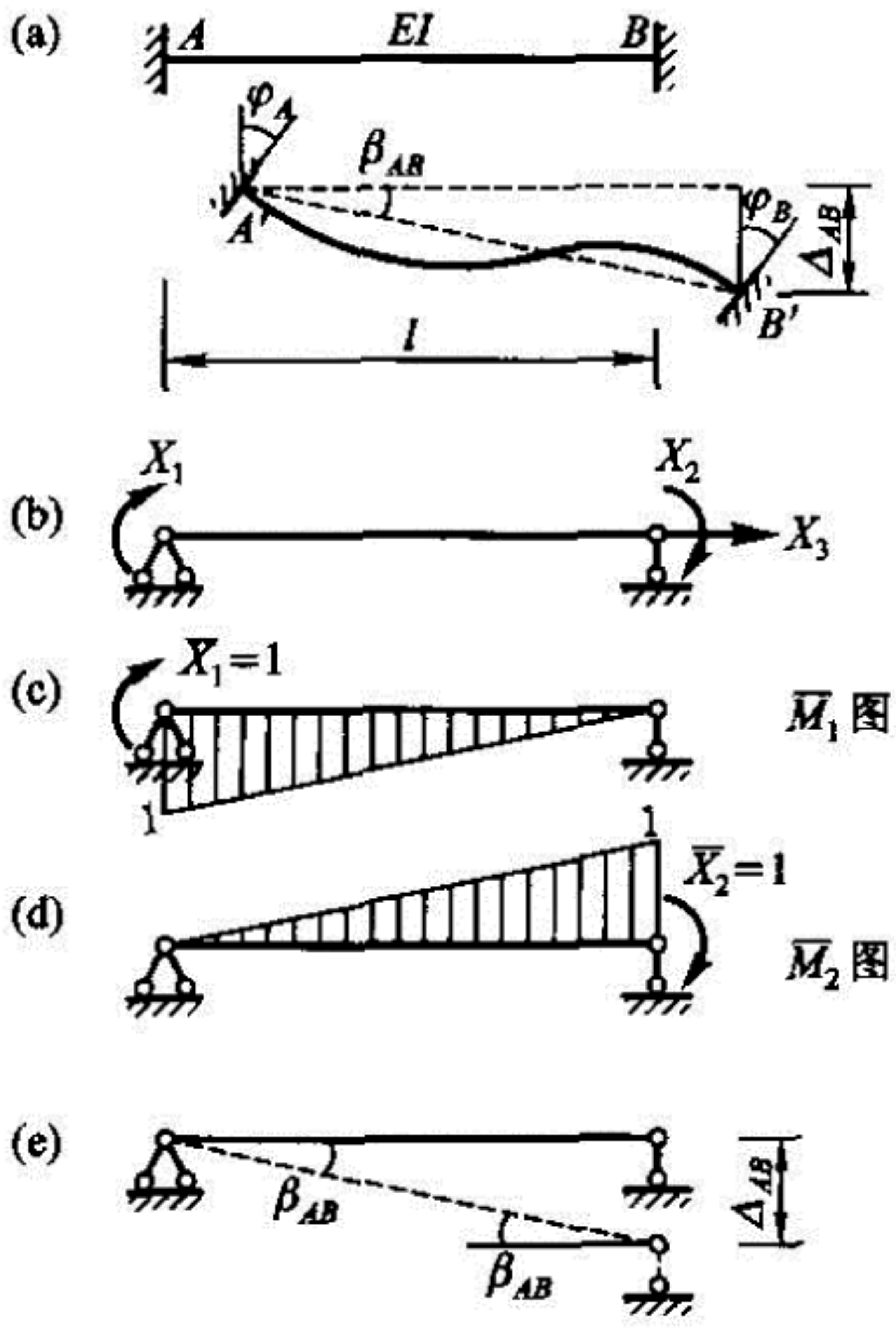


图 8-1-1

（1）由力法可以求得，杆端弯矩为

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} \\ M_{BA} &= 4i\varphi_B + 2i\varphi_A - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} \end{aligned}\right\}$$

式中，$i=\dfrac{EI}{l}$，为称为杆件的线刚度；φ_A 和 φ_B 为 A 端和 B 端转角 Δ_{AB} 为 AB 两端在垂直于杆轴方向上的相对线位移。

（2）位移法中正负号的规定

①杆端弯矩是以对杆端顺时针方向为正；

②角位移 φ_A、φ_B 均以顺时针方向为正；

③线位移 Δ_{AB} 以使整个杆件顺时针方向转动为正。

2．由载荷及温度变化等外因引起的杆端弯矩

（1）固端弯矩

固端弯矩是指梁在荷载及温度变化等外因作用下的杆端弯矩。用 M^{F}_{AB}、M^{F}_{BA} 表示。

（2）固端弯矩求法

①用力法可以解得；

②查相应的表。

3．两端固定等截面梁的转角位移方程

将支座位移和载荷及其他外因引起的杆端弯矩进行叠加，可得转角位移方程为

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=4i\varphi_A+2i\varphi_B-\frac{6i}{l}\Delta_{AB}+M^{F}_{AB}\\M_{BA}&=4i\varphi_B+2i\varphi_A-\frac{6i}{l}\Delta_{AB}+M^{F}_{BA}\end{aligned}\right\}$$

4．一端铰支另一端固定的转角位移方程

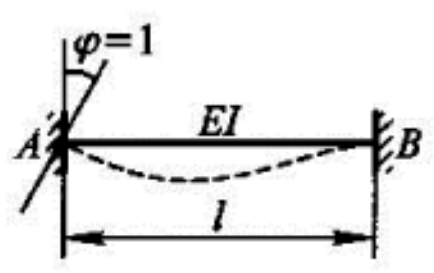
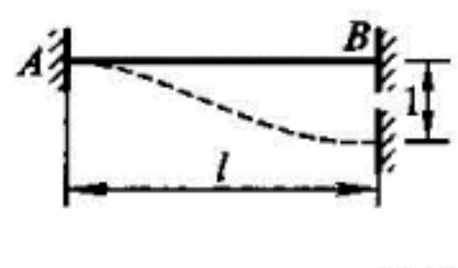
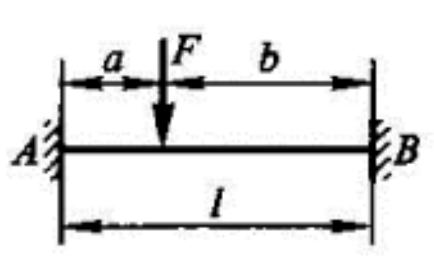
$$M_{AB}=3i\varphi_A-\frac{3i}{l}\Delta_{AB}+M^{F\prime}_{AB}$$

式中，$M^{F\prime}_{AB}=M^{F}_{AB}-\dfrac{1}{2}M^{F}_{BA}$ 为一端固定一端铰支梁的固端弯矩。

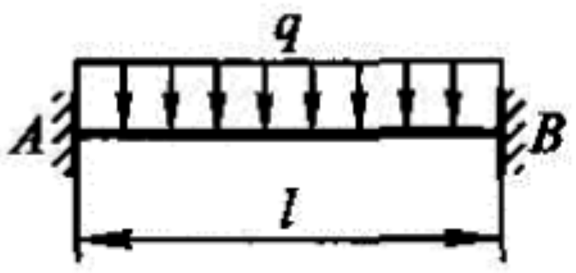
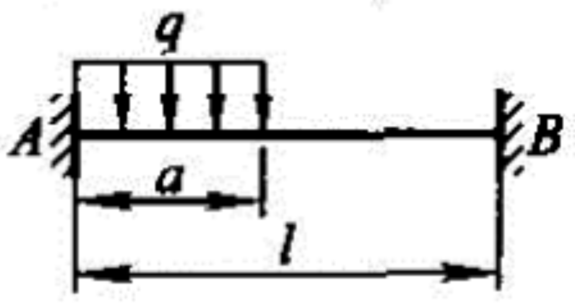
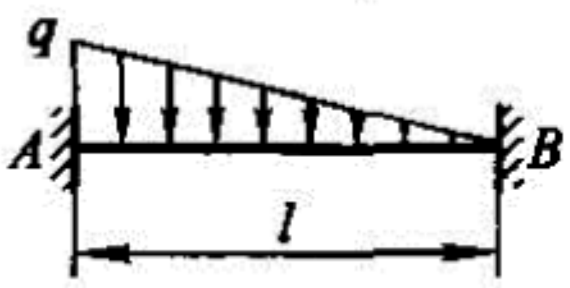
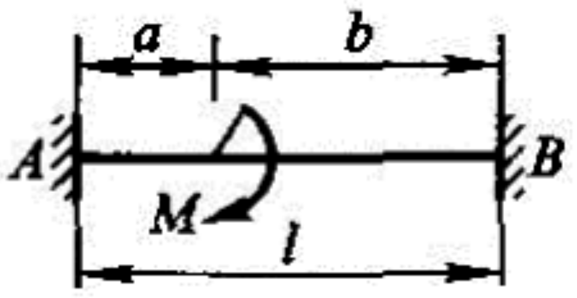
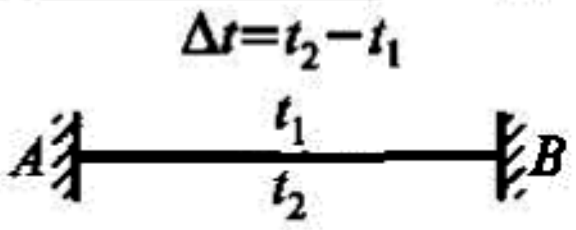
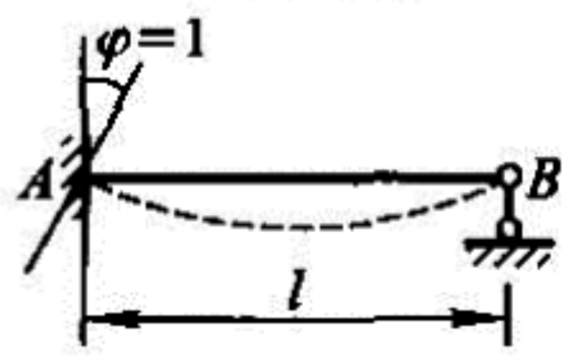
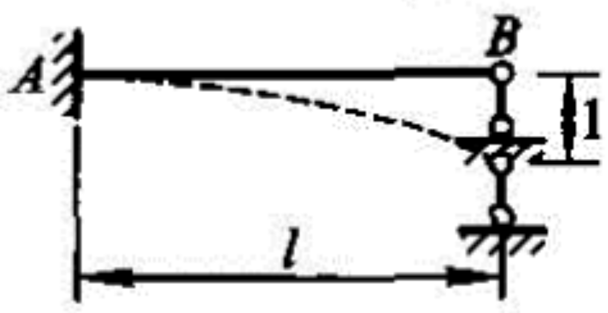
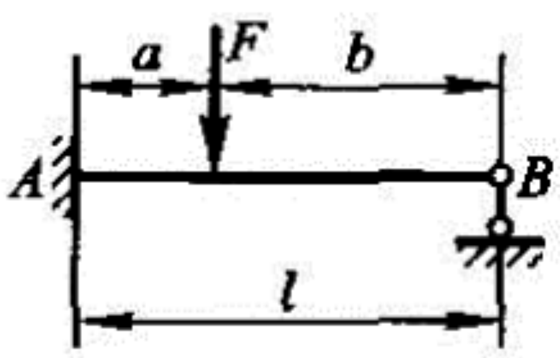
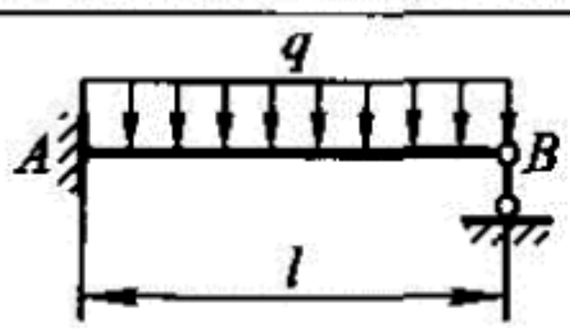
5．等截面单跨超静定梁的固端弯矩和剪力

等截面单跨超静定梁在各种不同情况下的杆端弯矩和剪力列于表 8-1-1 中。

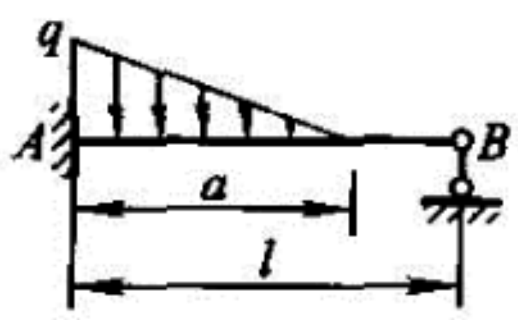
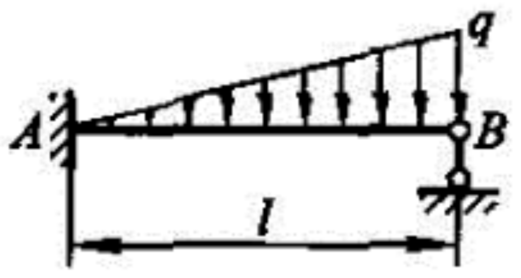
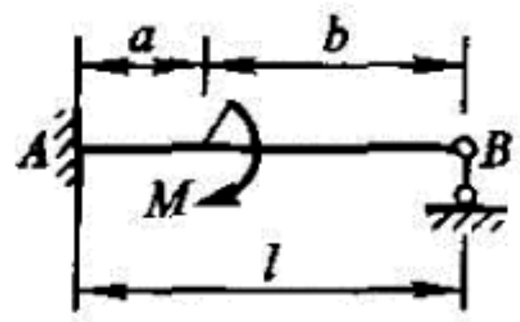
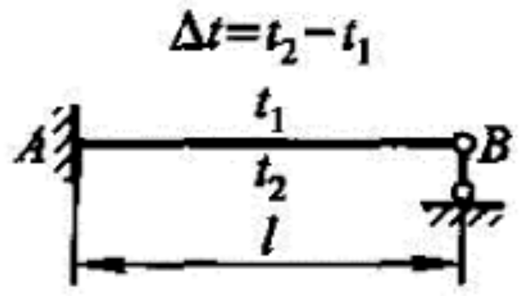
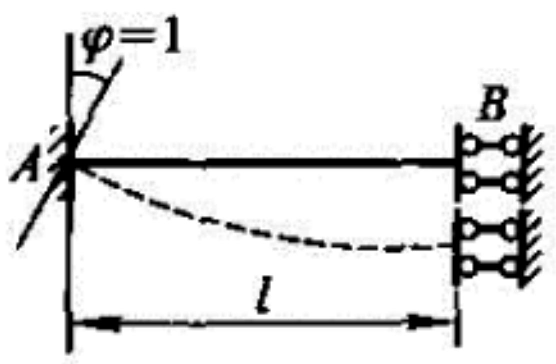
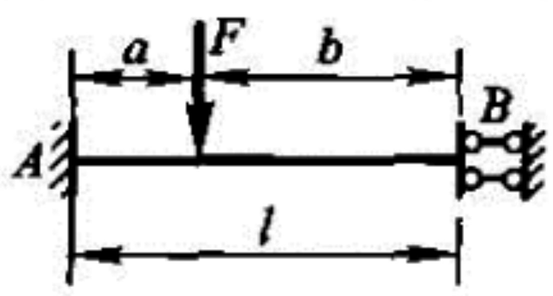
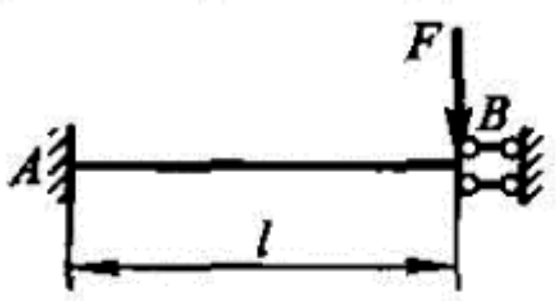
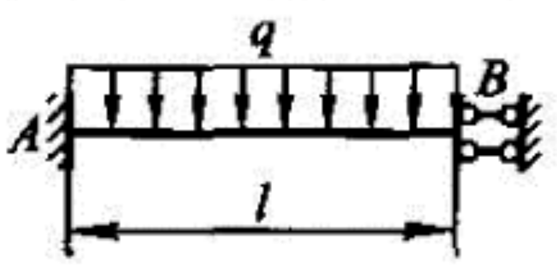
表 8-1-1　等截面直杆的杆端弯矩和剪力

编号	梁的简图	弯矩 M_{AB}	弯矩 M_{BA}	剪力 F_{SAB}	剪力 F_{SBA}
1		$4i$ $\left(i=\frac{EI}{l}\text{，下同}\right)$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$
2		$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$	$\frac{12i}{l^2}$	$\frac{12i}{l^2}$
3		$-\frac{Fab^2}{l^2}$	$\frac{Fa^2b}{l^2}$	$\frac{Fb^2(l+2a)}{l^3}$	$-\frac{Fa^2(l+2b)}{l^3}$
		当 $a=b=l/2$ 时，$-\frac{Fl}{8}$	$\frac{Fl}{8}$	$\frac{F}{2}$	$-\frac{F}{2}$

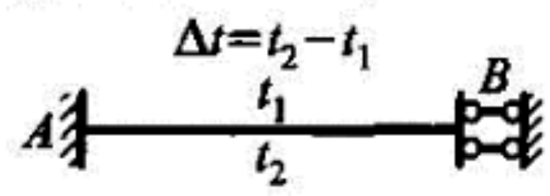
续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{SAB}	F_{SBA}
4		$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
5		$-\frac{qa^2}{12l^2}\times$ $(6l^2-8la+3a^2)$	$\frac{qa^3}{12l^2}\times$ $(4l-3a)$	$\frac{qa}{2l^3}\times$ $(2l^3-2la^2+a^3)$	$-\frac{qa^3}{2l^3}\times$ $(2l-a)$
6		$-\frac{ql^2}{20}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{7ql}{20}$	$-\frac{3ql}{20}$
7		$M\frac{b(3a-l)}{l^2}$	$M\frac{a(3b-l)}{l^2}$	$-M\frac{6ab}{l^3}$	$-M\frac{6ab}{l^3}$
8		$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0
9		$3i$	0	$-\frac{3i}{l}$	$-\frac{3i}{l}$
10		$-\frac{3i}{l}$	0	$\frac{3i}{l^2}$	$\frac{3i}{l^2}$
11		$-\frac{Fab(l+b)}{2l^2}$	0	$\frac{Fb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{Fa^2(2l+b)}{2l^3}$
		当 $a=b=l/2$ 时，$-\frac{3Fl}{16}$	0	$\frac{11F}{16}$	$-\frac{5F}{16}$
12		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8}$	$-\frac{3ql}{8}$

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{SAB}	F_{SBA}
13		$-\frac{qa^2}{24}\left(4-\frac{3a}{l}+\frac{3a^2}{5l^2}\right)$	0	$\frac{qa}{8}\left(4-\frac{a^2}{l^2}+\frac{a^3}{5l^3}\right)$	$-\frac{qa^3}{8l^2}\left(1-\frac{a}{5l}\right)$
		当 $a=l$ 时，$-\frac{ql^2}{15}$	0	$\frac{4ql}{10}$	$-\frac{ql}{10}$
14		$-\frac{7ql^2}{120}$	0	$\frac{9ql}{40}$	$-\frac{11ql}{40}$
15		$M\frac{l^2-3b^2}{2l^2}$	0	$-M\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}$	$-M\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}$
		当 $a=l$ 时，$\frac{M}{2}$	$M_B^L=M$	$-M\frac{3}{2l}$	$-M\frac{3}{2l}$
16		$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$	$\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
17		i	$-i$	0	0
18		$-\frac{Fa}{2l}(2l-a)$	$-\frac{Fa^2}{2l}$	F	0
		当 $a=\frac{l}{2}$ 时，$-\frac{3Fl}{8}$	$-\frac{Fl}{8}$	F	0
19		$-\frac{Fl}{2}$	$-\frac{Fl}{2}$	F	$F_{SB}^{L}=F$ $F_{SB}^{R}=0$
20		$-\frac{ql^2}{3}$	$-\frac{ql^2}{6}$	ql	0

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{SAB}	F_{SBA}
21		$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0

三、位移法的基本未知量和基本结构

1．基本未知量分类

（1）独立的结点的角位移；

（2）独立的结点的线位移。

2．基本未知量数目

（1）确定独立的结点角位移数目

①在同一刚结点处，各杆端的转角都是相等的，因此每一个刚结点只有一个独立的角位移未知量。

②在固定支座处，其转角等于零或已知的支座位移值，不作为基本未知量。

③在铰结点或铰支座处，各杆端的转角不是独立的，确定杆件内力时可以不需要它们的数值，故可不作为基本未知量。

因此，结构独立的结点角位移数目等于刚结点的数目。如图 8-1-2（a）所示刚架，其独立的结点角位移数目为 2。

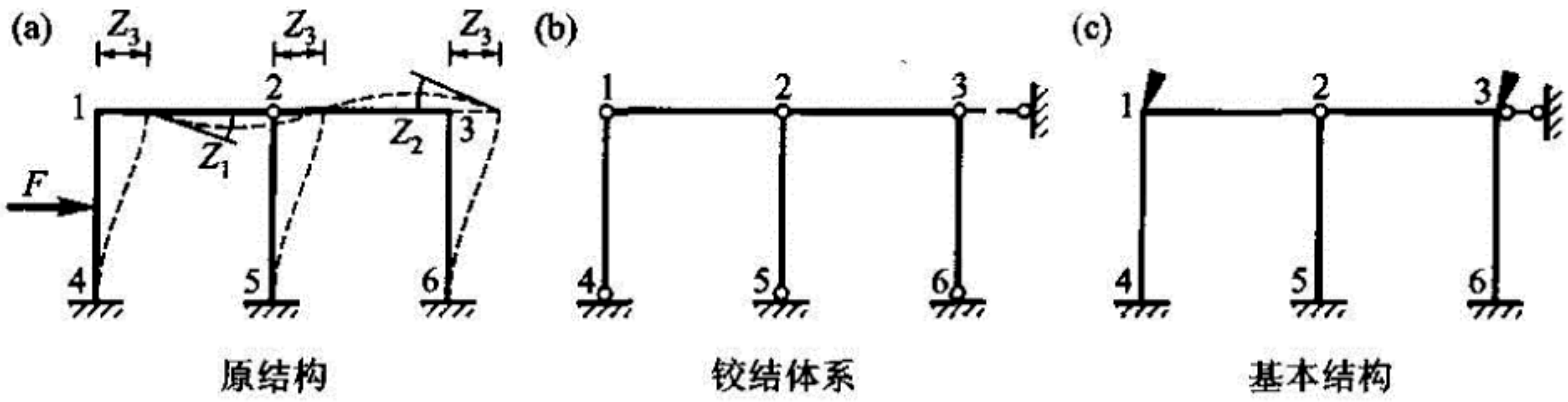


图 8-1-2

（2）确定独立的结点线位移数目

①直接法

在一般情况下每个结点均可能有水平和竖向两个线位移。由于受弯杆件略去其轴向变形并设弯曲变形也是微小的，故可认为受弯直杆两端之间的距离在变形后仍保持不变，这样每一受弯直杆就相当于一个约束，从而减少了独立的结点线位移数目。

如图 8-1-2（a）所示刚架，结点 1、2、3 均无竖向位移，均有相同的水平位移。因此，只有一个独立的结点线位移。

②间接法

假设把原结构的所有刚结点和固定支座均改为铰结，从而得到一个相应的铰结体系。

a．若铰结体系为几何不变，则原结构所有结点均无线位移；

b．若铰结体系为几何可变或瞬变，添加数量最少的支座链杆保证胶结体系几何不变，则原结构独立的结点线位移数目等于所需添加的最少支座链杆数。

如图 8-1-2（a）所示刚架，其相应铰结体系如图 8-1-2（b）所示，它是几何可变的，在某结点处增添一根非竖向的支座链杆才能成为几何不变的，故原结构独立的结点线位移数目为 1。

注：间接法适用于简单结构，不适用于复杂结构。

3．位移法的基本结构

（1）定义

位移法的基本结构是指把每一根杆件都暂时变为两端固定的或一端固定一端铰支的单跨超静定梁。

（2）构建基本结构的方法

①在每个刚结点上假想地加上一个附加刚臂，以阻止刚结点的转动；

②加上附加支座链杆以阻止结点的线位移。

4．基本体系

基本体系是指基本结构在荷载和基本未知量即独立结点位移共同作用下的体系。

5．举例

如图 8-1-3（a）所示刚架，基本未知量为 6 个，结点角位移数目为 4，结点线位移数目为 2。加上 4 个刚臂和两根支座链杆后，可得到基本结构如图 8-1-3（b）所示。

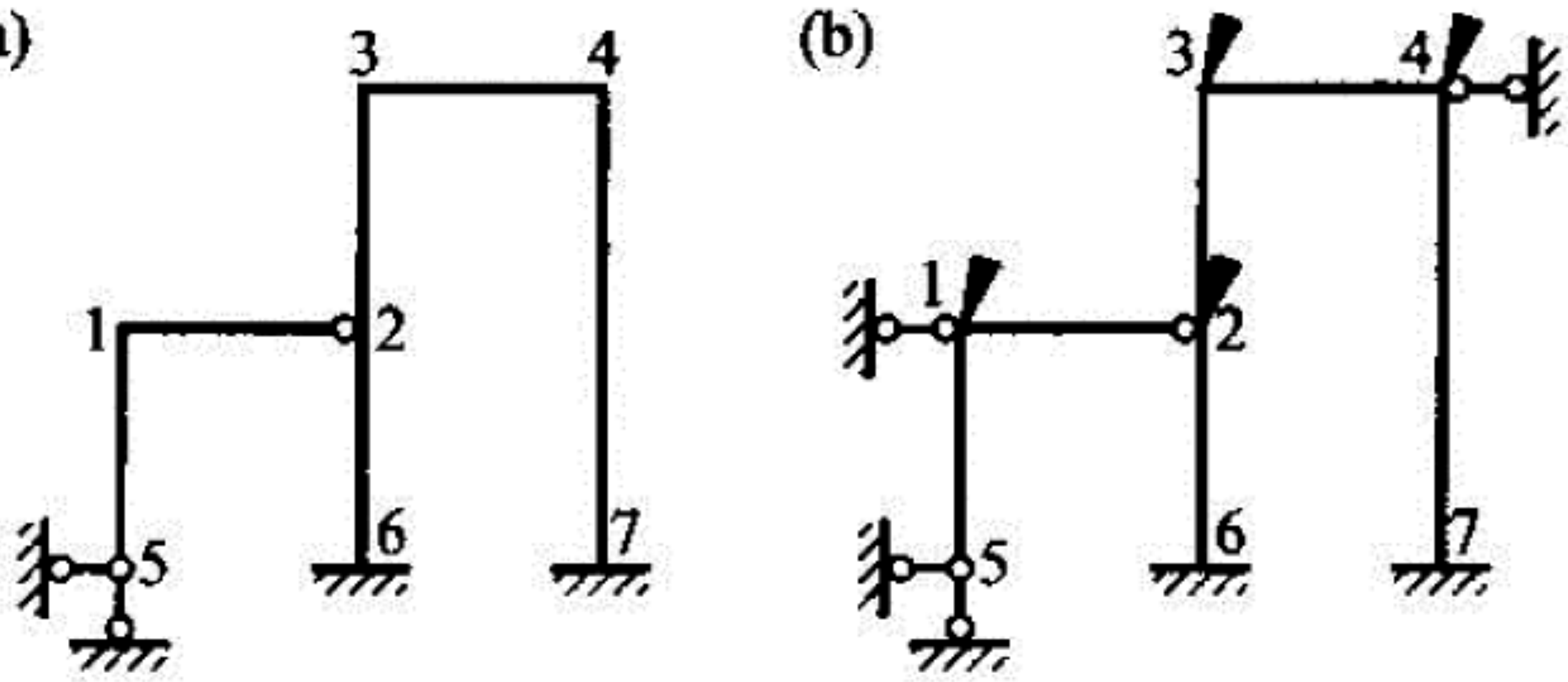


图 8-1-3

6．特殊结构的未知量数目

对于需要考虑轴向变形的链杆或对于受弯曲杆，其两端距离不能看作不变。因此，图 8-1-4（a）、（b）所示结构，其独立的结点线位移数目应为 2 而不是 1。

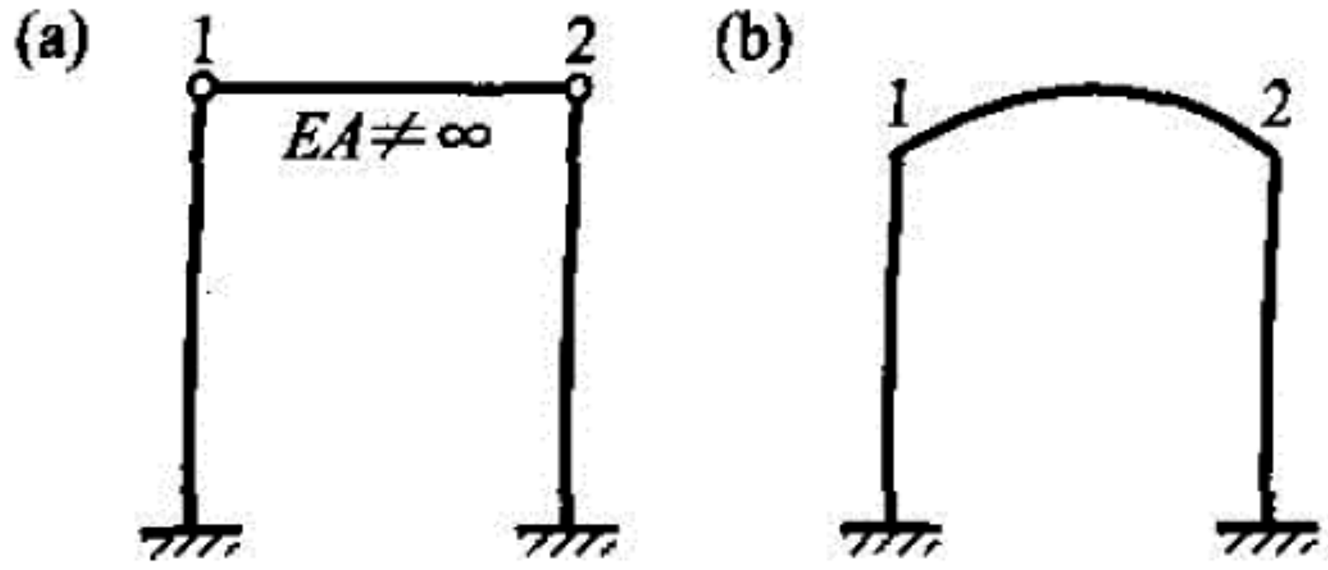


图 8-1-4

四、位移法的典型方程及计算步骤

1．无侧移结构位移法计算

（1）无侧移结构的定义

无侧移结构是指各杆均无侧向线移产生的结构。

（2）举例

图 8-1-5（a）所示为无侧移结构的连续梁，E_I 为常数。

①确定基本未知量

此连续梁只有一个独立结点角位移 Z_1。

②构建基本结构

在结点 B 加一附加刚臂，便得基本结构。

③列位移基本方程

令附加刚臂发生与原结构相同的角位移 Z_1（图 8-1-5（b）），则基本结构的位移和受力与原结构完全一致，因此，基本结构在结点位移 Z_1 和荷载共同作用下，刚臂上的反力偶 R_1 必定为零（图 8-1-5（b））。

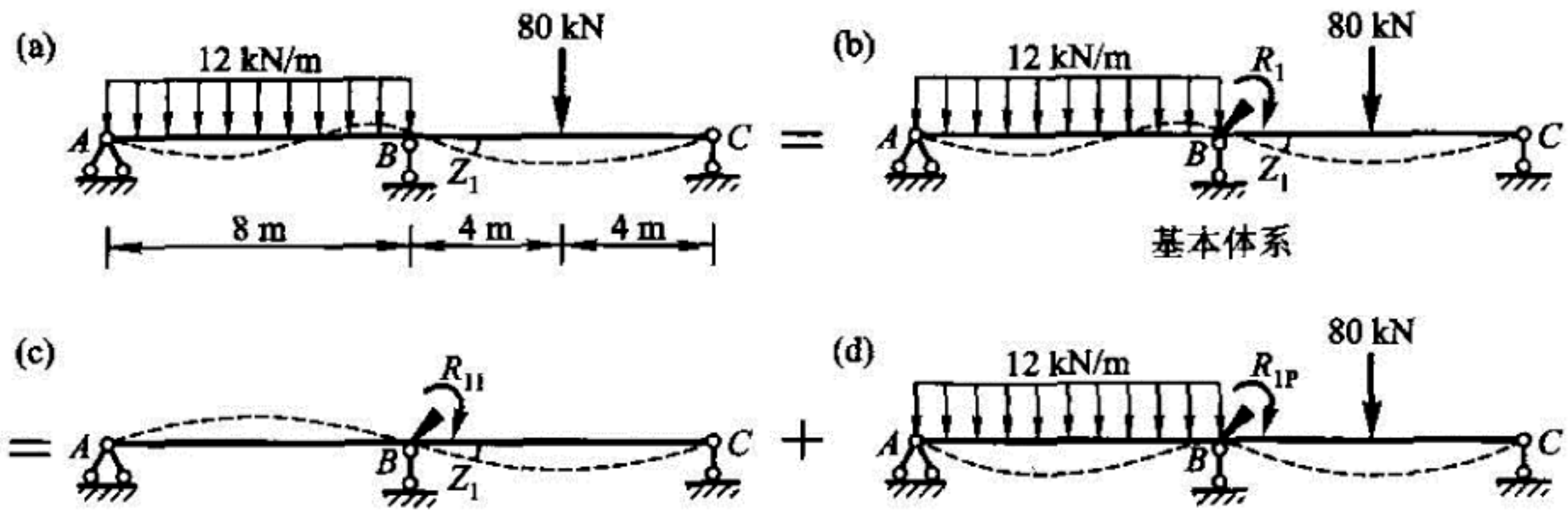


图 8-1-5

$$R_1 = R_{11} + R_{1P} = 0$$

式中，R_{1P} 为载荷所引起的钢臂上的反力偶；R_{11} 为 Z_1 位移所引起的钢臂上的反力偶；R_{ij} 第一个下标表示该反力的位置，第二个下标表示引起该反力的原因。

上式可写为

$$r_{11}Z_1+R_{1P}=0$$

式中，r_{11} 为由单位位移 $\bar{Z}_1=1$ 所引起的附加刚臂上的反力偶。

该式为求解基本未知量 Z_1 的位移法基本方程。

④求 r_{11} 和 R_{1p}

a．基本体系中各杆均可视为单跨超静定梁，利用表 8-1-1 计算简图的杆端弯矩，分别绘出基本结构在$\bar{Z}_1=1$作用下的弯矩图（称为$\overline{M}_1$图）和荷载作用下的弯矩图（称为 M_p 图），如图 8-1-6（a）、（b）所示。

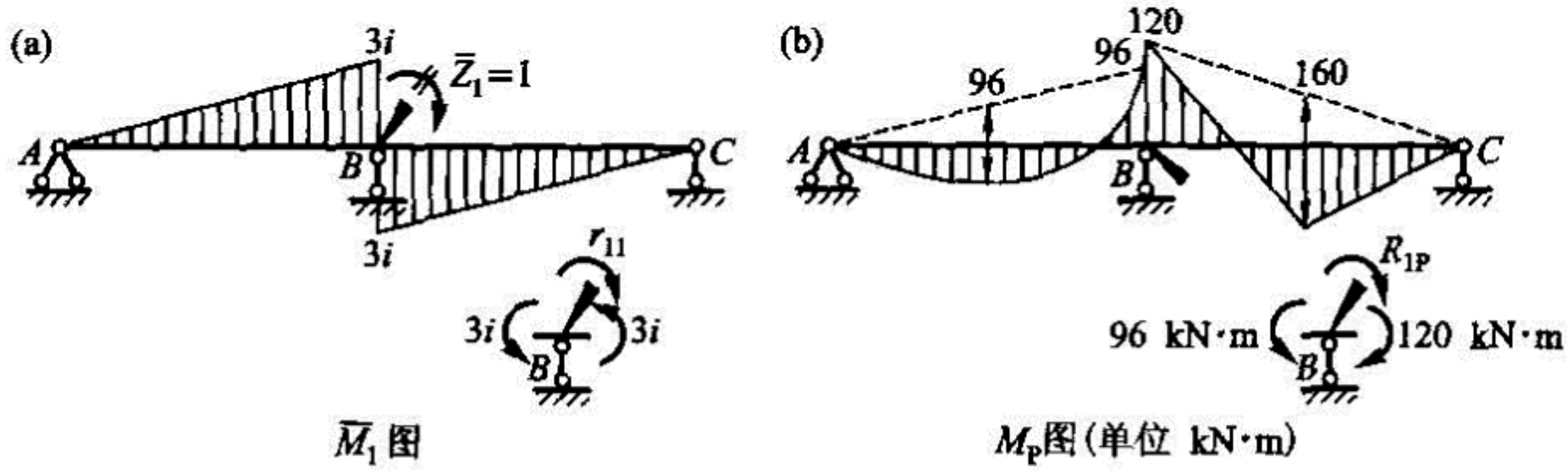


图 8-1-6

b．由$\overline{M}_1$图，取结点 B 为隔离体，用力矩平衡条件$\sum M_B=0$，可得

$$r_{11}=3i+3i=6i$$

式中，$i=\frac{EI}{8\ \text{m}}$为杆件的线刚度。

c．由 M_p 图，可得

$$R_{1P}=96\ \text{kN}\cdot\text{m}-120\ \text{kN}\cdot\text{m}=-24\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

⑤求 Z_1

将 r_{11} 和 R_{1P} 的值代入位移法基本方程，可求出

$$Z_1=-\frac{R_{1P}}{r_{11}}=\frac{4\ \text{kN}\cdot\text{m}}{i}$$

结果为正，表示 Z_1 的方向与所设相同。

⑥作结构弯矩图

结构的最后弯矩图可由叠加法绘制

$$M=Z_1\overline{M}_1+M_P$$

BC 杆 B 端的弯矩为

$$M_{BC}=\frac{4\ \text{kN}\cdot\text{m}}{i}\times3\ i-120\ \text{kN}\cdot\text{m}=-108\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

结构 M 图如图 8-1-7 所示

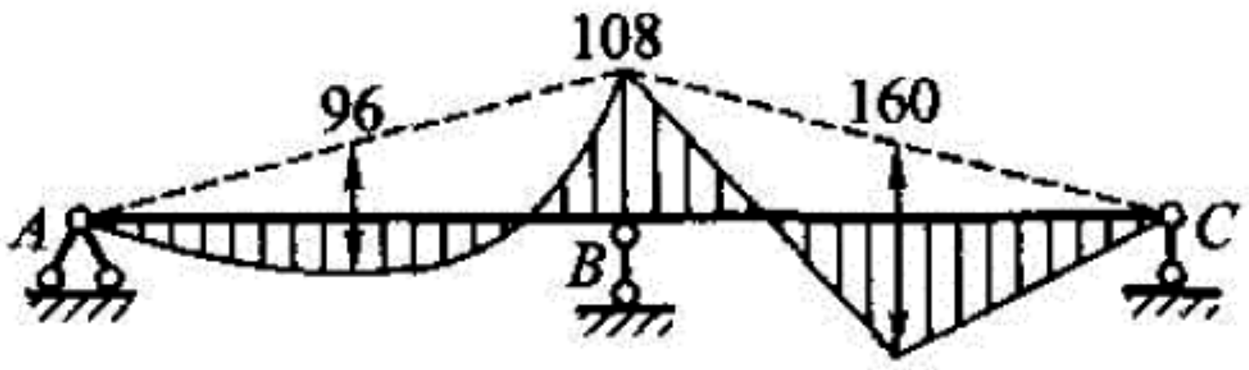


图 8-1-7

2．有侧移结构的位移法计算

（1）定义

有侧移结构是指结构中有杆发生侧移的结构。

（2）举例

图 8-1-8 所示一有侧移刚架。

①基本未知量

此刚架有一个独立结点角位移 Z_1，和一个独立结点线位移 Z_2。

②构建基本结构

在结点 1 处加一刚臂，结点 2 处（也可在结点 1 处）加一水平支承链杆，得到基本结构。

③列位移基本方程

a．令其附加刚臂发生与原结构相同的转角 Z_1。同时令附加链杆发生与原结构相同的线位移 Z_2。基本结构在结点位移 Z_1、Z_2 和荷载共同作用下，刚臂上的附加反力偶 R_1 和链杆上的附加反力 R_2 都应等于零。

b．设由 Z_1、Z_2 和载荷所引起的刚臂上的反力偶分别为 R_{11}、R_{12} 和 R_{1p}，所引起链杆上的附加反力分别为 R_{21}、R_{22} 和 R_{2p}（图 8-1-8（c），（d）和（e）），则根据叠加原理，可得

$$R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0$$
$$R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0$$

c．再设以 r_{11}、r_{12} 分别表示由单位位移 $\bar{Z}_1 = 1$ 和 $\bar{Z}_2 = 1$ 所引起的刚臂上的反力偶，以 r_{21}、r_{22} 分别表示由单位位移 $\bar{Z}_1 = 1$ 和 $\bar{Z}_2 = 1$ 所引起的链杆上的反力，则上式可写为

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{aligned}\right\}$$

该方程称为位移法典型方程。

d．位移法方程的物理意义

基本结构在荷载等外因和各结点位移的共同作用下，每一个附加联系上的附加反力偶和附加反力都应等于零。因此，位移法方程实质上是反映原结构的静力平衡条件。

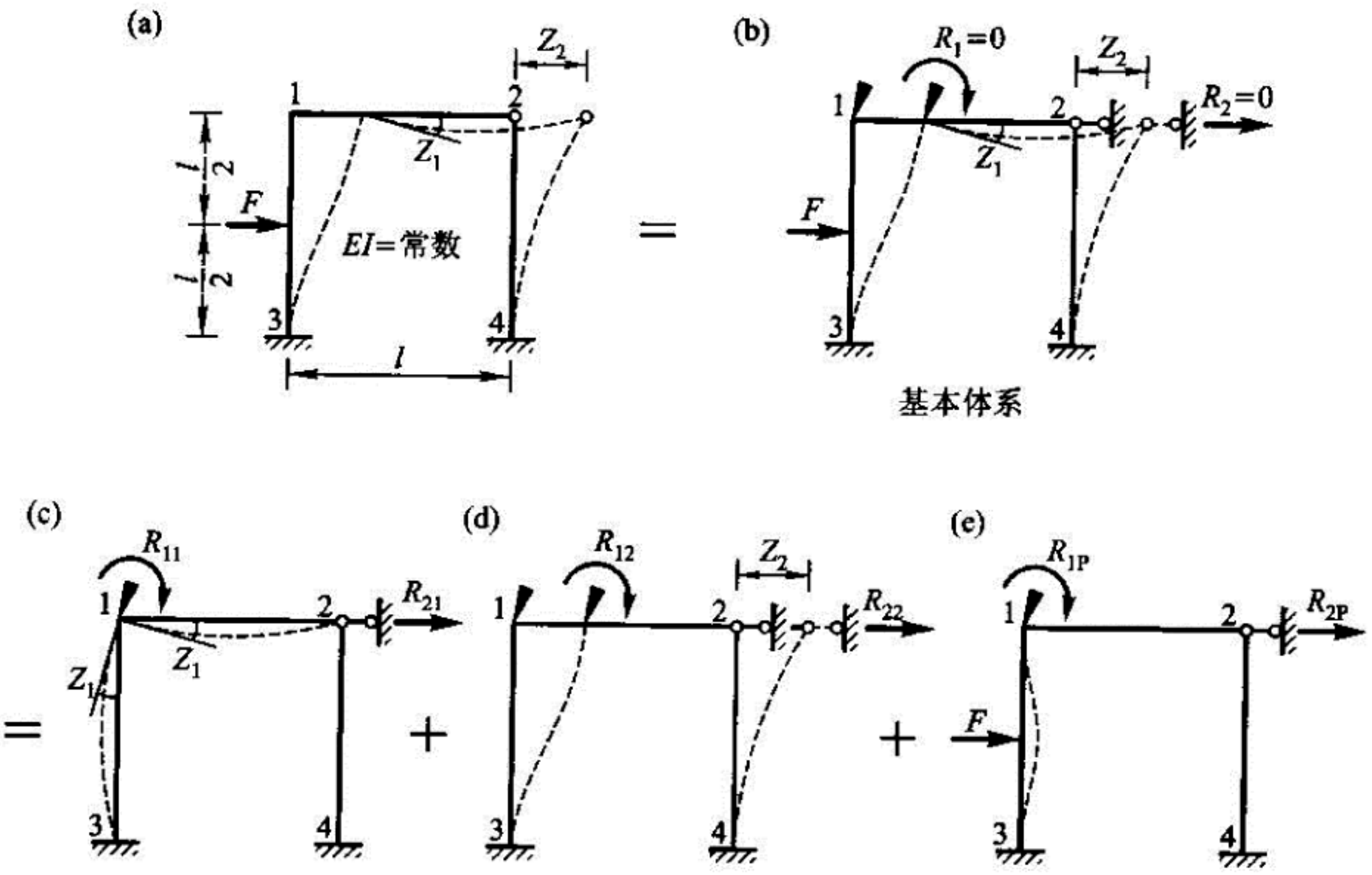


图 8-1-8

3．n 个独立结点位移结构的位移法典型方程

（1）典型方程

对于具有 n 个独立结点位移的结构，相应地在基本结构中需加入 n 个附加联系，根据每个附加联系的附加反力偶或附加反力均应为零的平衡条件，同样可建立 n 个方程如下

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}Z_1+\cdots+r_{1i}Z_i+\cdots+r_{1n}Z_n+R_{1P}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{i1}Z_1+\cdots+r_{ii}Z_i+\cdots+r_{in}Z_n+R_{iP}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n1}Z_1+\cdots+r_{ni}Z_i+\cdots+r_{nn}Z_n+R_{nP}=0 \end{array}\right\}$$

（2）方程相关说明

①定义

a．主系数

主系数是指在主斜线上的系数，又称主反力。

b．副系数

副系数是指除主系数之外的其他系数 r_{ij}，又称副反力。

c．自由项

自由项是指 R_{iP}。

②系数和自由项的符号规定

a．主系数的方向总是与所设位移 z_i 的方向一致，故恒为正，且不会为零；

b．副系数和自由项则可能为正、负或零，与该附加联系所设位移方向一致者为正，反之为负。

③根据反力互等定理知

主斜线两边处于对称位置的两个副系数 r_{ij} 与 r_{ij} 是相等的。

④结构刚度系数和结构刚度方程

由于在位移法典型方程中，每个系数都是单位位移所引起的附加联系的反力（或反力偶），显然，结构的刚度愈大，这些反力（或反力偶）的数值也愈大。

a．位移法典型方程的系数又称结构的刚度系数；

b．位移法典型方程又称结构的刚度方程；

c．位移法也称刚度法。

4．位移法的计算步骤

（1）确定原结构的基本未知量即独立的结点角位移和线位移数目，加入附加联系而得到基本结构。

（2）令各附加联系发生与原结构相同的结点位移，根据基本结构在荷载等外因和各结点位移共同作用下，各附加联系上的反力偶或反力均应等于零的条件，建立位移法的典型方程。

（3）绘出基本结构在各单位结点位移作用下的弯矩图和荷载作用下（或支座位移、温度变化等其他外因作用下）的弯矩图，由平衡条件求出各系数和自由项。

（4）解算典型方程，求出作为基本未知量所代表的各结点位移。

（5）按叠加法绘制最后弯矩图。

五、直接由平衡条件建立位移法基本方程

1．举例

如图 8-1-9（a）所示的刚架。

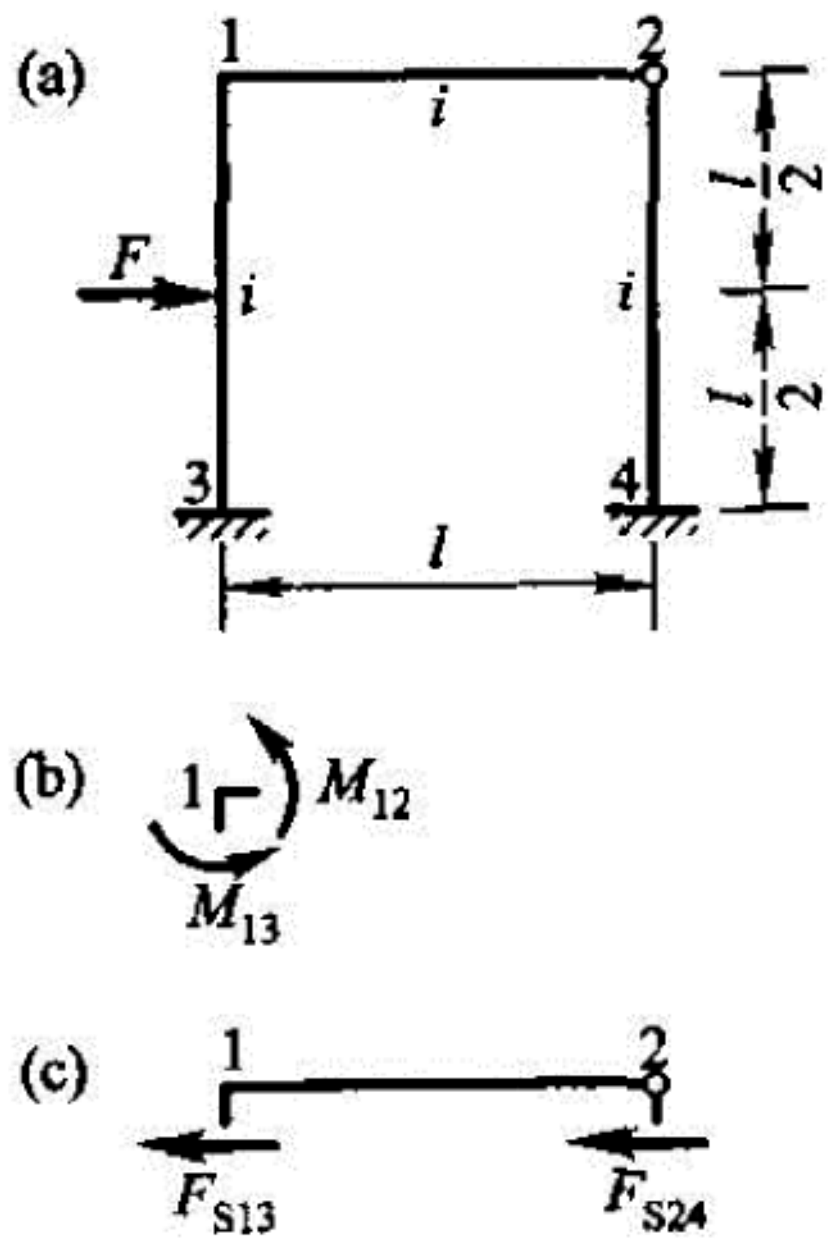


图 8-1-9

（1）此刚架用位移法求解时有两个基本未知量：刚结点 1 的转角 Z_1 和结点 1、2 的水平位移 Z_2。

（2）根据结点 1 的力矩平衡条件 $\sum M_1=0$（图 8-1-9（b））及截取两柱顶端以上横梁部分为隔离体的投影平衡条件 $\sum F_x=0$（图 8-1-9（c）），可写出如下两个方程

$$\sum M_1=M_{13}+M_{12}=0 \qquad (a)$$

$$\sum F_x=F_{S13}+F_{S24}=0 \qquad (b)$$

（3）利用转角位移方程及表 8-1-1，并假设 Z_1 为顺时针方向，Z_2 向右，可得

$$M_{13}=4iZ_1-\frac{6i}{l}Z_2+\frac{Fl}{8}$$

$$M_{12}=3iZ_1$$

又由表 8-1-1，可得

$$F_{S13} = -\frac{6i}{l}Z_1 + \frac{12i}{l^2}Z_2 - \frac{F}{2}$$

$$F_{S24} = \frac{3i}{l^2}Z_2$$

（4）将以上四式代入式（a）及（b）得

$$\begin{cases} 7iZ_1 - \frac{6i}{l}Z_2 + \frac{Fl}{8} = 0 \\ -\frac{6i}{l}Z_1 + \frac{15i}{l^2}Z_2 - \frac{F}{2} = 0 \end{cases}$$

（5）直接由平衡条件建立的位移法基本方程与上一种方法所建立的典型方程完全一样。可见，两种方法本质相同，只是在处理手法上稍有差别。

2．方法步骤

（1）一般情况下，当结构有 n 个基本未知量时，可建立 n 个方程。每一个结点转角都有一个相应的刚结点力矩平衡方程，每一个独立的结点线位移都有一个相应的截面平衡方程。

（2）解 n 个方程，求解出 n 个结点位移。

（3）由转角位移方程算得各杆杆端的最后弯矩。

六、对称性的利用

1．对称结构简化原则

如图 8-1-10（a）所示的对称刚架。

（1）对称结构在正对称荷载作用下只有正对称的基本未知量，即两结点的一对正对称的转角 Z_1（图 8-1-10（b））；

（2）对称结构在反对称荷载作用下只有反对称的基本未知量，即 Z_2 和 Z_3（图 8-1-10（c））。

2．利用对称性解题技巧

（1）当对称结构承受一般非对称荷载作用时，可将荷载分解为正、反对称的两组，分别加于结构上求解，然后再将结果叠加。

（2）对称结构在正、反对称载荷作用的情况下，均可只取结构的一半来进行计算（图 8-1-10（d）、（e））。

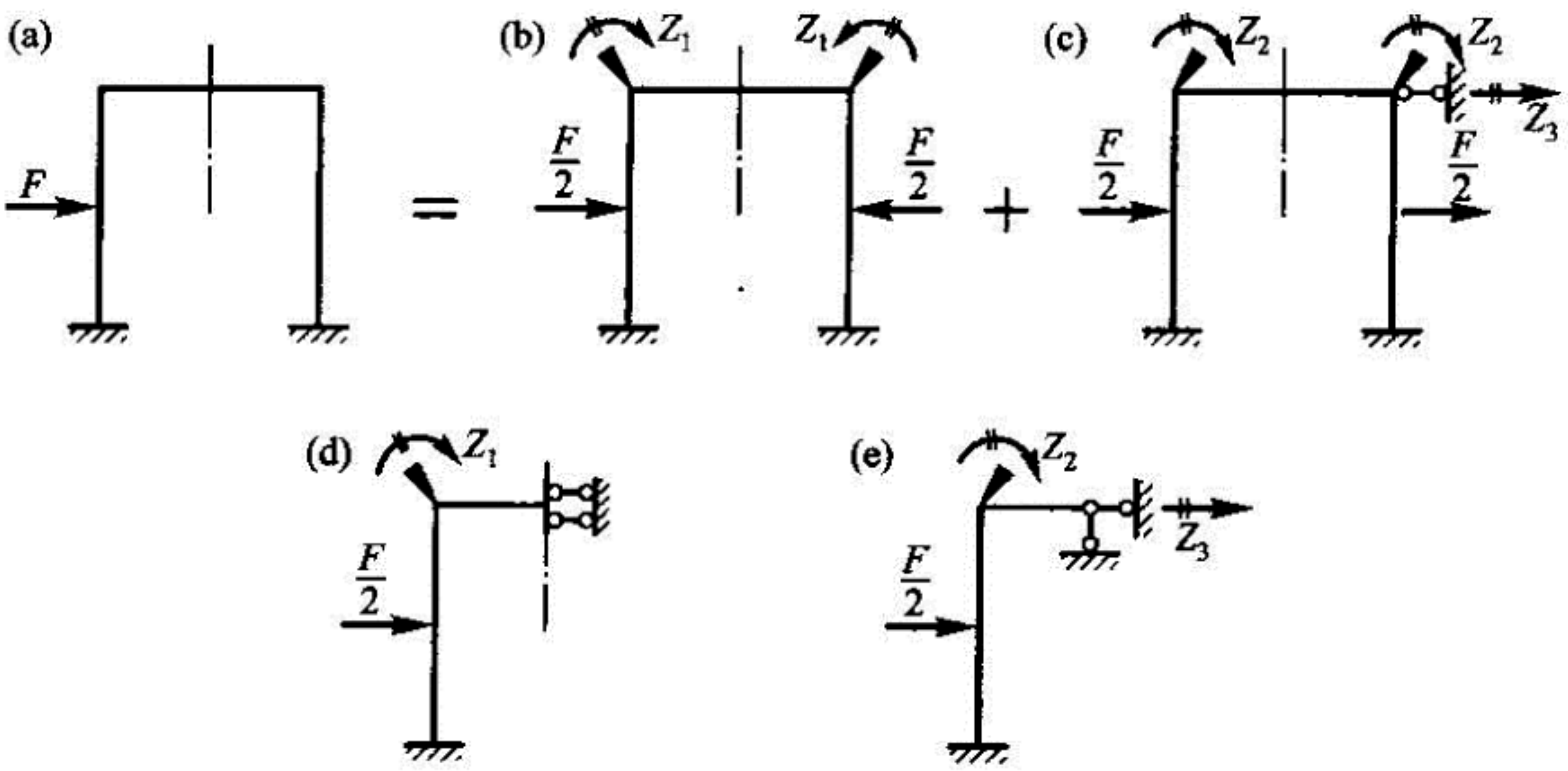


图 8-1-10

（3）用位移法分析图 8-1-10（d）所示半刚架时，可以将原两端固定的梁在正对称情况下的内力图作出，然后截取其一半，即可得到一端固定另一端滑动的梁的内力，但要注意梁线刚度是否变化。

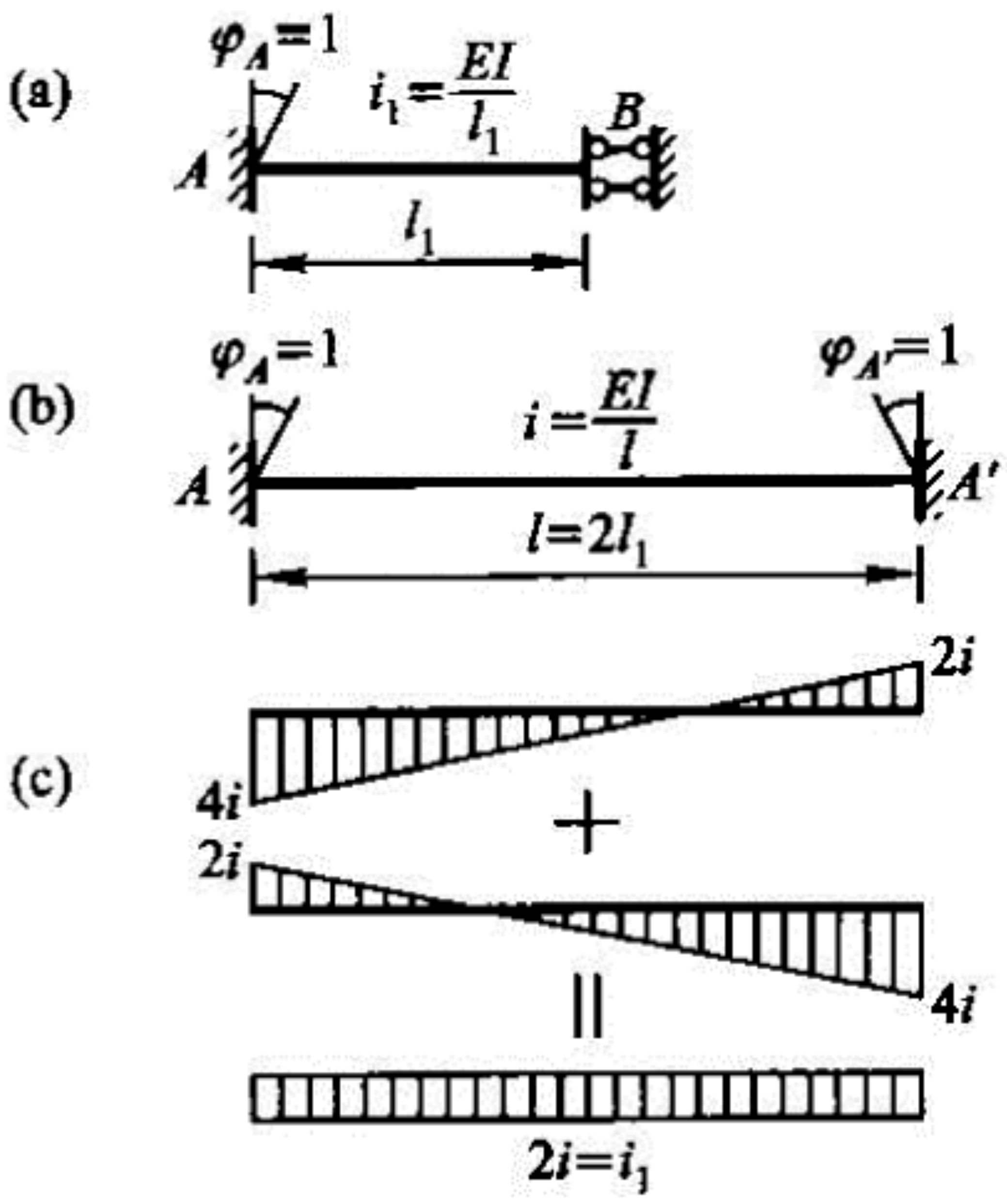


图 8-1-11

（4）对称结构在反对称载荷作用时，用力法解的未知量较少，应采用力法求解；对称结构在对称载荷作用时，用位移法解的未知量较少，应采用位移法求解。

如图 8-1-12（a）所示对称刚架，在正、反对称荷载下，用不同的方法计算时，基本未知量数目如表 8-1-2 所示。

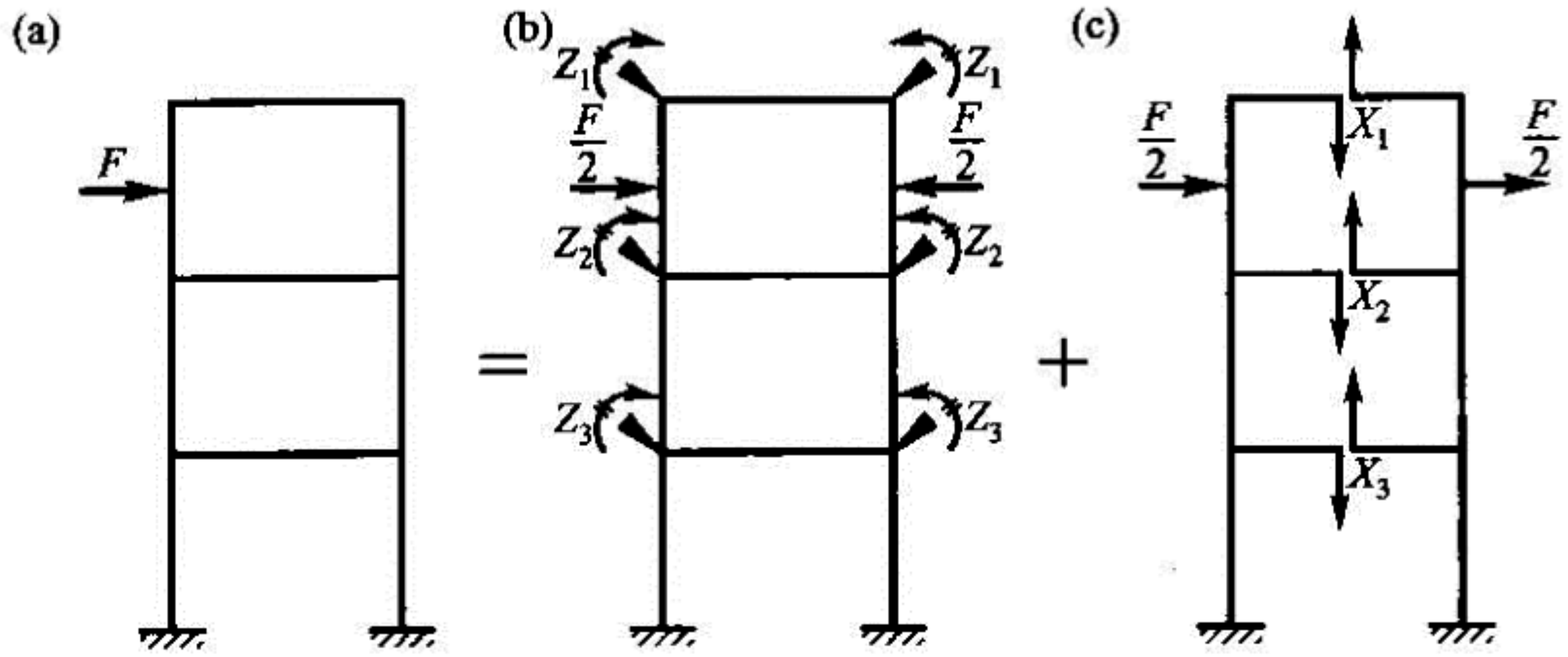


图 8-1-12

表 8-1-2　基本未知量数目比较

荷　　载	基本未知量数目	
	位　移　法	力　　法
正　对　称	3	6
反　对　称	6	3

七、有侧移的斜柱刚架

1．定义

有侧移的斜柱刚架是指有结点线位移且具有斜柱的刚架。

2．位移法解该结构的难点

（1）绘制基本结构发生结点单位线位移时的弯矩图，根本难点在于确定当结点发生线位移时各杆两端的相对线位移，即作结点位移线图。

（2）在计算系数和自由项时，附加链杆上的反力计算亦略为复杂。

3．作结点位移线图

图 8-1-13（a）所示为一具有斜柱的刚架发生结点线位移的情形；图 8-1-13（b）为对应的结点位移图。

（1）结点位移线图具体作法

①任选一点 O 作为不动的点，称为极点，它代表所有各结点位移前的位置。A、D 两点是不动的，与 O 点重合；

②作 OB 垂直于杆 AB；再过 B 点作杆 BC 的垂线；又过 O 点作杆 CD 的垂线，便得出交点 C。

（2）结点位移线图中各量具体含义

①向量 OB、OC 即分别代表 B、C 点的位移；

②AB、BC、CD 则分别代表 AB 杆、BC 杆、CD 杆两端的相对线位移。

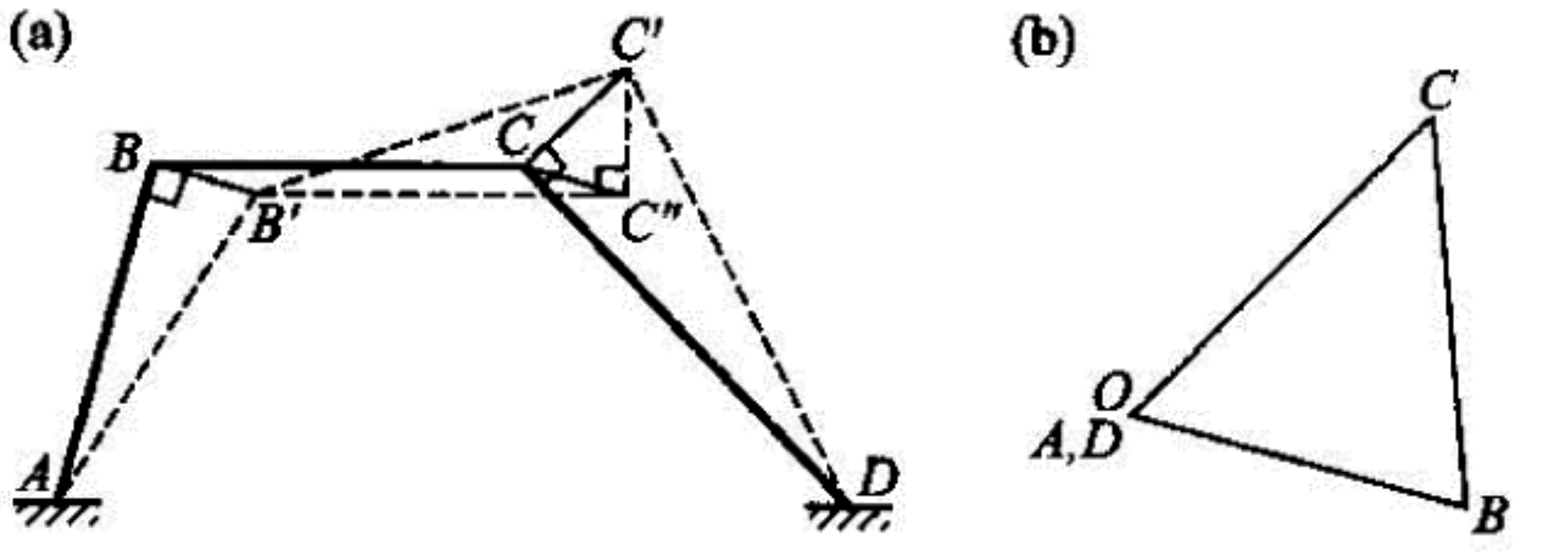


图 8-1-13

八、温度变化时的计算

1．温度变化时的计算难点

（1）计算典型方程中的自由项。自由项是基本结构由于温度变化而产生的附加联系中的反力偶或反力，在作出了基本结构在温度变化影响下的弯矩图后，由平衡条件求出这些反力偶或反力。

（2）在温度变化时不能忽略杆件的轴向变形，因此受弯直杆两端距离不变的假设不再适用。

2．举例

试绘图 8-1-14（a）所示刚架温度变化时的弯矩图。各杆的 EI 为常数，截面为矩形，其高度 $h = l/10$，材料的线膨胀系数为 α。

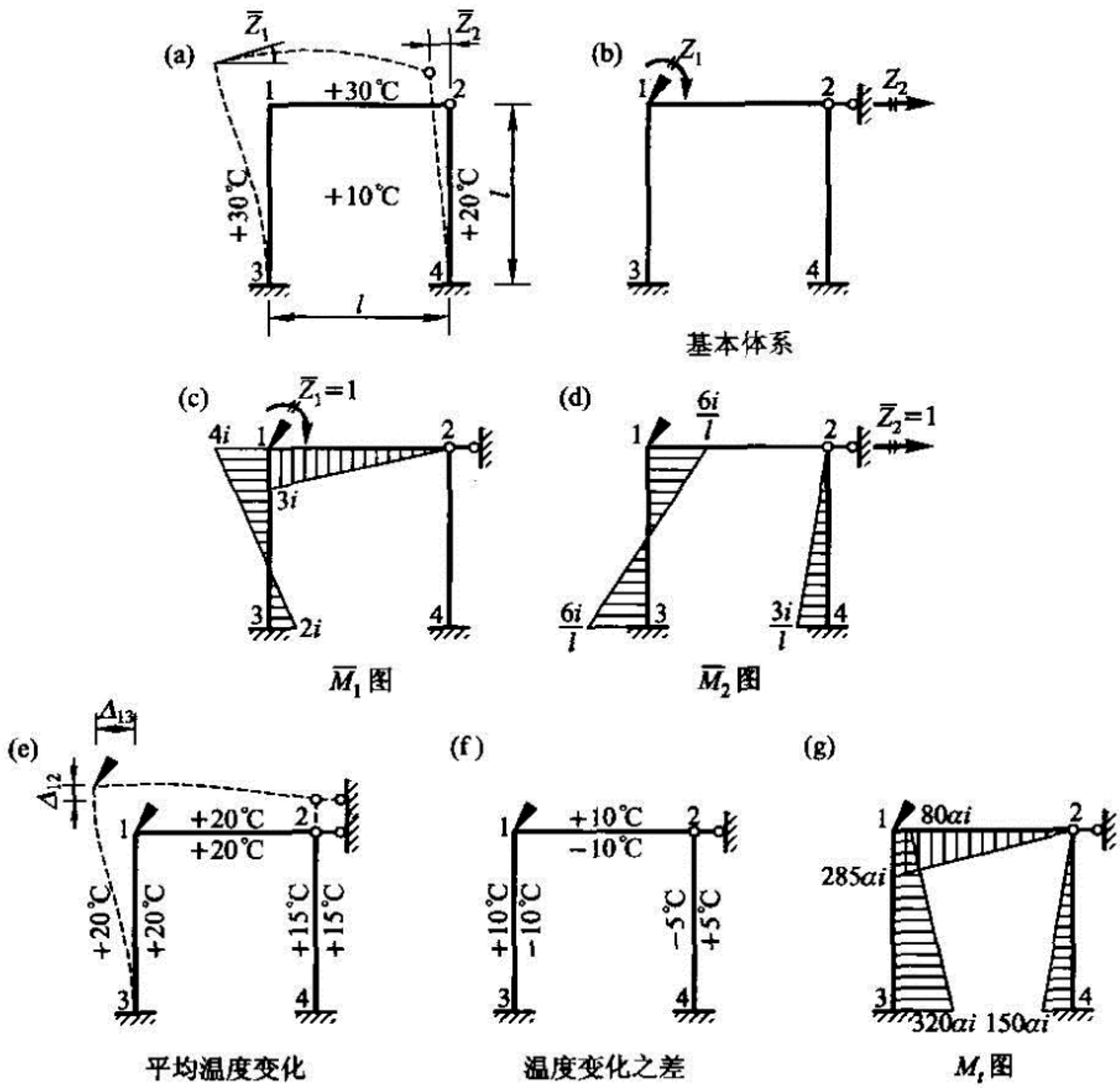


图 8-1-14

（1）基本未知量

①此刚架有一个独立的结点角位移 Z_1；

②考虑轴向变形时，结点 1、2 均分别有水平和竖向线位移。但各杆由于温度变化产生的伸长（或缩短）可事先算出，因此两结点的竖向位移即为已知；在求出了一个结点的水平位移之后，另一结点的水平位移也就随之确定。因此，独立的结点线位移只有一个，以结点 2 的水平位移 Z_2 作为基本未知量。

（2）典型方程

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1t}=0$$
$$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2t}=0$$

（3）求典型方程系数

各系数与外因无关，绘出$\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$图（图 8-1-14（c）、（d））后可求得

$$r_{11}=7i,\quad r_{12}=r_{21}=-\frac{6i}{l},\quad r_{22}=\frac{15i}{l^2}$$

（4）求自由项

①将杆件两侧的温度变化 t_1 和 t_2 对杆轴线分为正、反对称的两部分（图 8-1-14）

a．平均温度变化$t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$；

b．温度变化之差$\pm\dfrac{\Delta t}{2}=\pm\dfrac{t_2-t_1}{2}$。

②计算这两部分温度变化在基本结构中所引起的各杆固端弯矩

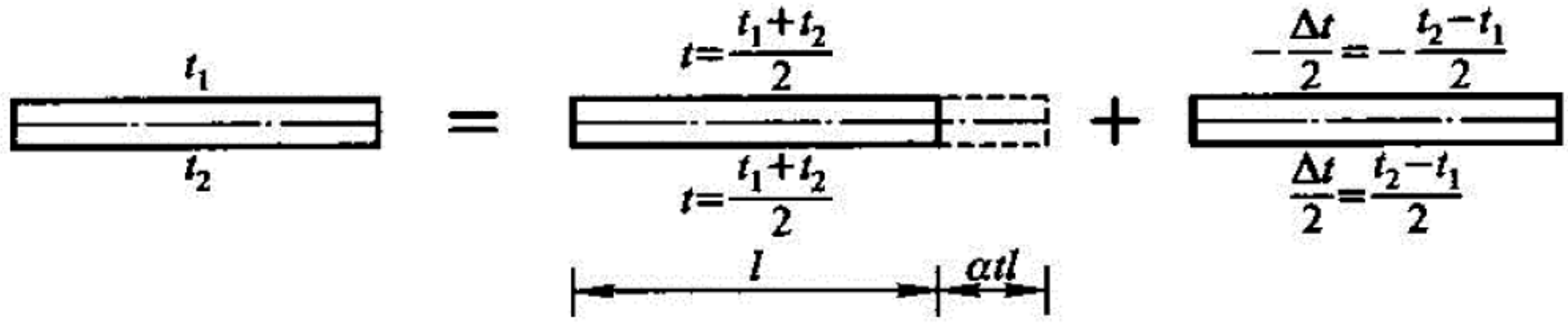


图 8-1-15

a．平均温度变化

各杆将伸长（或缩短），其值为 αtl，由此将使基本结构的各杆两端发生相对线位移。根据图 8-1-14（e）所示几何关系，可求得各杆两端相对线位移为

$$\Delta_{13}=-20\alpha l$$

$$\Delta_{12}=20\alpha l-15\alpha l=5\alpha l$$

$$\Delta_{24}=0$$

这些杆端相对侧移将会使各杆端产生固端弯矩，由表 8-1-1 有

$$\left.\begin{aligned}M_{31}^{F}&=M_{13}^{F}=-\frac{6i}{l}\Delta_{13}=120\alpha i\\M_{12}^{F}&=-\frac{3i}{l}\Delta_{12}=-15\alpha i\\M_{42}^{F}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

b．温度变化之差

各杆并不伸长（或缩短），由此引起的各杆固端弯矩可直接由表 8-1-1 算出

$$\left.\begin{aligned}M_{31}^{F}&=-M_{13}^{F}=-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}=-\frac{EI\alpha\times(-20)}{l/10}=200\alpha i\\M_{12}^{F}&=-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}=-\frac{3EI\alpha\times(-20)}{2l/10}=300\alpha i\\M_{42}^{F}&=-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}=-\frac{3EI\alpha\times 10}{2l/10}=-150\alpha i\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

③总的固端弯矩

式（a）与（b）叠加得

$$M_{31}^{F}=120\alpha i+200\alpha i=320\alpha i$$

$$M_{13}^{F}=120\alpha i-200\alpha i=-80\alpha i$$

$$M_{12}^{F}=-15\alpha i+300\alpha i=285\alpha i$$

$$M_{42}^{F}=-150\alpha i$$

④据此即可绘出 M_t 图如图 8-1-14（g）所示。取结点 1 为隔离体，由 $\sum M_1=0$ 可求得

$$R_{1t}=285\alpha i-80\alpha i=205\alpha i$$

确定 1——3、2——4 两柱的剪力后，取柱顶端以上横梁部分为隔离体，由 $\sum X=0$ 可算出

$$R_{2t}=-\frac{240\alpha i}{l}+\frac{150\alpha i}{l}=-\frac{90\alpha i}{l}$$

⑤将系数和自由项代入典型方程，有

$$7iZ_1-\frac{6i}{l}Z_2+205\alpha i=0$$

$$-\frac{6i}{l}Z_1+\frac{15i}{l^2}Z_2-\frac{90\alpha i}{l}=0$$

解得

$$Z_1=-\frac{845}{23}\alpha\text{（逆时针方向）}$$

$$Z_2=-\frac{200}{23}\alpha l\text{（向左）}$$

⑥刚架的最后弯矩图为

$$M=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_2+M_t$$

如图 8-1-15 所示。

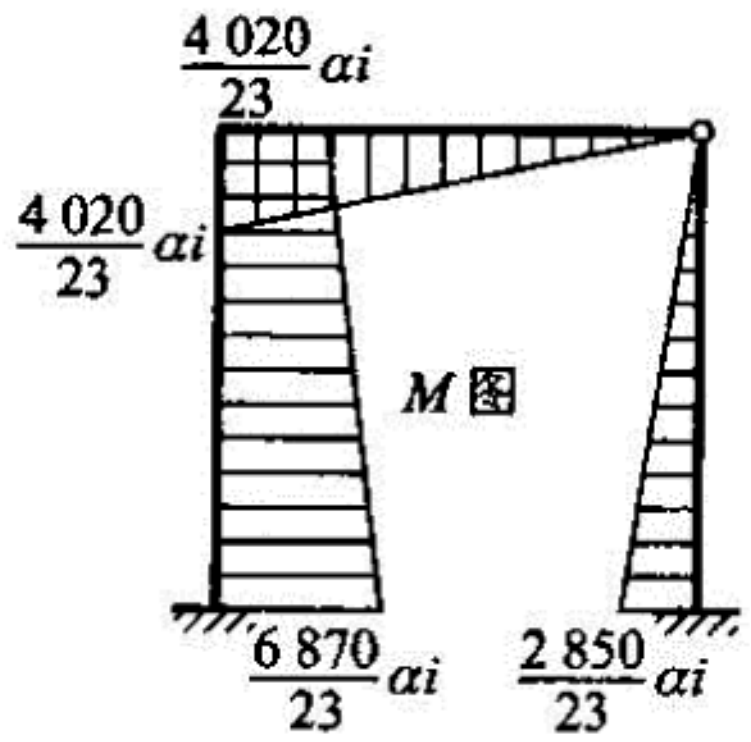


图 8-1-15

8.2 课后习题详解

复习思考题

1．位移法的基本思路是什么？为什么说位移法是建立在力法的基础之上的？

答：（1）位移法的基本思路

位移法的基本思路是首先确定原结构的基本未知量，加入附加联系从而得基本结构，令各附加联系发生与结构相同的结点位移；再根据在荷载等外因和各结点位移共同作用下，各附加联系上的反力偶或反力均等于零的条件，建立方程，求出未知位移；最后求出结构反力和内力。

（2）位移法是建立在力法的基础之上的原因

因为位移法的基本结构是两端固定的或一端固定一端铰支的单跨超静定梁。位移法进行计算是以这些基本结构为基础的，需要用力法算出单跨超静定梁在杆端发生各种位移时以及荷载等因素作用下的内力，才能继续进行位移法以后的求解。

2．位移法的基本未知量与超静定次数有关吗？

答：位移法的基本未知量与超静定次数无关。因为位移法的基本未知量是指独立的结点的角位移和独立的结点的线位移，而这两个量与超静定次数并无关系。

3．位移法的典型方程是平衡条件，那么在位移法中是否只用平衡条件就可以确定基本未知量，从而确定超静定结构的内力？在位移法中满足了结构的位移条件（包括支承条件和变形连续条件）没有？在力法中又是怎样满足结构的位移条件和平衡条件的？

答：（1）在位移法中只用平衡条件就可以确定基本未知量，从而确定超静定结构的内力。

（2）在位移法中已满足结构的位移条件（包括支承条件和变形连续条件）。

因为在位移法的假设和取基本未知量时，结构的支承条件和变形连续条件就已经考虑进去了，所以位移法中结构的位移条件自动满足，故只需要平衡条件就可以确定基本未知量了。

（3）力法的典型方程实质上就是满足结构的位移条件（包括支承条件和变形连续条件）。力法是在满足平衡条件下进行分析的，只要结构不破坏，平衡条件会自动满足。

4．在什么条件下独立的结点线位移数目等于使相应铰结体系成为几何不变所需添加的最少链杆数？

答：不考虑受弯直杆的轴向变形（即受弯直杆两端距离不变）的条件下，独立的结点线位移数目等于使相应铰结体系成为几何不变所需添加的最少链杆数。

5．力法与位移法在原理与步骤上有何异同？试将二者从基本未知量、基本结构、基本体系、典型方程的意义、每一系数和自由项的含义和求法等方面作一全面比较。

答：力法与位移法在原理与步骤上的异同点：

（1）相同点

力法和位移法是分析超静定结构的两种基本方法。

（2）不同点

①基本未知量

a．位移法是以某些结点位移作为基本未知量。

b．力法是以多余未知力作为基本未知量。

②基本结构和基本体系

a．位移法是将两端固定的或一端固定一端铰支的单跨超静定梁作为基本结构；基本结构在荷载和基本未知量即独立结点线位移共同作用下的体系称为基本体系。

b．力法是将原超静定结构去掉多联系后所得到的静定结构作为基本结构；基本结构在原有荷载和多余未知力共同作用下的体系称为基本体系。

③典型方程的意义

a．位移法典型方程的意义：基本结构在荷载等外因和各结点位移的共同作用下，每一个附加联系上的附加反力偶和附加反力都应等于零。实质上反映原结构的静力平衡条件。

b．力法典型方程的意义：基本结构在全部多余未知力和荷载共同作用下，在去掉各多余联系处沿各多余未知力方向的位移，应与原结构相应的位移相等。实质上反映原结构的变形协调条件。

④每一系数和自由项的含义

a．位移法中，主系数是指某一个附加约束发生单位位移时，在该附加约束产生的约束反力；副系数是指某一个附加约束发生单位位移时，在另一个附加约束处产生的约束反力；自由项是指荷载单独作用时在附加约束处产生的约束反力。

b．力法中，主系数是指单位多余未知力单独作用时所引起的沿其本身方向上的位移；副系数是指一个单位多余未知力单独作用时所引起的沿另一个多余未知力方向的位移；自由项是指荷载单独作用时所引起的沿一个多余未知力方向上的位移。

⑤分析超静定结构的求解步骤

a．位移法是先确定某些位移，再据此推求内力。

b．力法是先设法求出内力，再计算相应的位移。

⑥适用范围

a．位移法一般适用于高次超静定刚架。

b．力法一般适用于低次超静定刚架。

6 在什么情况下求内力时可采用刚度的相对值？求结点位移时能否采用刚度的相对值？

答：（1）在内力种类单一（即只有外荷载作用或非荷载因素不产生作用的超静定结构）时，可以采用刚度的

相对值，对计算结果无影响。

（2）求结点位移时不能采用相对刚度，因为最终的结点位移的计算公式中含有刚度这一项，不能够作为公因式消除，所以计算结点位移时需要采用绝对刚度。

7．试证明：对于无侧移（即无结点线位移）刚架，当只承受结点集中荷载时，弯矩为零。

答：对于无侧移刚架，采用位移法求解，未知量只有结点角位移，基本结构为几个单跨超静定梁，只承受集中结点荷载，不会在附加约束处产生约束反力，即在位移法典型方程中，自由项为零，故所解得的未知角位移均为零，不会产生弯矩。

8．结构对称但荷载不对称时，可否取一半结构计算？

答：结构对称但荷载不对称时，可以取一半结构计算。对于这种情况，可以采用未知力分组的方法，把不对称的荷载化为两组新的未知力：一组为两个正对称的未知力，另一组为两个反对称的未知力。

习题

8-1　试确定位移法基本未知量数目，并绘出基本结构。

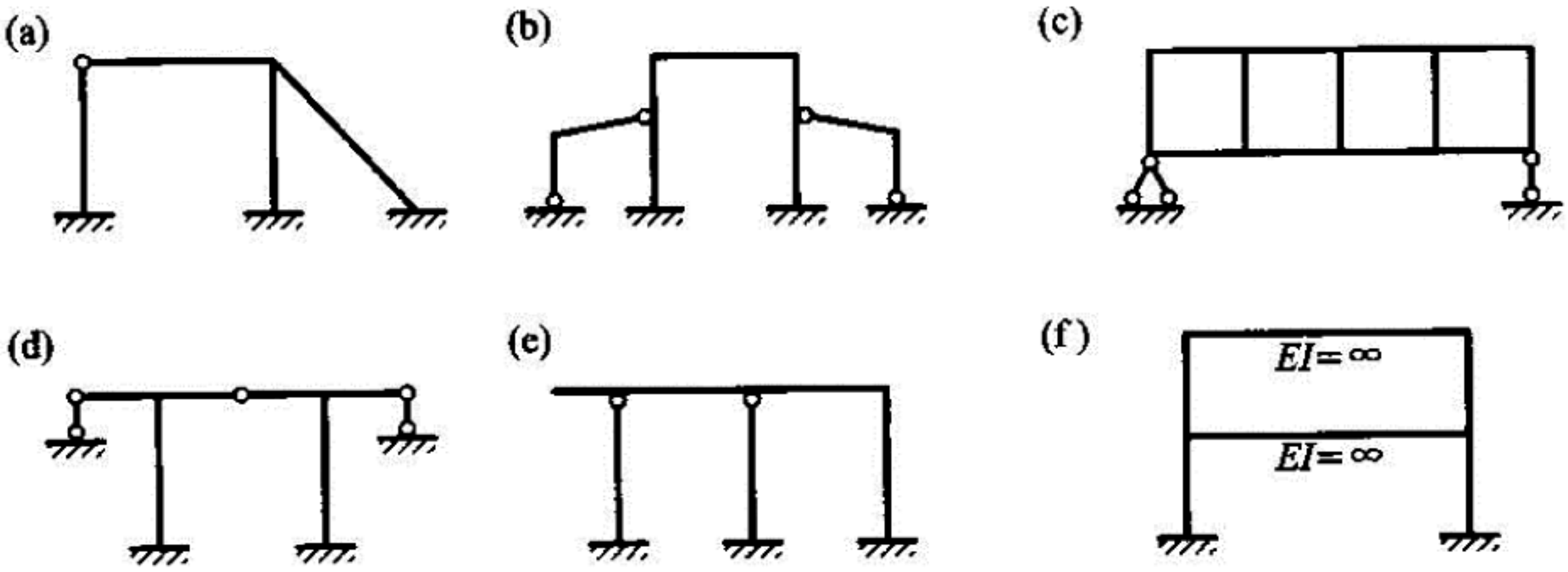


图 8-2-1（题 8-1）

答：（a）有 1 个角位移，没有水平线位移，故基本未知量个数共 1＋0＝1。

（b）有 6 个角位移，3 个水平线位移，故基本未知量个数共 6＋3＝9。

（c）有 10 个角位移，4 个线位移（其中竖向线位移 3 个，水平线位移 1 个），故基本未知量个数共 10＋4＝14。

（d）有 2 个角位移，2 个线位移（中间处竖向位移 1 个，水平位移 1 个），故基本未知量个数共 2＋2＝4。

（e）有 2 个角位移，1 个线位移（静定部分可不设角位移），故基本未知量个数共 2＋1＝3。

（f）没有角位移（横梁及其两端刚结点均不能转动），有 2 个线位移，故基本未知量个数共 0＋2＝2。

8-2　试用位移法计算刚架，绘制弯矩图。E＝常数。

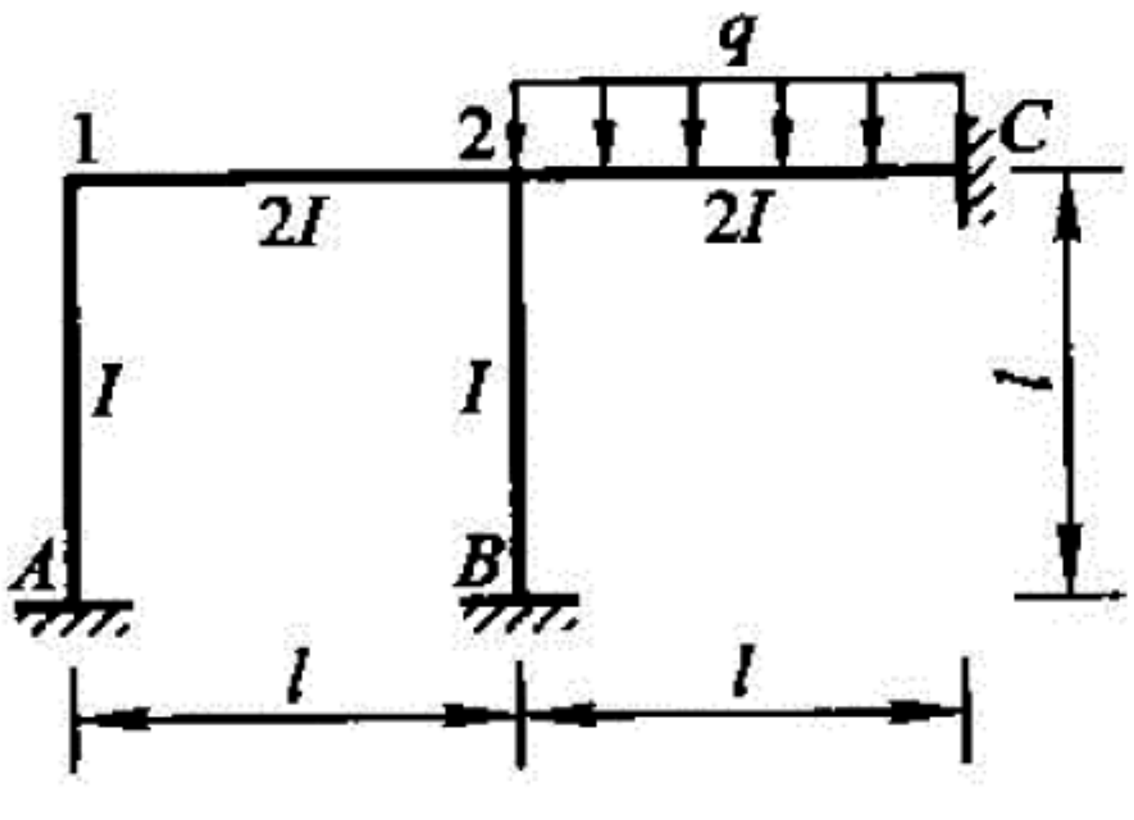


图 8-2-2（题 8-2）

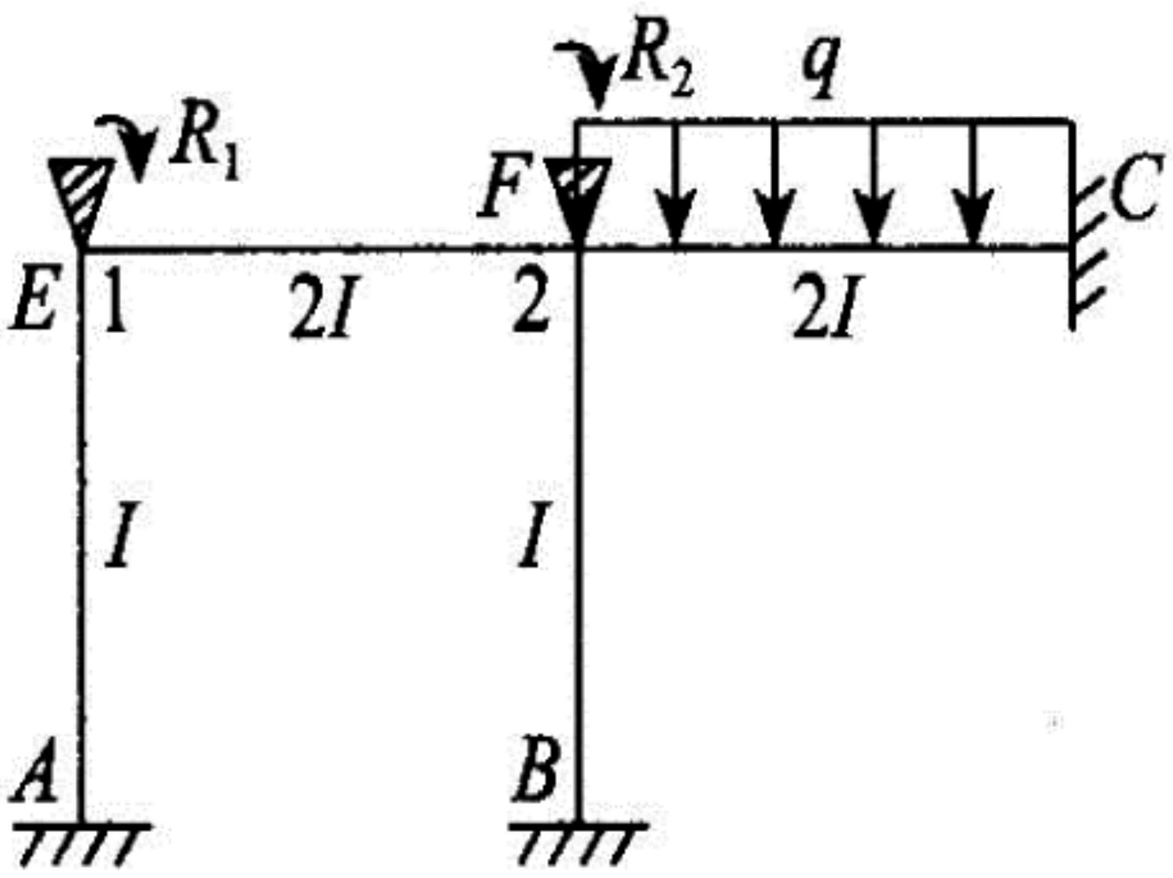


图 8-2-3（基本体系）

解：此刚架基本未知量为结点 1 和 2 的角位移 z_1、z_2，在结点 1、2 处加附加刚臂，即得基本体系，如图 8-2-3 所示。绘出 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$、M_P 图，如图 8-2-4 所示。

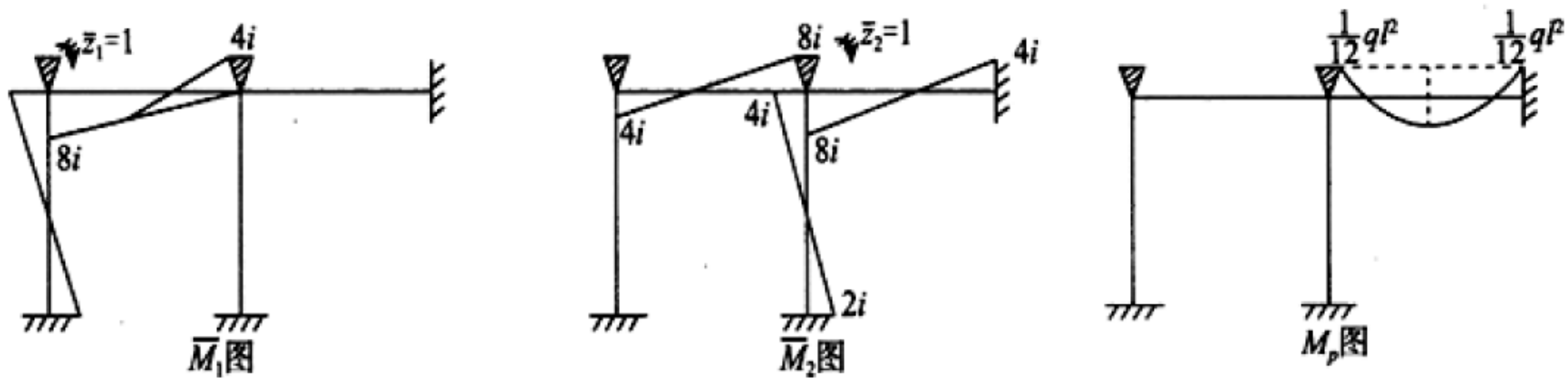


图 8-2-4

令

$$i_{AE}=i_{BF}=\frac{EI}{l}=i,i_{EF}=i_{FC}=\frac{2EI}{l}=2i$$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=8i+4i=12i,r_{12}=r_{21}=4i$$

$$r_{22}=8i+8i+4i=20i$$

$$R_{1P}=0,R_{2P}=-\frac{1}{12}ql^2$$

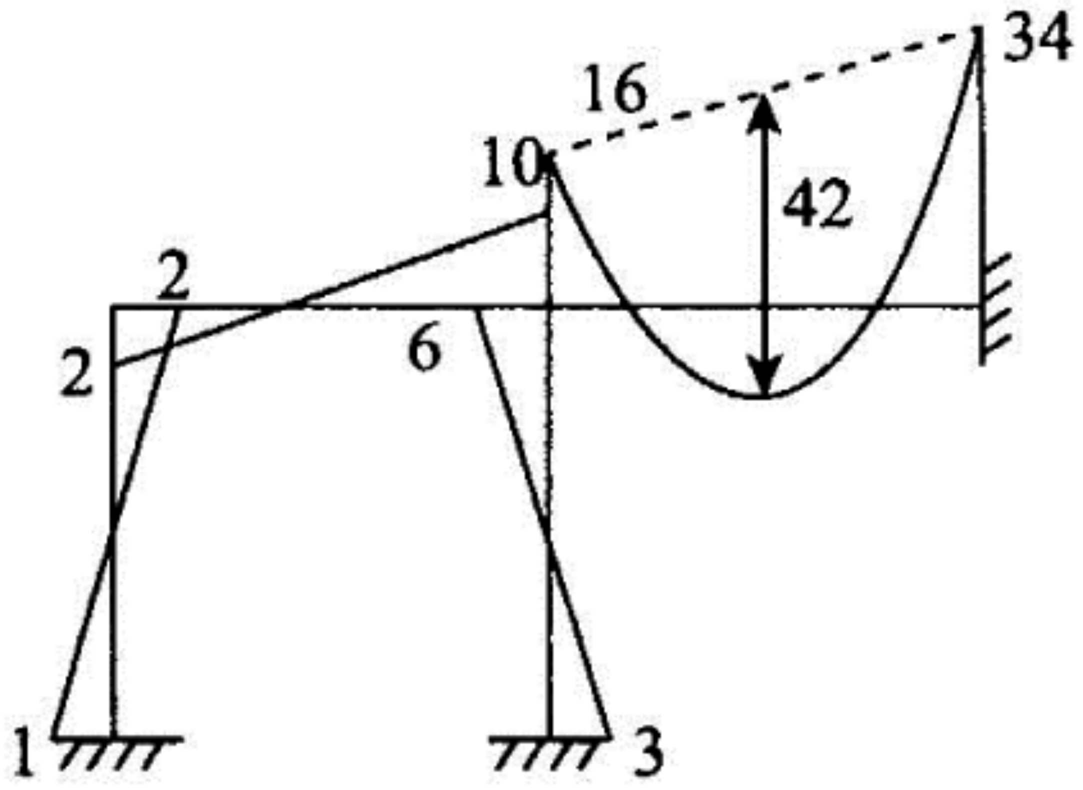
代入位移法典型方程

$$\begin{cases}12iz_1+4iz_2+0=0\\4iz_1+20iz_2-\frac{1}{12}ql^2=0\end{cases}$$

计算得到

$$z_1=-\frac{ql^2}{672i},\quad z_2=\frac{3ql^2}{672i}$$

刚架最后的弯矩图可由 $M=z_1\overline{M_1}+z_2\overline{M_2}+M_P$ 绘出，如图 8-2-5 所示。



$M(\times\frac{ql^2}{336})$

图 8-2-5

8-3　试用位移法计算刚架，绘制弯矩图。E＝常数。

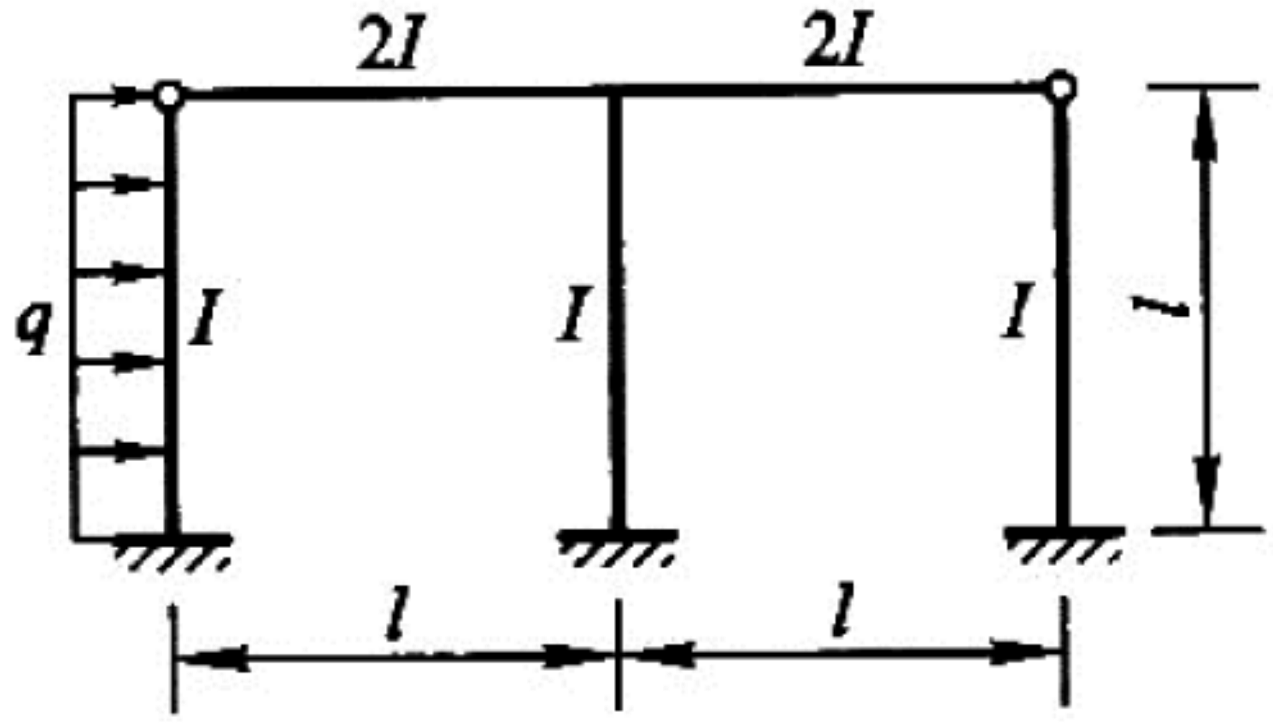


图 8-2-6（题 8-3）

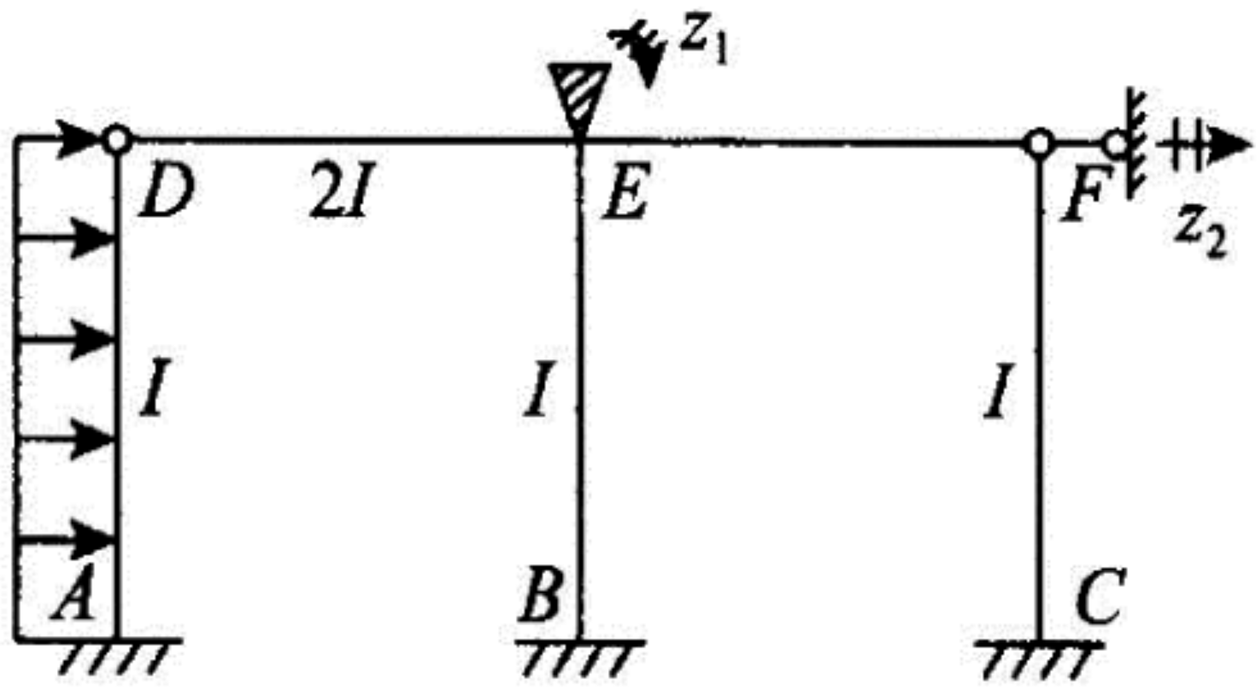


图 8-2-7（基本体系）

解：此刚架基本未知量为此刚架基本未知量为结点 E 处角位移 z_1 和 F 处水平位移 z_2，在结点 E 处加刚臂，在结点 F 处加链杆，即得基本体系如图 8-2-7 所示。绘出 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、M_P 图，如图 8-2-8 所示。

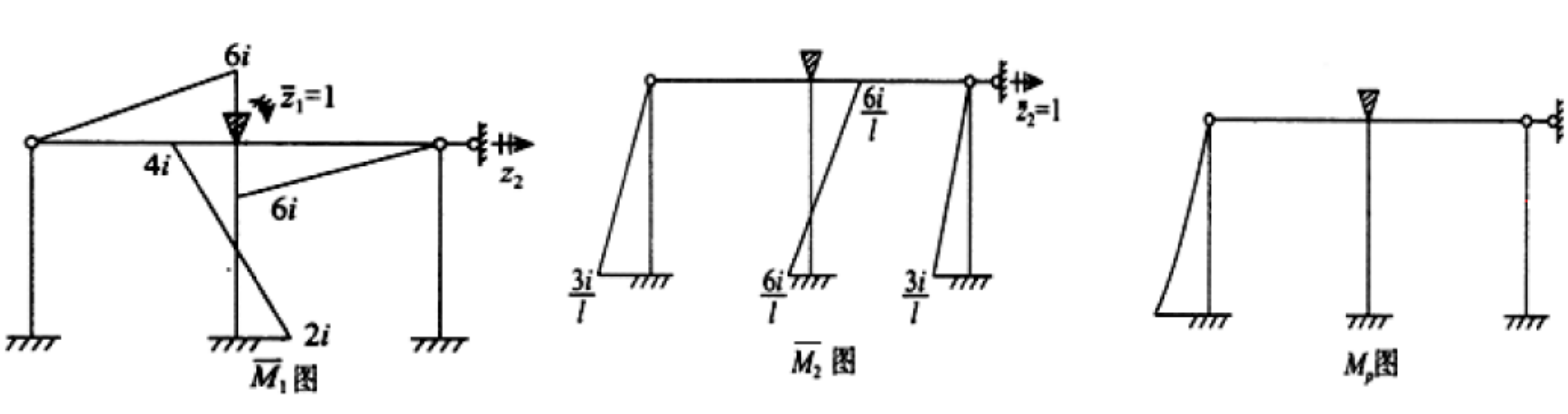


图 8-2-8

令

$$i_{AD}=i_{BE}=i_{CF}=\frac{EI}{l}=i$$

$$i_{DE}=i_{EF}=\frac{2EI}{l}=2i$$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=16i, r_{12}=r_{21}=\frac{-6i}{l}, r_{22}=\frac{18i}{l^2}$$

$$R_{1p}=0,\ R_{2p}=-\frac{3}{8}ql$$

代入位移法典型方程

$$\begin{cases}16iz_1-\dfrac{6i}{l}z_2+0=0\\ -\dfrac{6i}{l}z_1+\dfrac{18i}{l^2}z_2-\dfrac{3ql}{8}=0\end{cases}$$

计算得到

$$z_1=\frac{ql^2}{112i}, z_2=\frac{ql^3}{42i}$$

由$M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_p$，绘出 M 图，如图 8-2-9 所示。

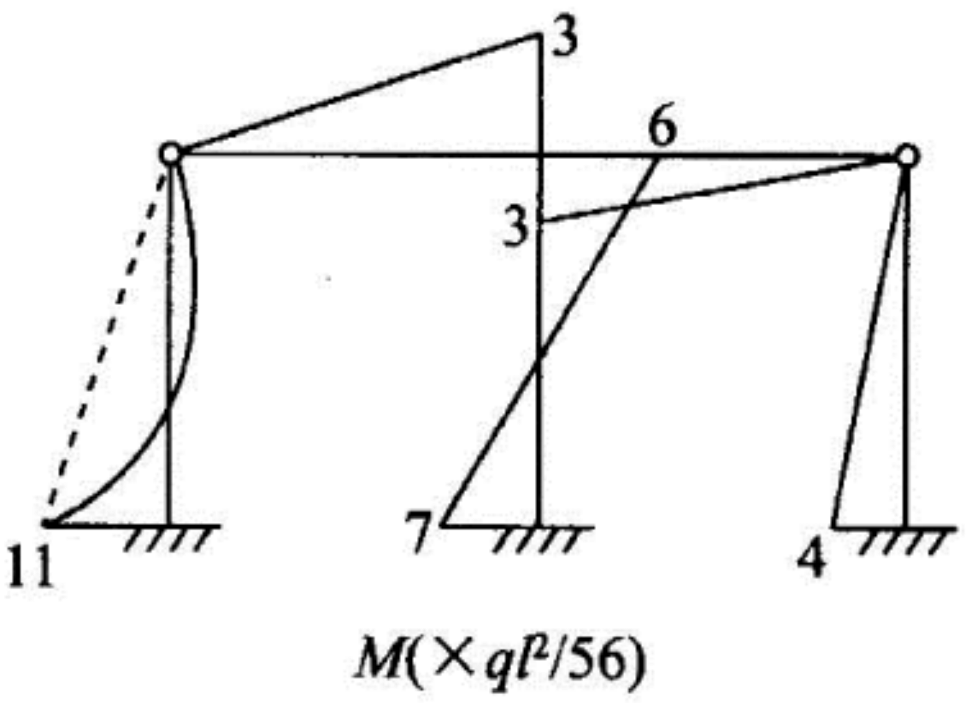


图 8-2-9

8-4　试用位移法计算刚架，绘制弯矩图。E＝常数。

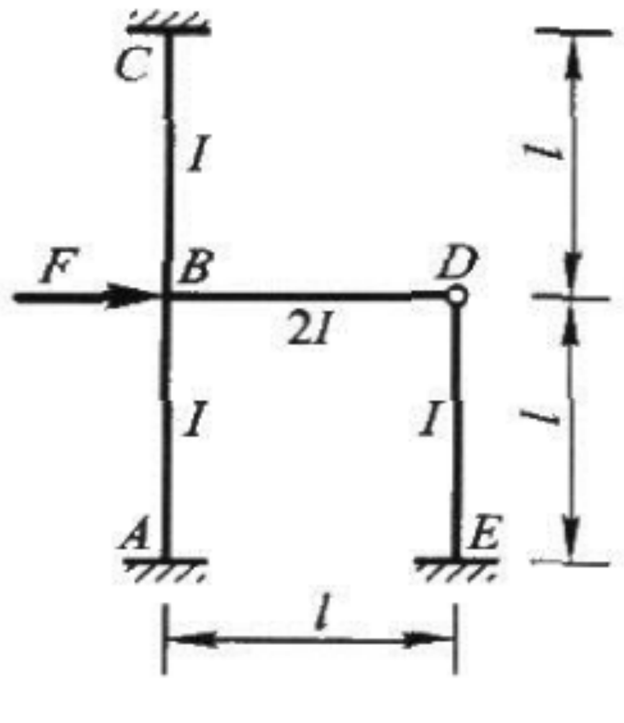


图 8-2-10（题 8-4）

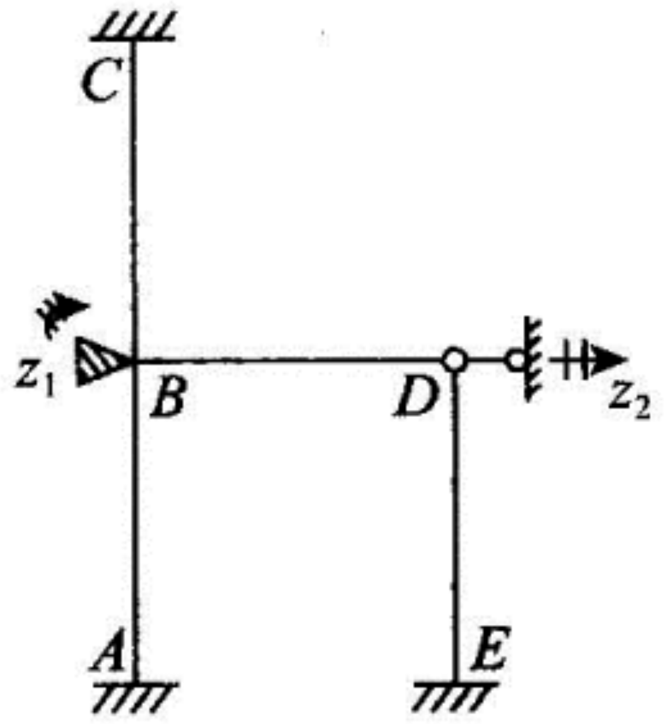


图 8-2-11（基本结构）

解：此刚架基本未知量为 B 处角位移 z_1 和 D 处水平位移 z_2，在结点 B 处附加刚臂，在 D 处附加链杆，即得基本结构如图 8-2-11 所示。绘出 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$、M_P 图，如图 8-2-12 所示。

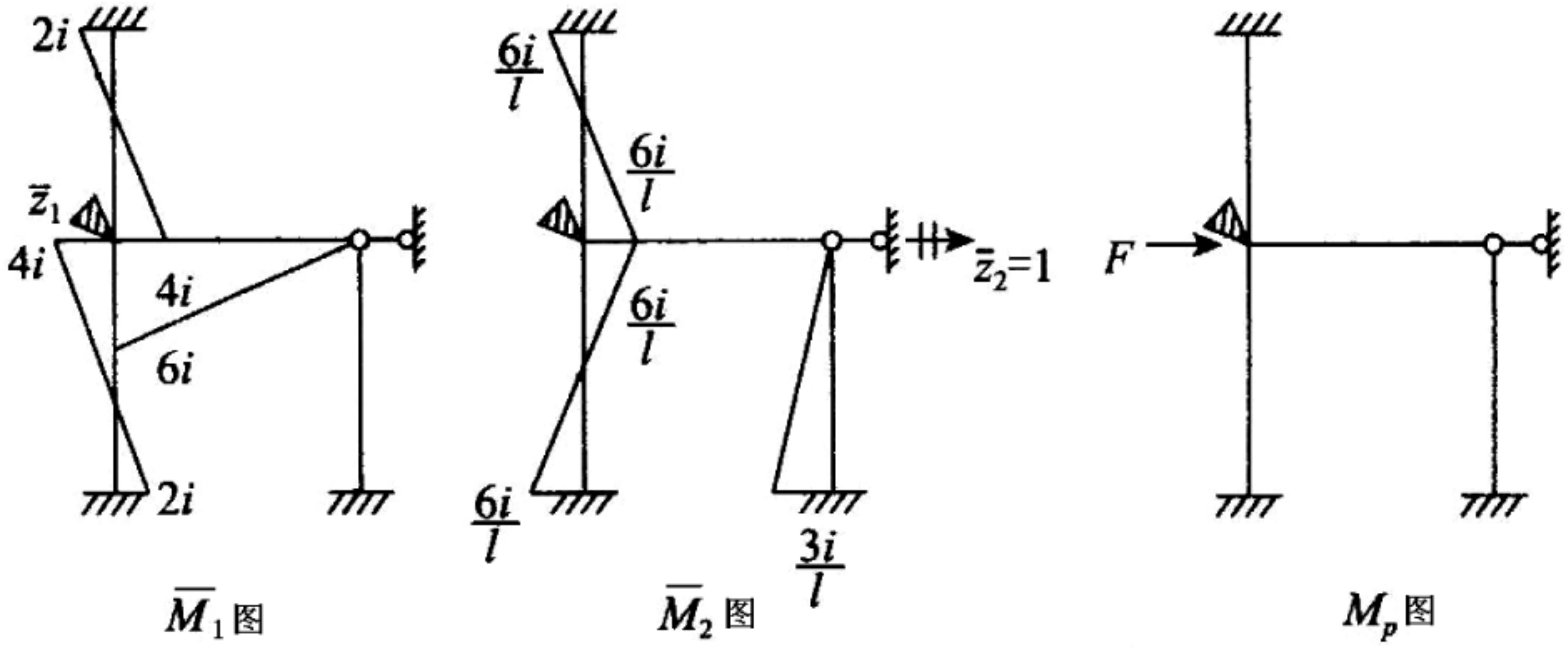


图 8-2-12

令

$$i_{AB}=i_{BC}=i_{DE}=\frac{EI}{l}=i$$

$$i_{BD}=\frac{2EI}{l}=2i$$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=14i, r_{12}=r_{21}=0, r_{22}=\frac{27i}{l^2}$$

$$R_{1p}=0, R_{2p}=-F$$

代入位移法典型方程，计算未知量 z_1、z_2

$$\begin{cases}14iz_1+0+0=0\\0+\frac{27i}{l^2}z_2-p=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=0\\z_2=\frac{Fl^2}{27i}\end{cases}$$

由$M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_p$，绘出 M 图，如图 8-2-13 所示。

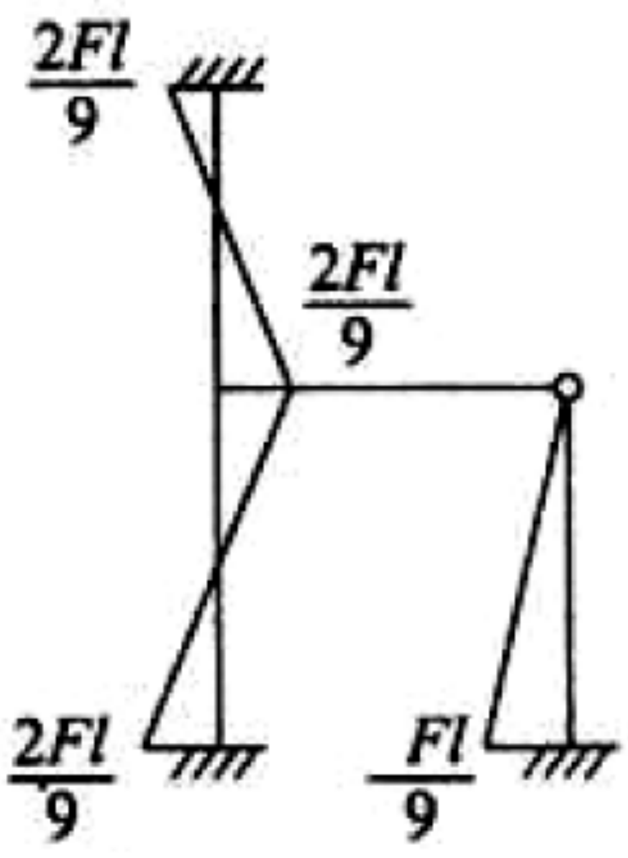


图 8-2-13

8-5　试用位移法计算刚架，绘制弯矩图。E＝常数。

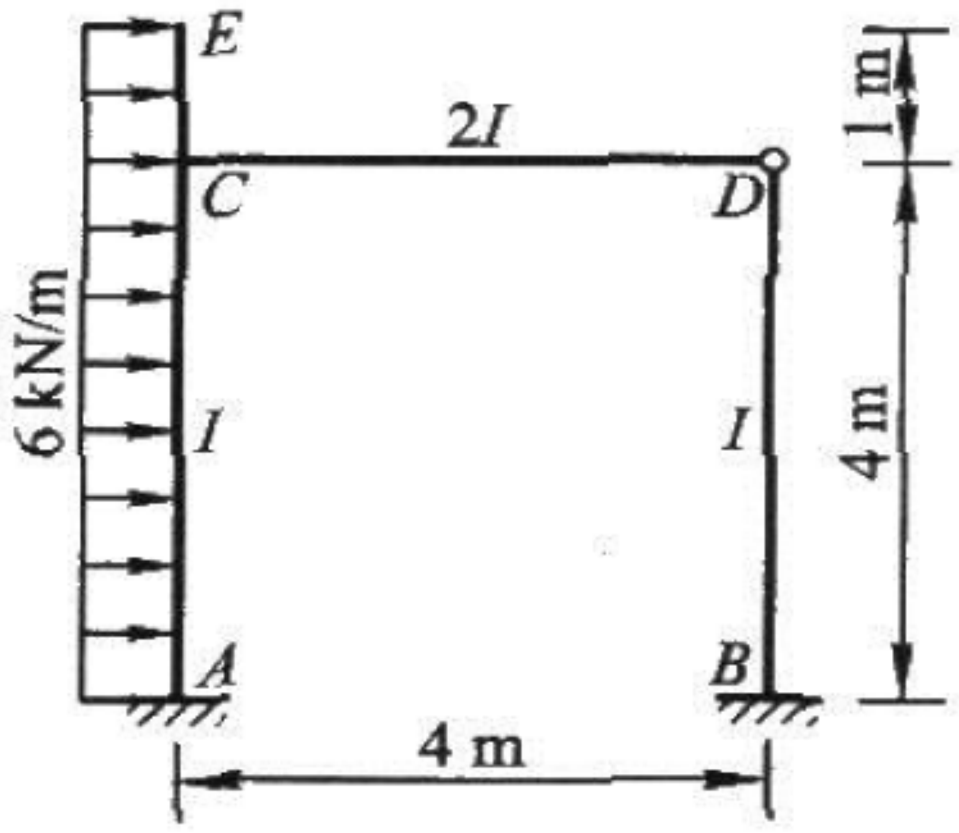


图 8-2-14（题 8-5）

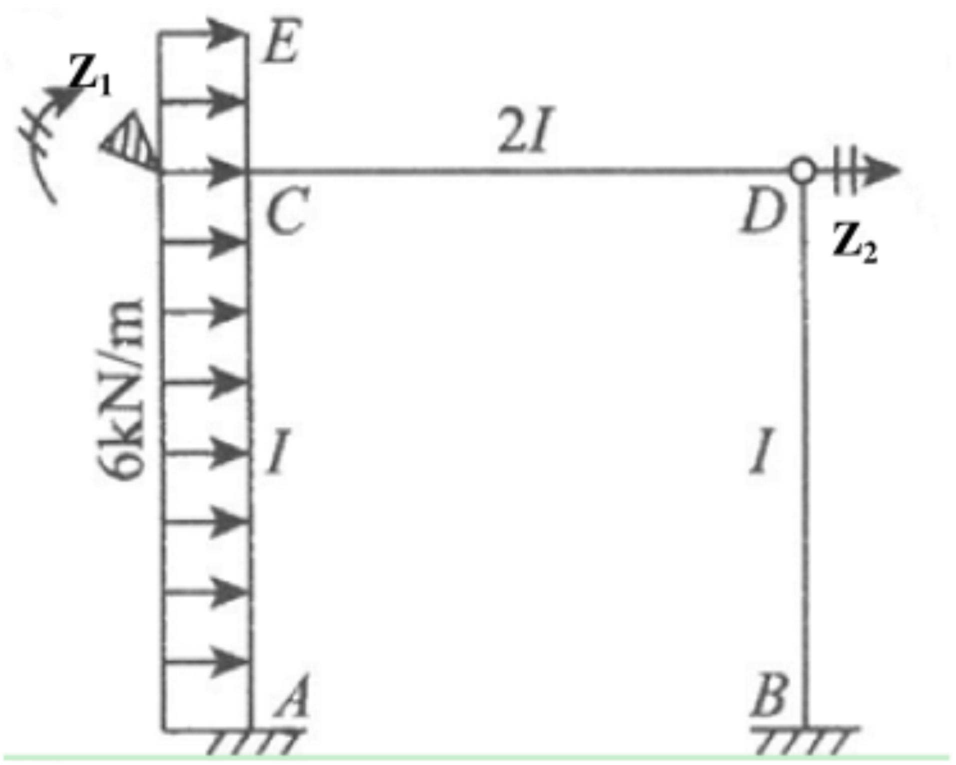


图 8-2-15（基本体系）

解：此刚架 CE 部分为静定部分，其弯矩可以用平衡条件直接求出，故取位移法基本结构时，该部分无须添加附加联系。基本未知量为 C 处角位移 z_1 和 D 处水平位移 z_2，在 C 处附加刚臂，在 D 处附加链杆，即得基本体系如图 8-2-15 所示。绘出 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$、M_P 图，如图 8-2-16 所示。

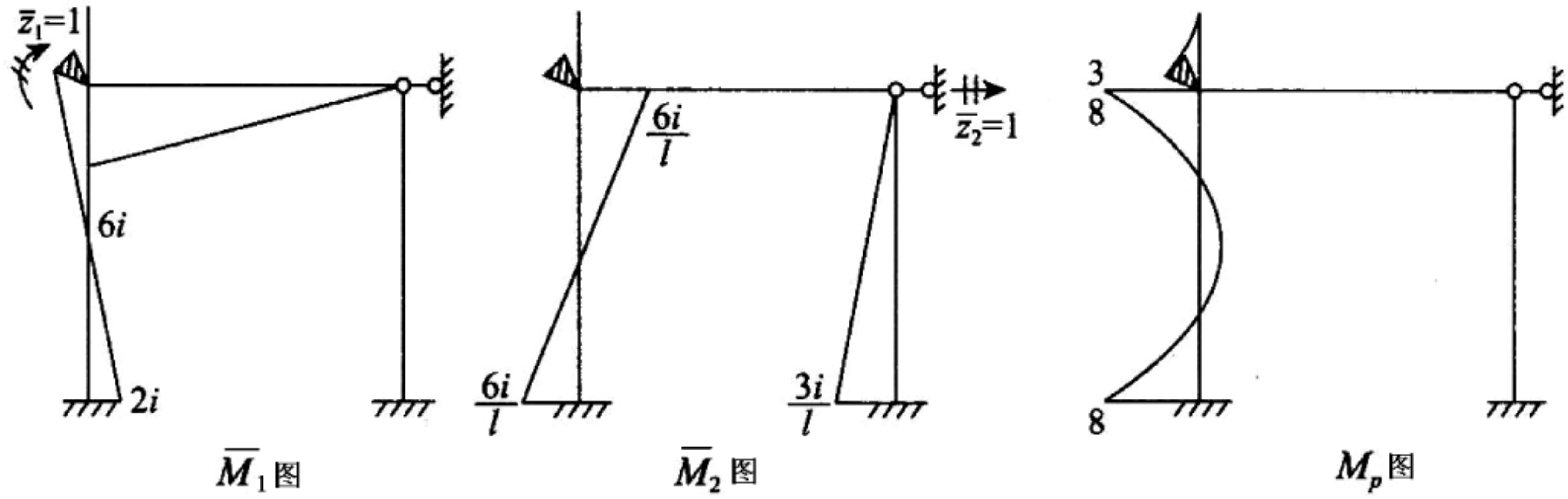


图 8-2-16

令

$$i_{AC}=i_{BD}=\frac{EI}{l}=i,i_{CD}=\frac{2EI}{l}=2i$$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=10i,r_{12}=r_{21}=-1.5i,r_{22}=\frac{15i}{16}$$

$$R_{1p}=5,R_{2p}=-18$$

代入位移法典型方程

$$\begin{cases}10iz_1-1.5iz_2+5=0\\-1.5iz_1+\frac{15i}{16}z_2-18=0\end{cases}$$

计算基本未知量 z_1、z_2 得

$$z_1=\frac{3.1316}{i},z_2=\frac{24.2105}{i}$$

由$M=\overline{M}_1z_1+\overline{M}_2z_2+M_p$，绘出 M 图，如图 8-2-17 所示。

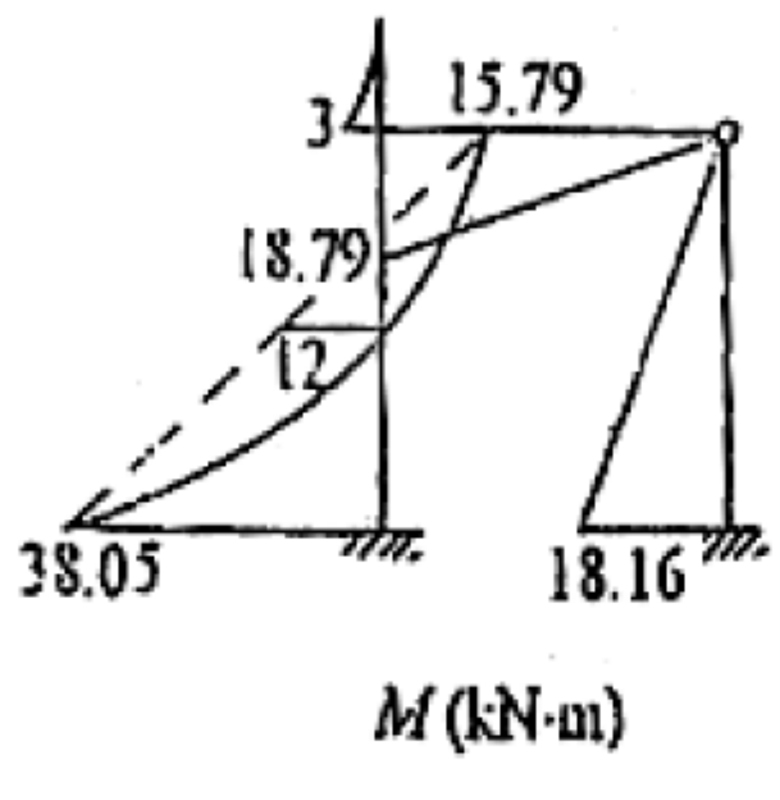


图 8-2-17

8-6　试用位移法计算连续梁，绘制弯矩图。

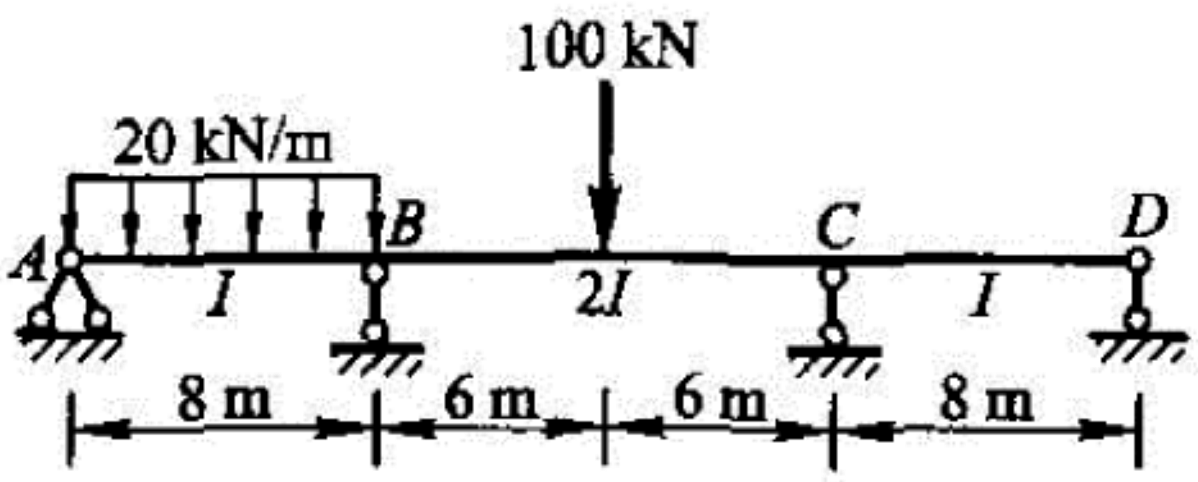


图 8-2-18（题 8-6）

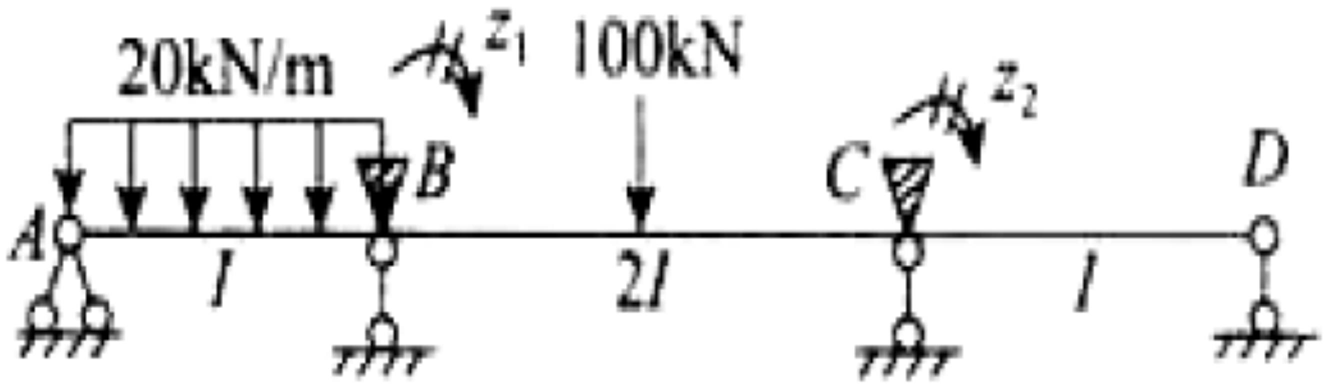


图 8-2-19（基本体系）

解：此连续梁基本未知量为结点 B 的转角 z_1 和结点 C 处转角 z_2，在结点 B、C 处加刚臂，即得基本体系如图 8-2-19 所示。绘出 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$、M_P 图，如图 8-2-20 所示。

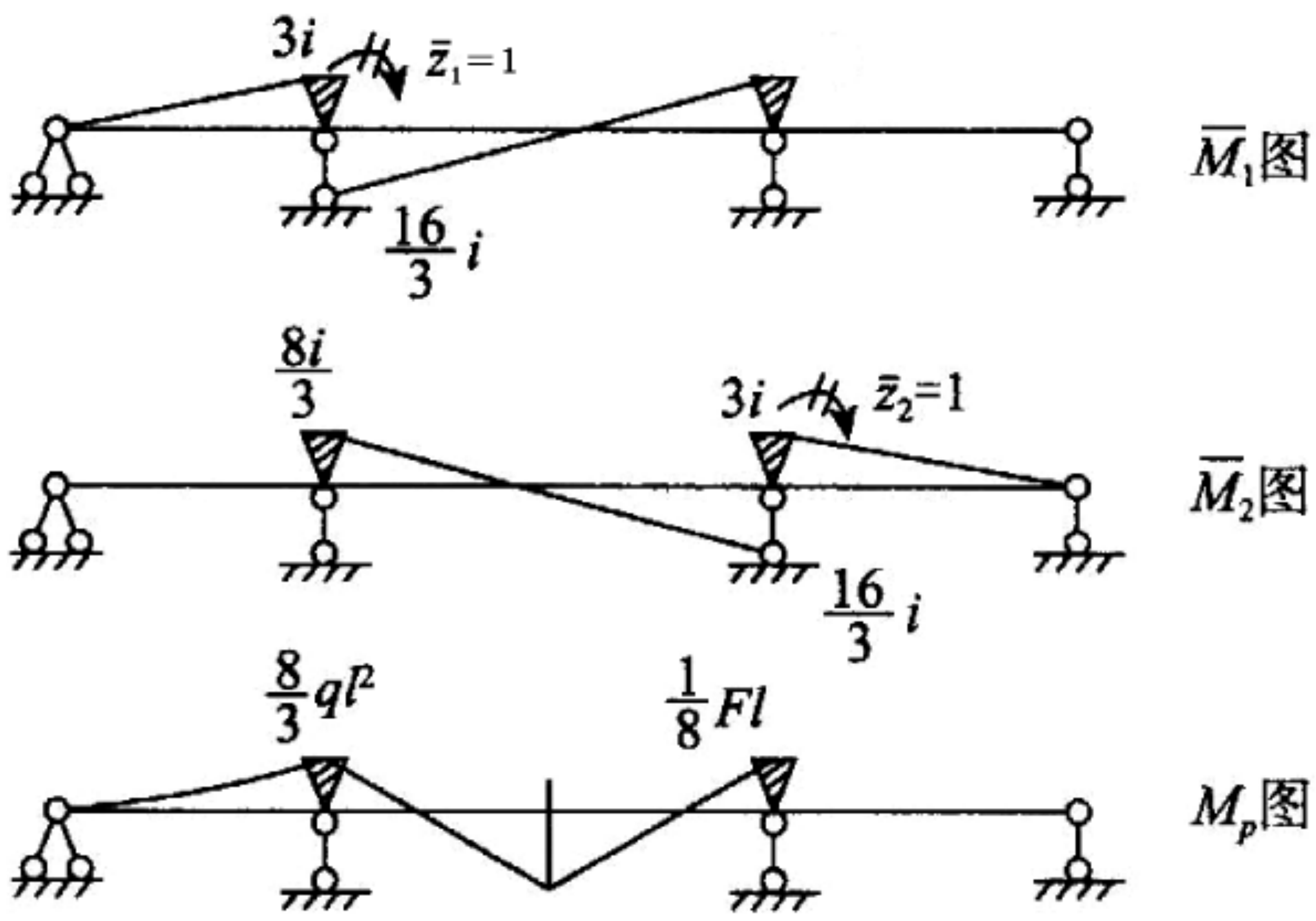


图 8-2-20

令

$$i_{AB}=i_{CD}=\frac{EI}{8}=i,i_{BC}=\frac{2EI}{12}=\frac{4}{3}i$$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=\frac{25}{3}i,r_{12}=r_{21}=\frac{8i}{3},r_{22}=\frac{25}{3}i$$

$$R_{1p}=10,R_{2p}=150$$

代入位移法典型方程

$$\begin{cases}\frac{25}{3}iz_1+\frac{8}{3}iz_2+10=0\\ \frac{8}{3}iz_1+\frac{25}{3}iz_2+150=0\end{cases}$$

计算基本未知量 z_1，z_2 得

$$z_1=\frac{5.08}{i},z_2=\frac{-19.63}{i}$$

由$M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_p$，可画出 M 图，如图 8-2-21 所示。

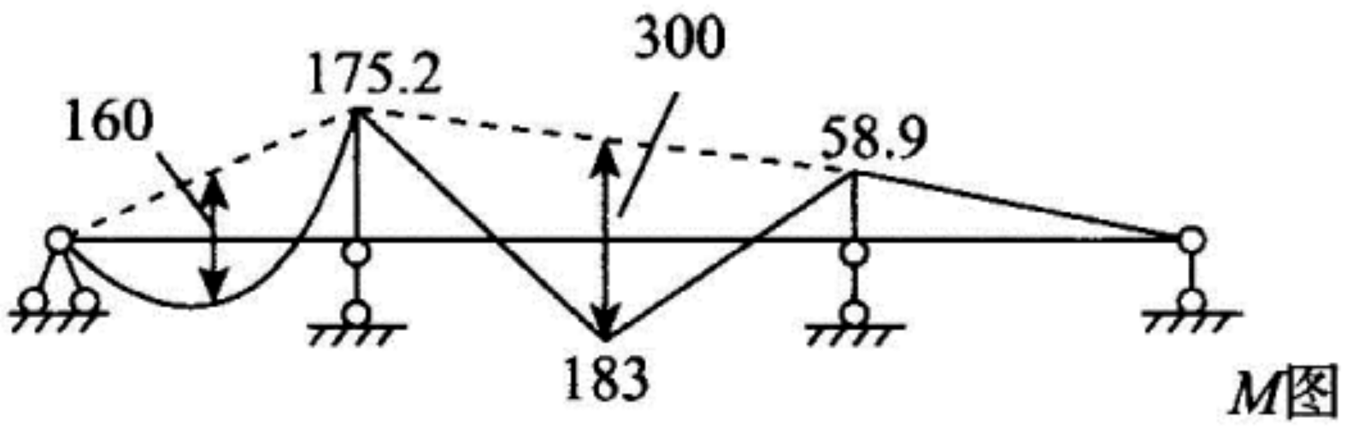


图 8-2-21

8-7　图示等截面连续梁支座 B 下沉 20mm，支座 C 下沉 12mm，E＝210GPa，I＝2×10^{-4}m^4。试作其弯矩图。

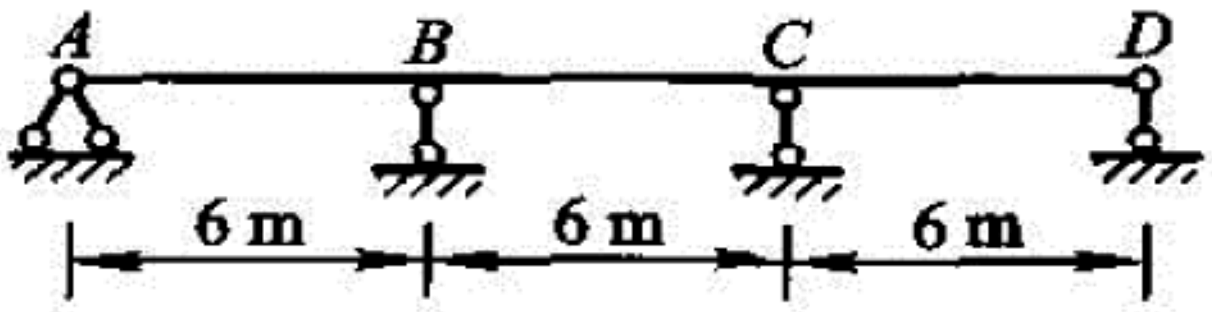


图 8-2-21（题 8-7）

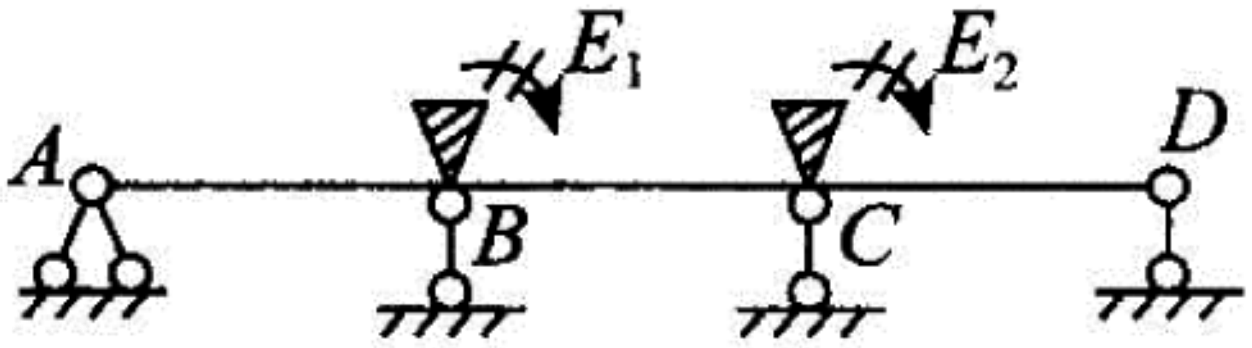


图 8-2-22（基本体系）

解：此连续梁基本未知量为结点 B 处的转角 z_1 和结点 C 处转角 z_2，在 B 处、C 处附加刚臂，即得基本体系如图 8-2-22 所示。绘出$\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$及 M_Δ 图，如图 8-2-23 所示。

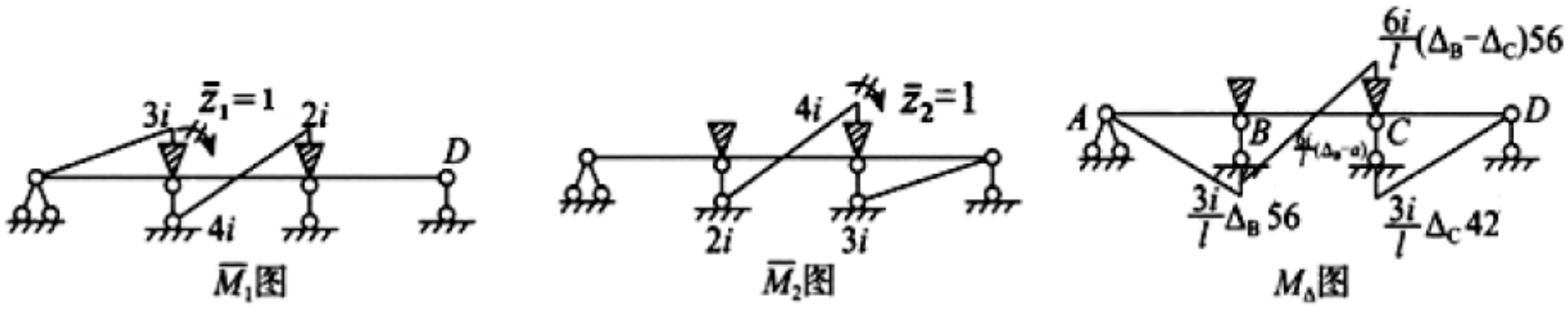


图 8-2-23

由

$$EI=210\times10^9\times2\times10^{-4}\times10^{-3}=42000\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$$

$$i=\frac{EI}{l}=\frac{42000}{6}=7000\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

计算典型方程的系数和自由项如下

$$r_{11}=7i, r_{12}=r_{21}=2i, r_{22}=7i$$

$$R_{1\Delta}=-14, R_{2\Delta}=8$$

代入位移法典型方程

$$\begin{cases}7iz_1+2iz_2-14=0\\2iz_1+7iz_2+98=0\end{cases}$$

计算基本未知量 z_1，z_2 得

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{98}{15i}=\dfrac{6.533}{i}=0.9333\times10^{-3}\,\text{rad} \\ z_2=\dfrac{-238}{15i}=\dfrac{-15.867}{i}=-2.2667\times10^{-3}\,\text{rad} \end{cases}$$

由$M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_\Delta$，可画出 M 图，如图 8-2-24 所示。

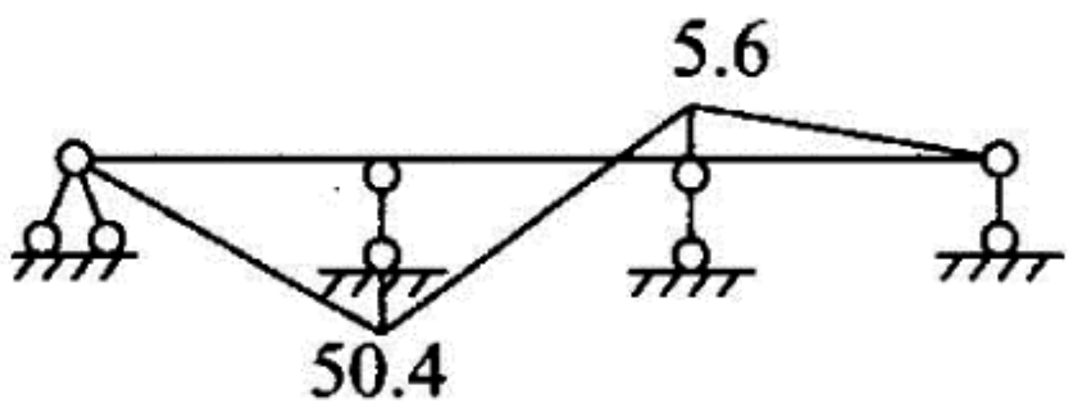


图 8-2-24（kN·m）

8-8　试用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

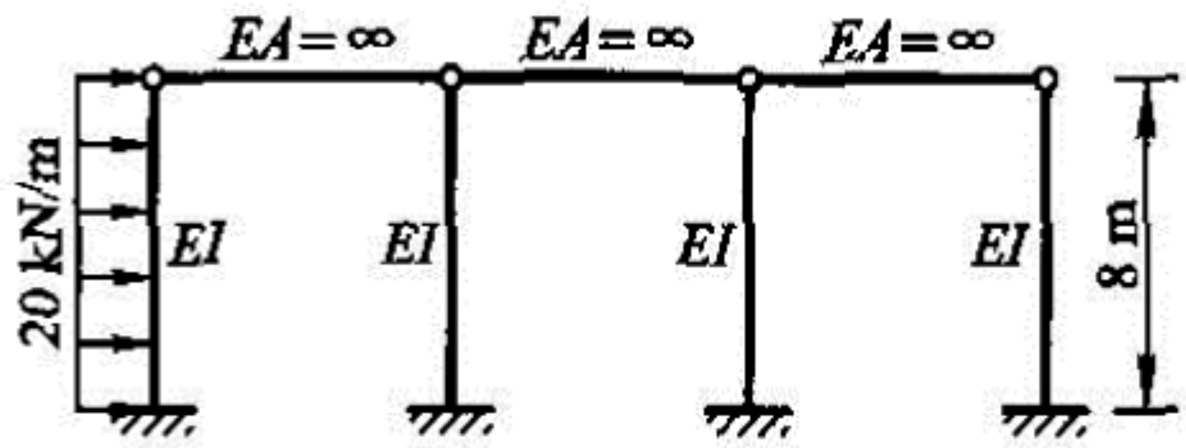


图 8-2-25（题 8-8）

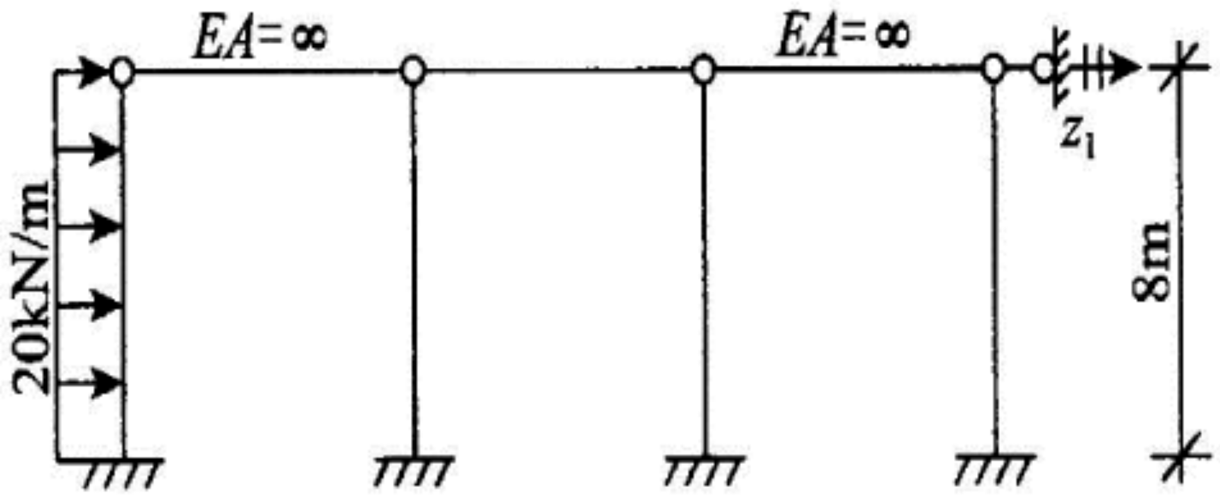


图 8-2-26（基本体系）

解：此刚架基本未知量为横杆水平位移 z_1，在水平杆最后端附加链杆，即为基本体系，如图 8-2-26 所示。绘出$\overline{M_1}$图及 M_p 图，如图 8-2-27 所示。

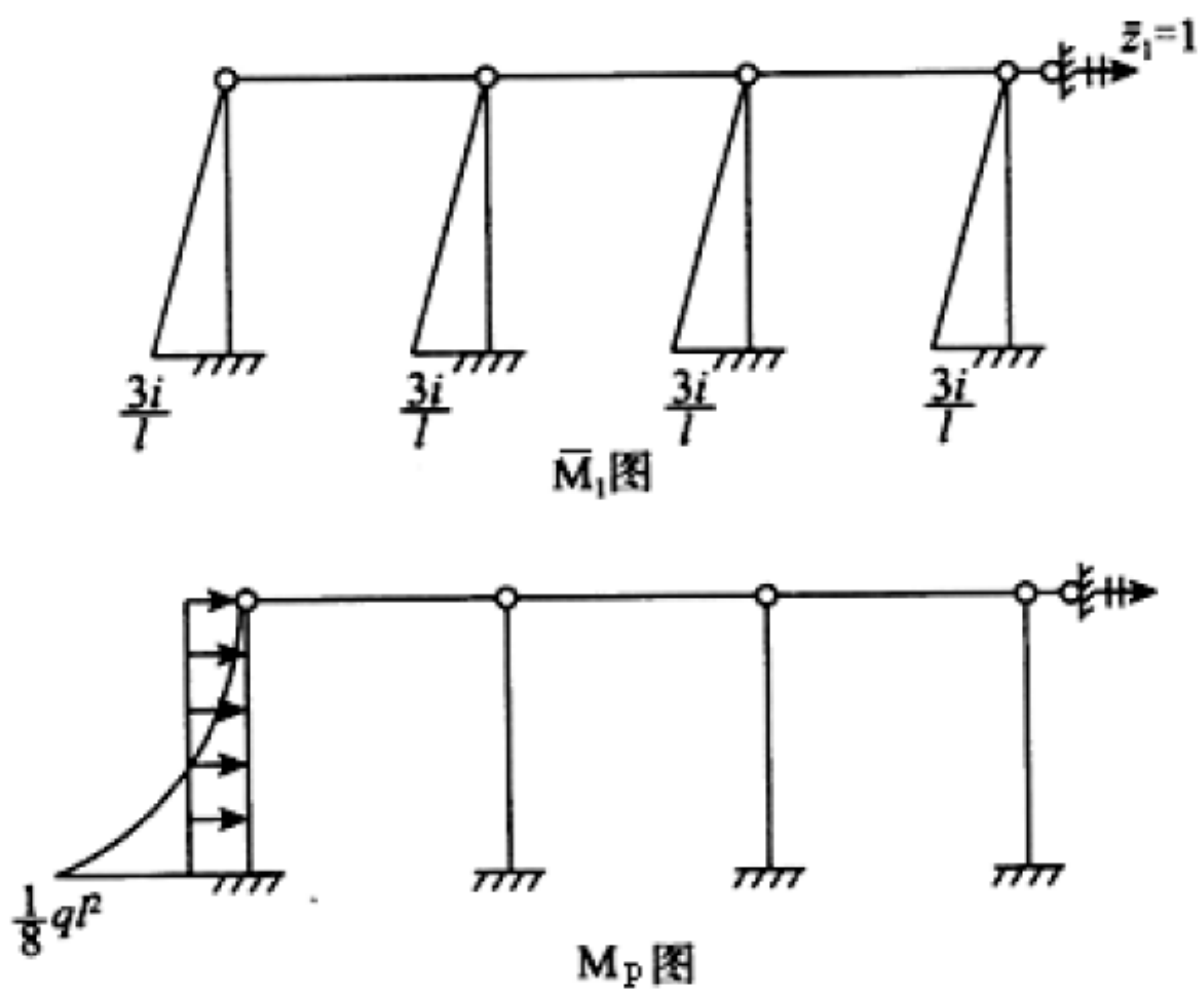


图 8-2-27

令$i=\frac{EI}{8}$，则计算位移法典型方程的系数和自由项

$$r_{11}=\frac{12i}{l^2},R_{1p}=-\frac{3}{8}ql$$

代入位移法典型方程

$$\frac{12i}{l^2}z_1-\frac{3}{8}ql=0$$

计算基本未知量 z_1 得

$$z_1=\frac{ql^3}{32i}$$

由 $M=\overline{M_1}z_1+M_p$，画出 M 图，如图 8-2-28 所示。

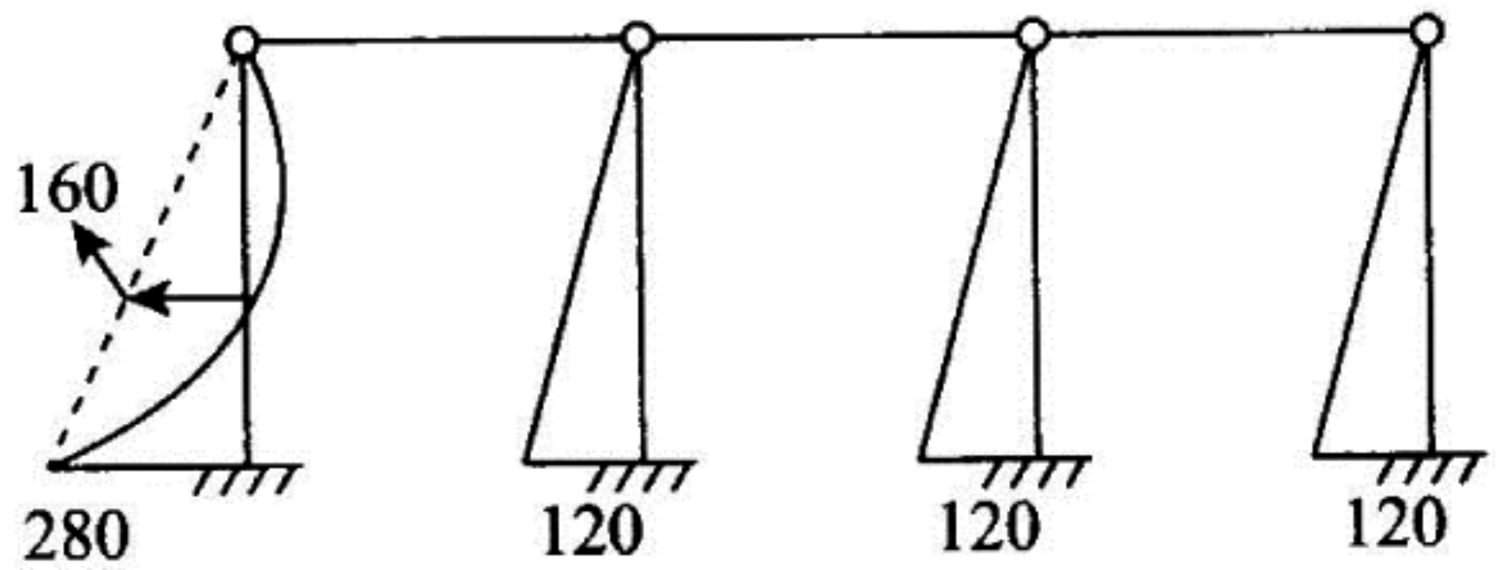


图 8-2-28（kN·m）

8-9　试用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

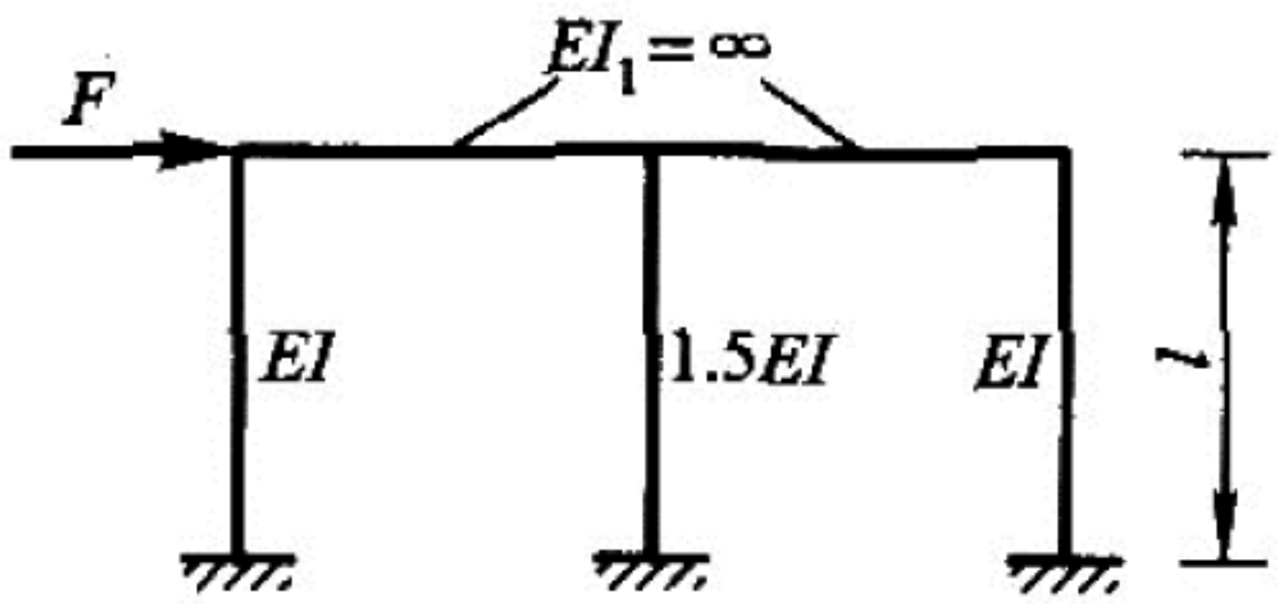


图 8-2-29（题 8-9）

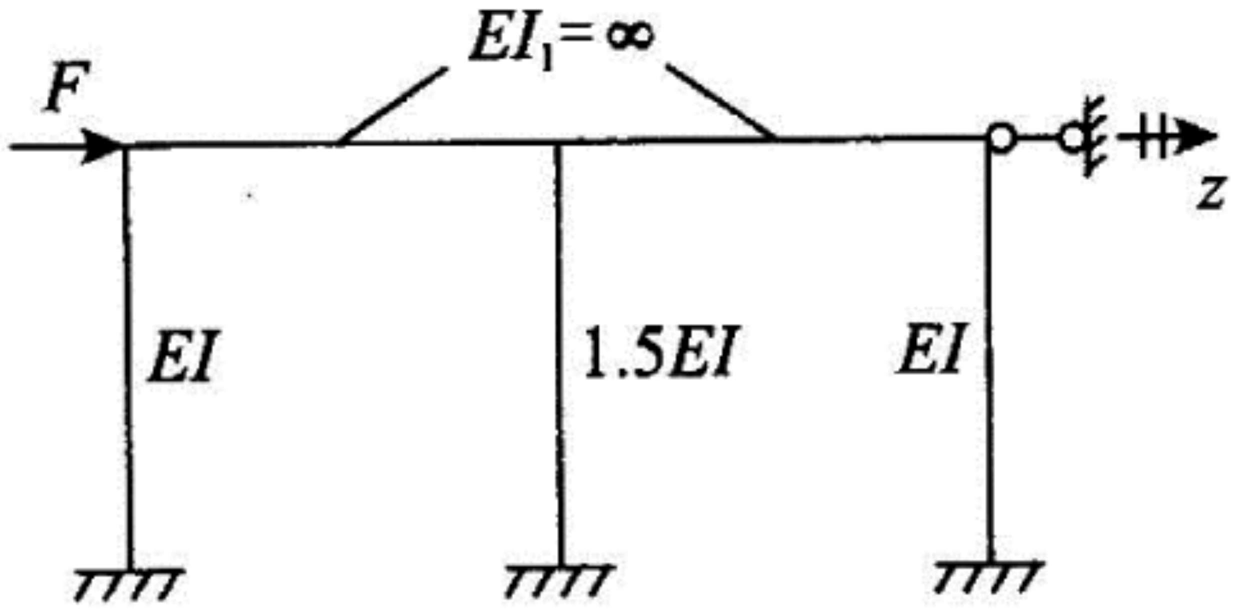


图 8-2-30（基本体系）

解：此刚架三刚结点均无转角，只有横杆水平位移 z_1，在水平杆最后端附加链杆，即为基本体系，如图 8-2-30 所示。绘出$\overline{M_1}$图及 M_p 图，如图 8-2-31 所示。

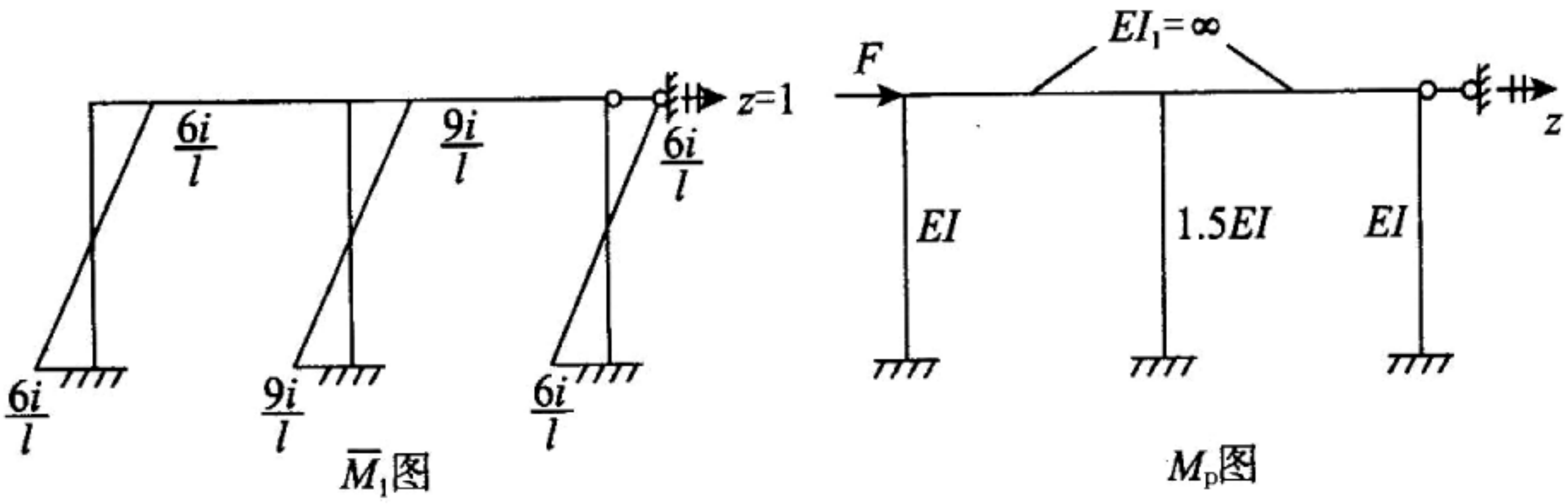


图 8-2-31

令 $\frac{EI}{l}=i$，则中间柱为$\frac{15EI}{l}=1.5i$

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=\frac{42i}{l^2},R_{1p}=-F$$

代入典型方程

$$\frac{42i}{l^2}z_1-F=0$$

解得

$$z_1=\frac{Fl^2}{42i}$$

先根据 $M=\overline{M_1}z_1+M_p$ 画出各柱弯矩图，再由结点平衡推定出横梁弯矩，因反对称，故中间结点处两横杆杆端弯矩各为$\frac{3}{28}Fl$，得到最终弯矩图 M，如图 8-2-32 所示。

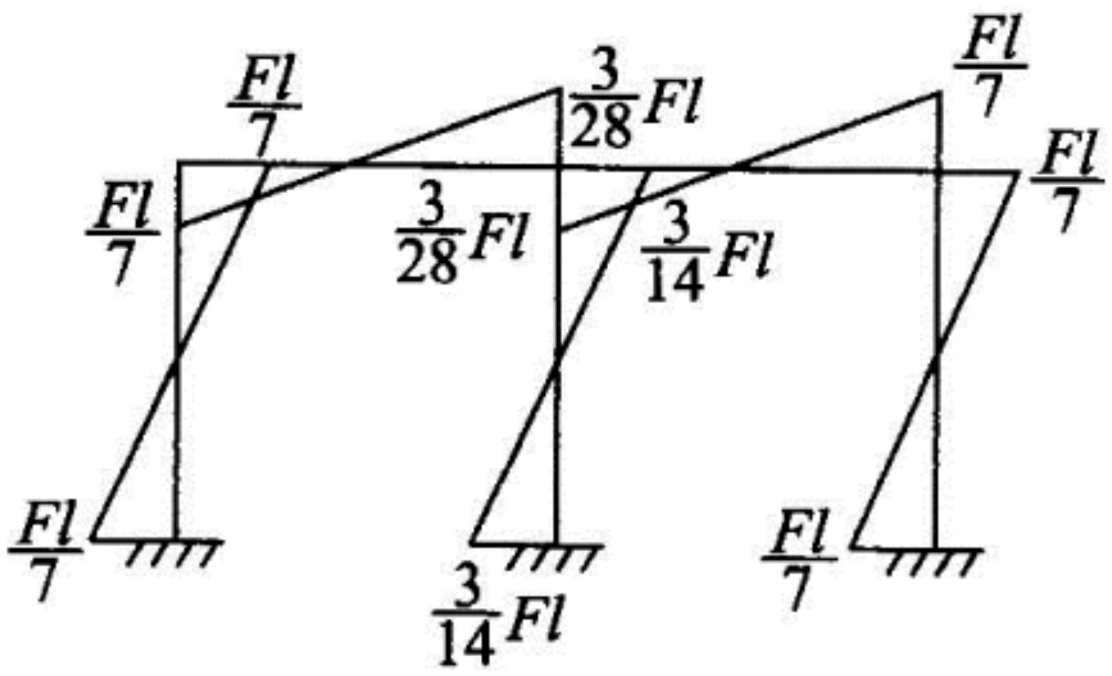


图 8-2-32

8-10　试用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

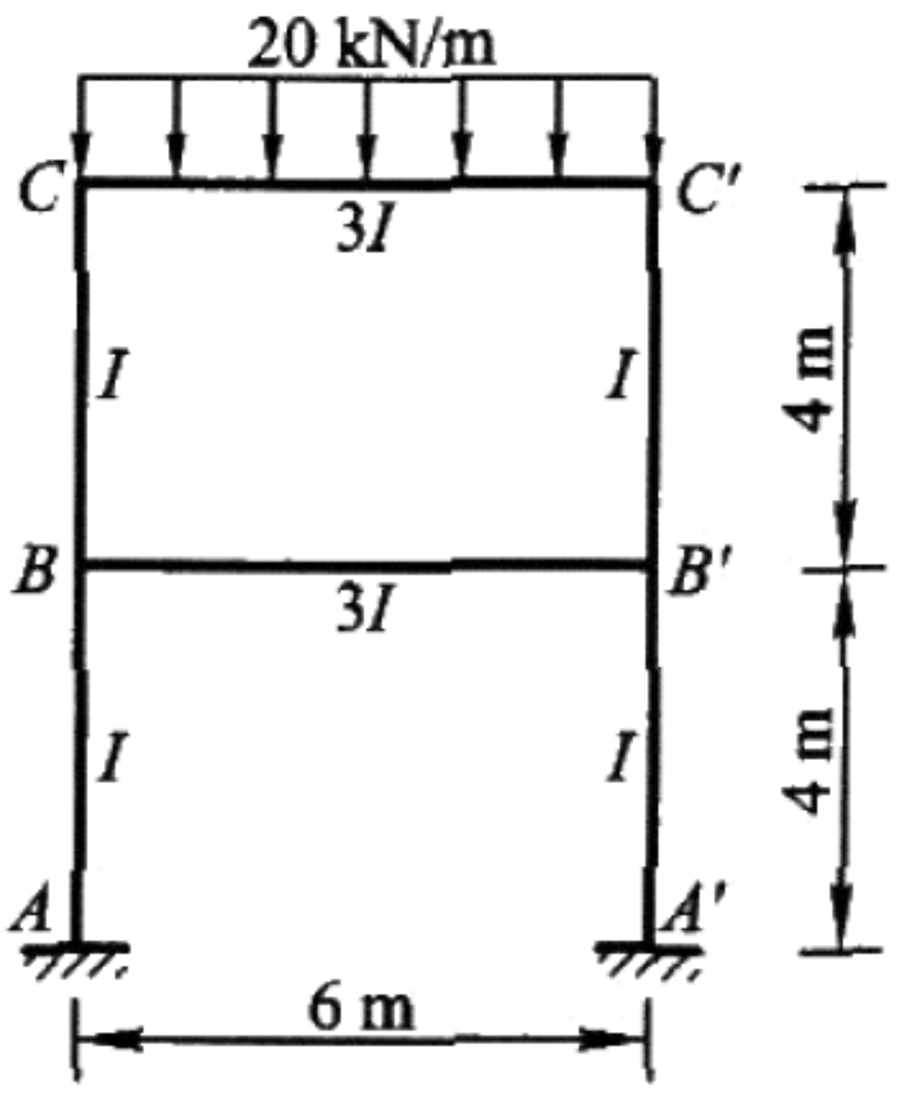


图 8-2-33（题 8-10）

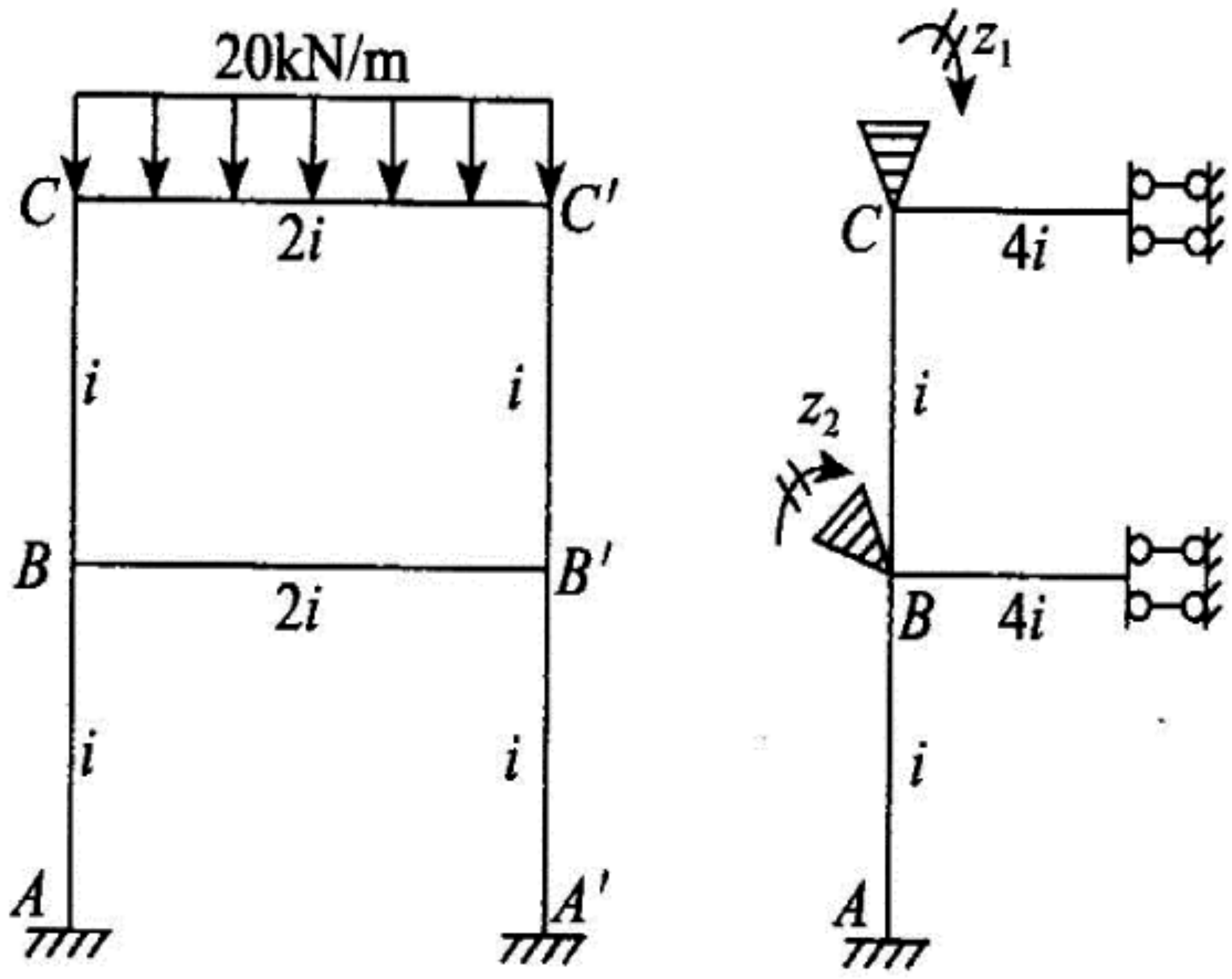


图 8-2-34（基本体系）

解：此体系为正对称结构，取一半分析，基本未知量为结点 C 处的转角 z_1 和结点 B 处转角 z_2，在 B 处、C 处附加刚臂，即得基本体系如图 8-2-34 所示。绘出 $\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$、M_P 图，如图 8-2-35 所示。

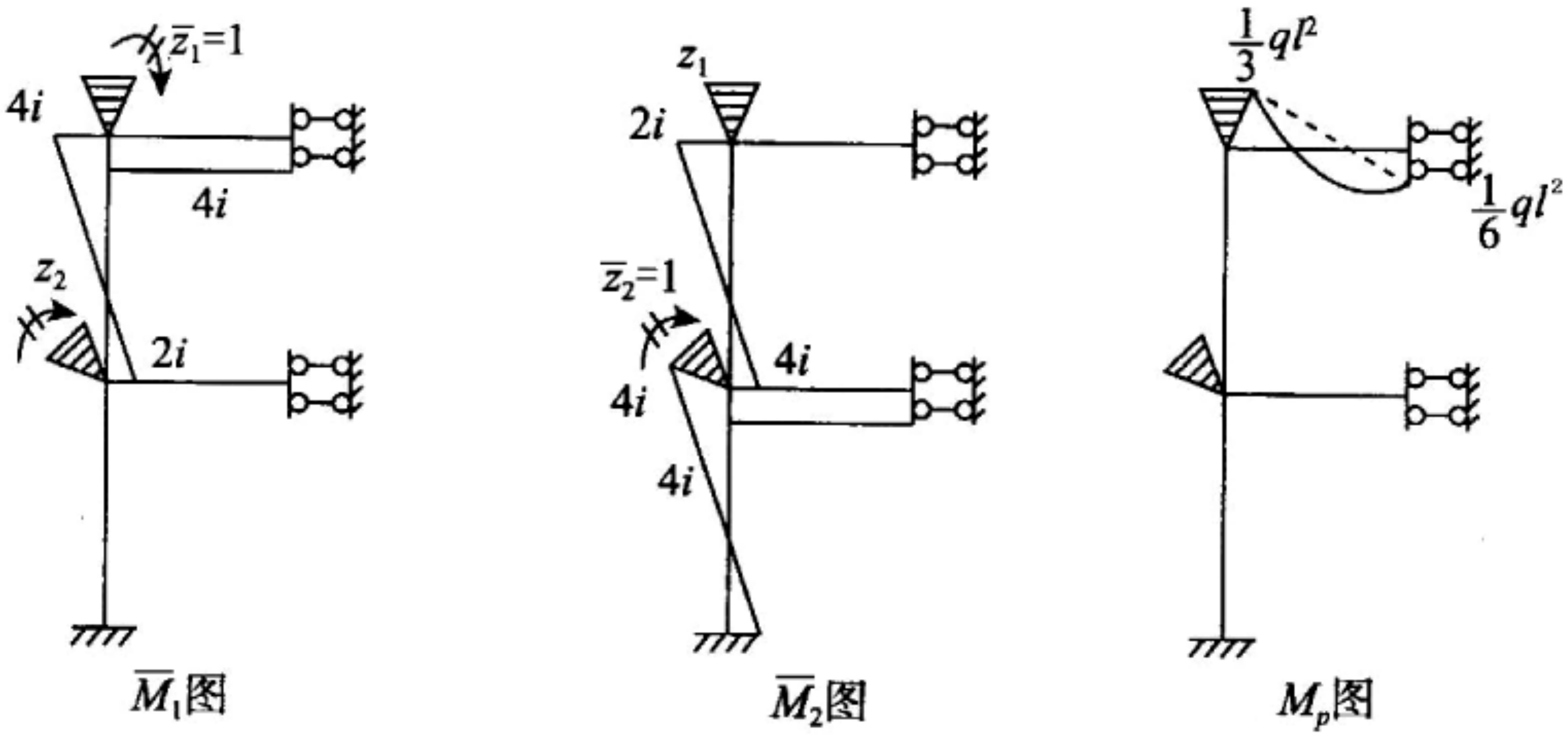


图 8-2-35

令 $i=\dfrac{EI}{4}$ ，则

计算位移法典型方程的系数和自由项，具体过程如下

$$r_{11}=8i, r_{12}=r_{21}=2i, r_{22}=12$$

$$R_{1p}=-60, R_{2p}=0$$

代入典型方程

$$\begin{cases} 8iz_1+2iz_2-60=0 \\ 2iz_1+12iz_2+0=0 \end{cases}$$

计算基本未知量 z_1、z_2 得

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{180}{23i}=\dfrac{7.826}{i} \\ z_2=\dfrac{-30}{23i}=\dfrac{-1.3043}{i} \end{cases}$$

由 $M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_p$，画出最终的 M 图，如图 8-2-36 所示。

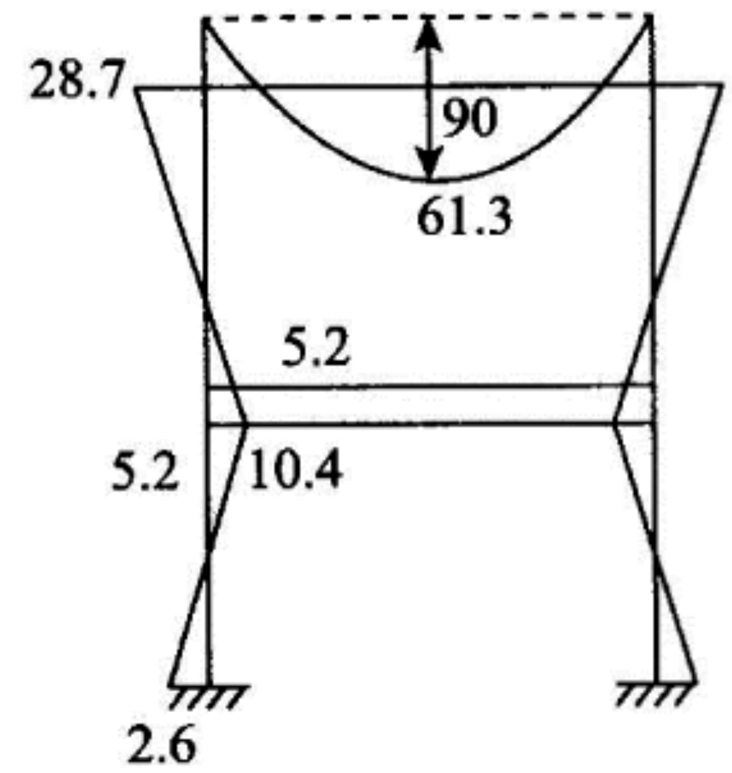


图 8-2-36（kN·m）

8-11　试用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

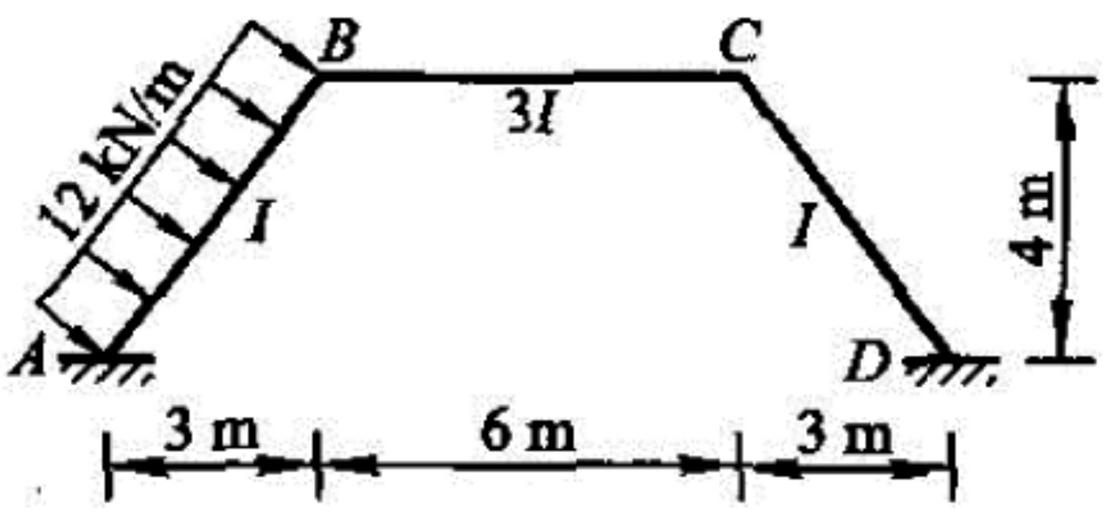


图 8-2-37（题 8-11）

解：将结构分为正对称结构和反对称结构，如图 8-2-38 所示。正对称结构用位移法进行计算，反对称结构用力法计算。

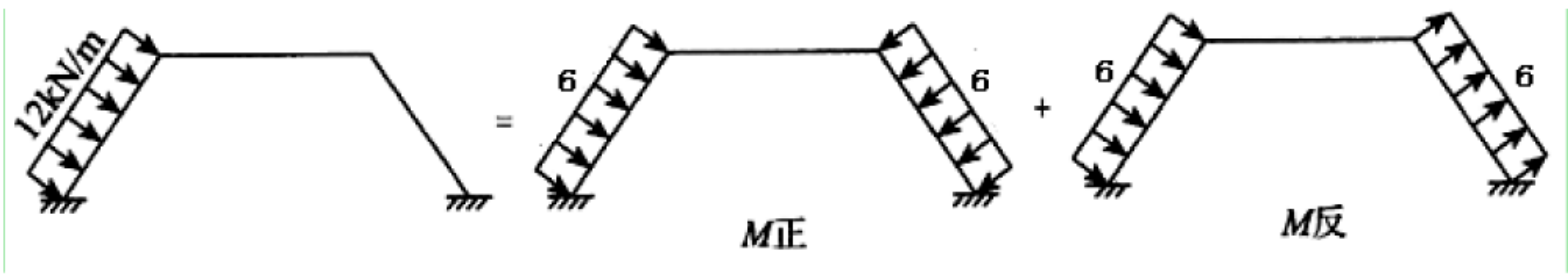


图 8-2-38

在正对称结构中，取一半分析，基本未知量为结点 B 处的转角 z_1，在 B 处附加刚臂，即得基本体系如图 8-2-39 所示。

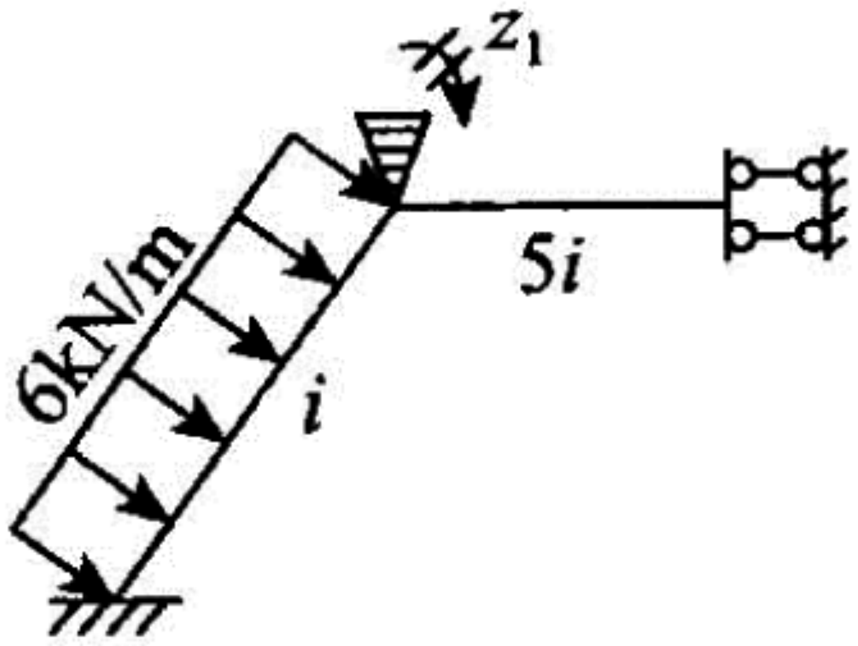


图 8-2-39（正对称基本体系）

运用位移法求解，可解得未知量 z_1

$$z_1=\frac{-R_{1p}}{r_{11}}=-\frac{12.5}{9i}=-\frac{1.3889}{i}$$

由$M=\overline{M}z_1+M_p$，可得正对称结构的最终弯矩图 M 正，如图 8-2-40（a）所示。

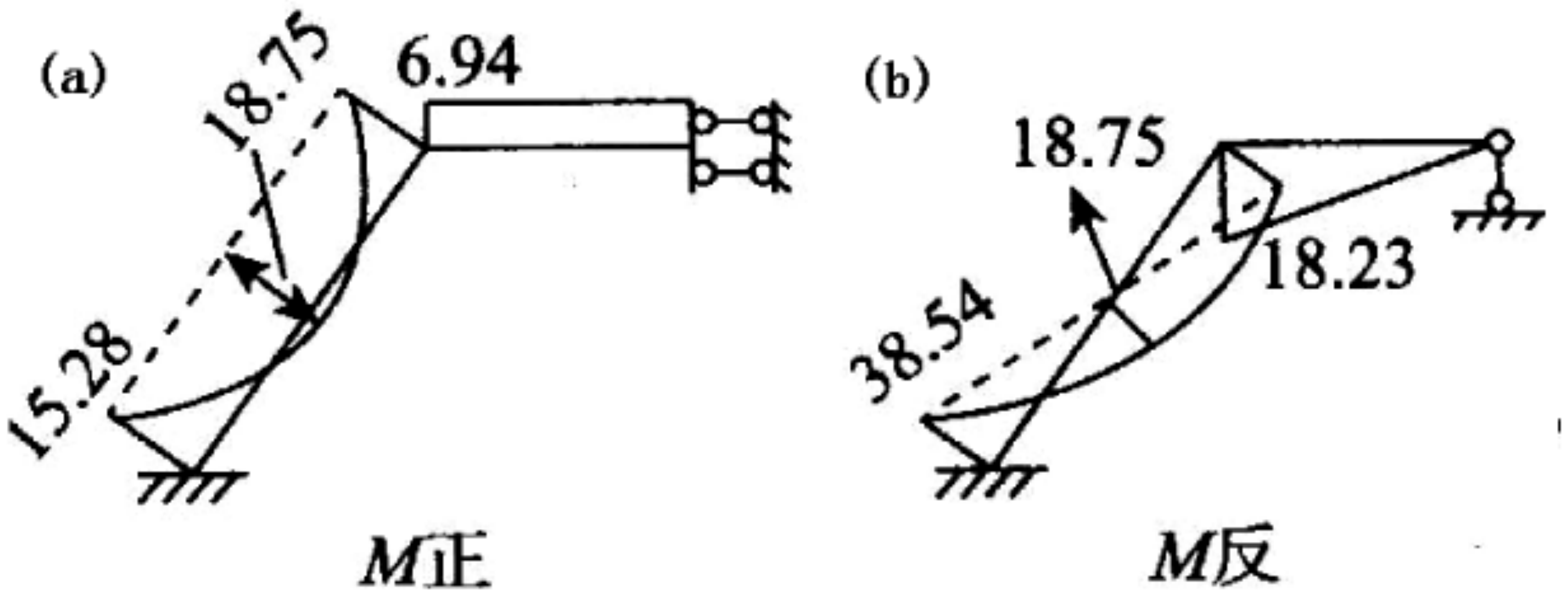


图 8-2-40

反对称结构用力法求解，未知力为 x_1，基本体系如图 8-2-41 所示。

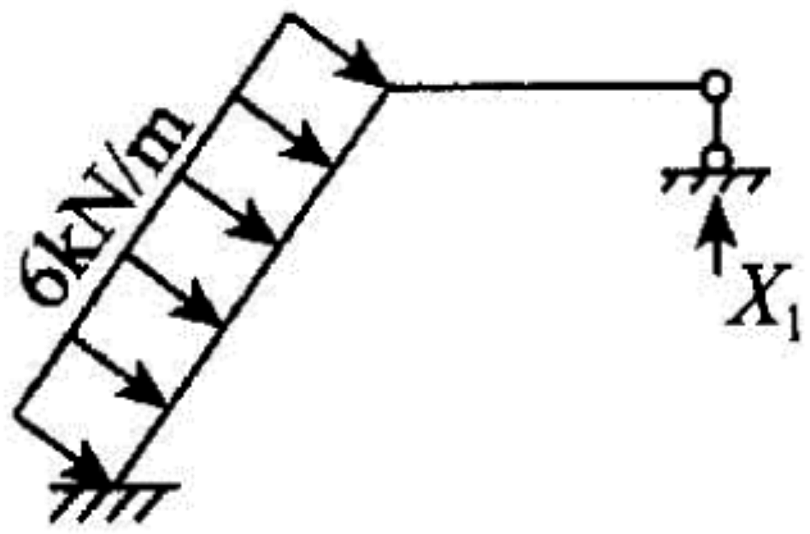


图 8-2-41（反对称基本体系）

用力法求解未知力 x_1 得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}=-\frac{-656.25}{108}=6.0764\ \text{kN}$$

由$M=\delta_{11}X_1+M_p$，可得反对称结构的最终弯矩图 M 反，如图 8-2-40（b）所示。

最后将 M 正与 M 反叠加即得原结构的为弯矩 M 图，如图 8-2-42 所示。

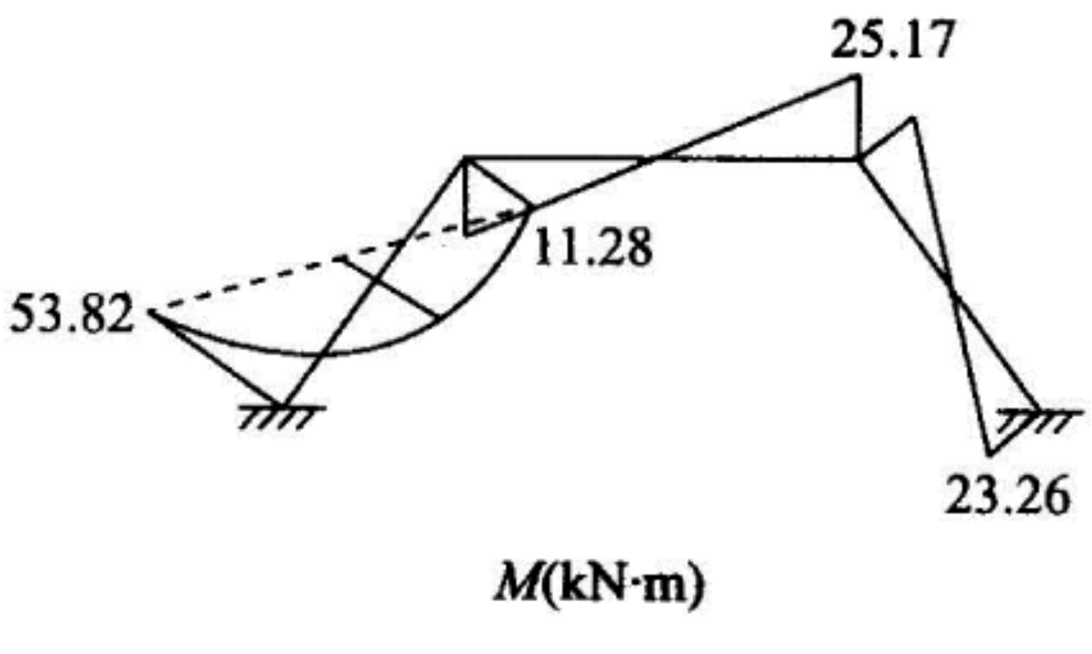


图 8-2-42

8-12　试用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

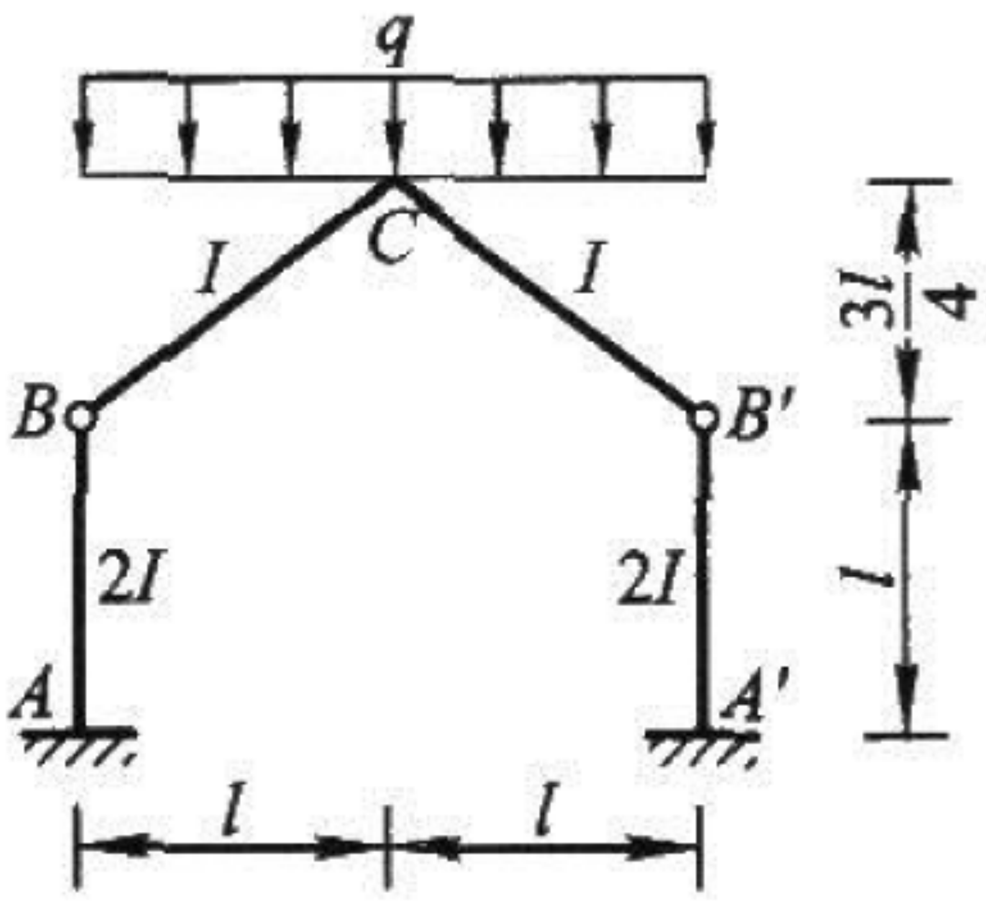


图 8-2-43（题 8-12）

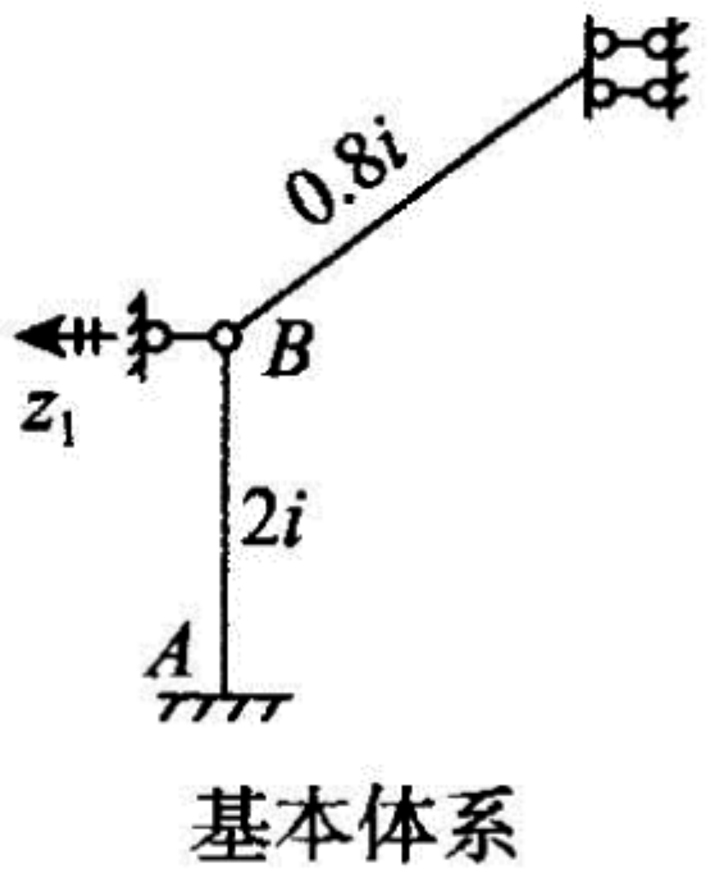


图 8-2-44

解：本题为对称结构且有侧移，取一半结构，未知量为 B 处的水平位移 z_1，在 B 处加水平链杆即得基本体系如图 8-2-44 所示。画出 $\overline{M}_1$ 图及 M_p 图，如图 8-2-45 所示。

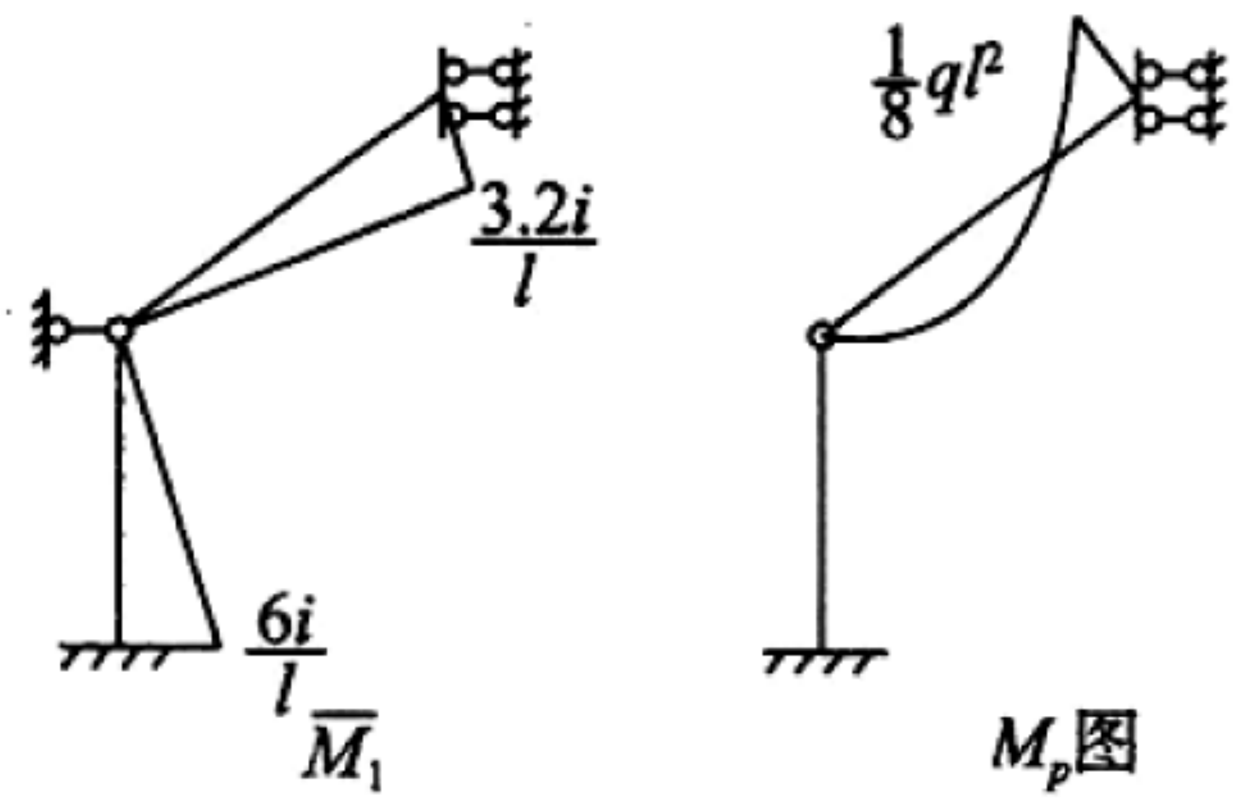


图 8-2-45

令 $i=\dfrac{EI}{l}$ ，则

计算位移法典型方程的系数和自由项，如图 8-2-46 所示，具体过程如下

$$r_{11}=\frac{\dfrac{6i}{l^2}\cdot\dfrac{3l}{4}+\dfrac{3.2i}{l}}{\dfrac{3}{4}l}=\frac{30.8i}{3l^2}$$

$$R_{1p}=-\frac{ql\cdot\frac{l}{2}+\frac{ql^2}{8}}{\frac{3}{4}l}=-\frac{5ql}{6}$$

计算基本未知量 z_1 得

$$z_1=\frac{25ql^3}{308i}=0.081169\frac{ql^3}{i}$$

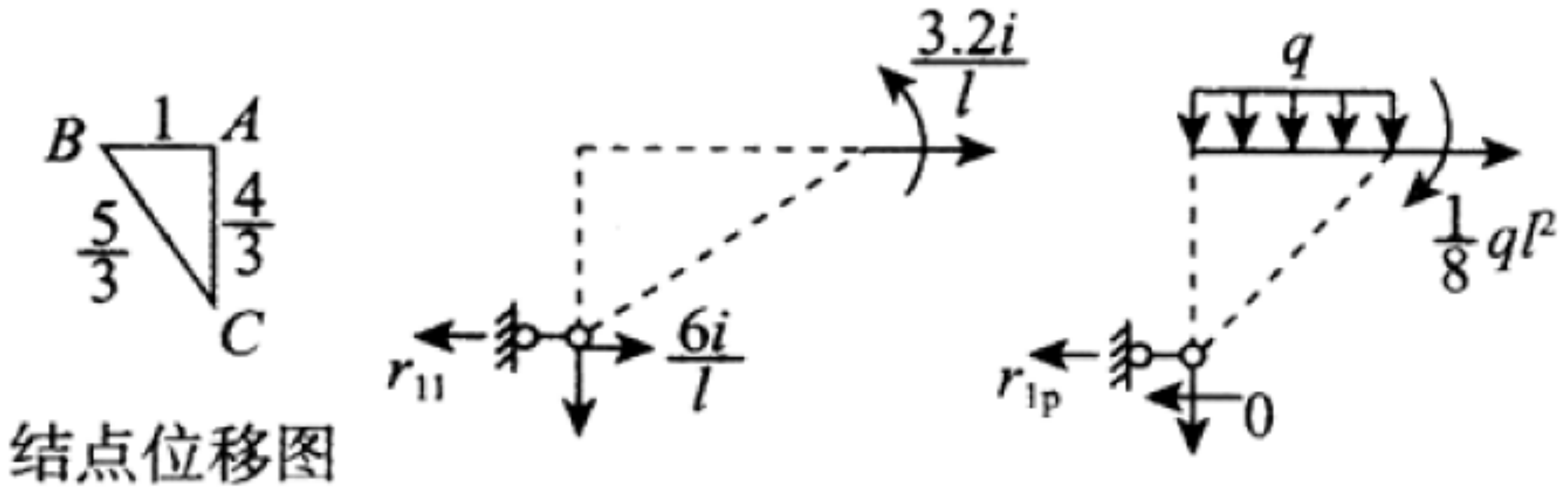


图 8-2-46

由 $M=\overline{M_1}z_1+M_p$，可得原结构最终弯矩 M 图，如图 8-2-47 所示。

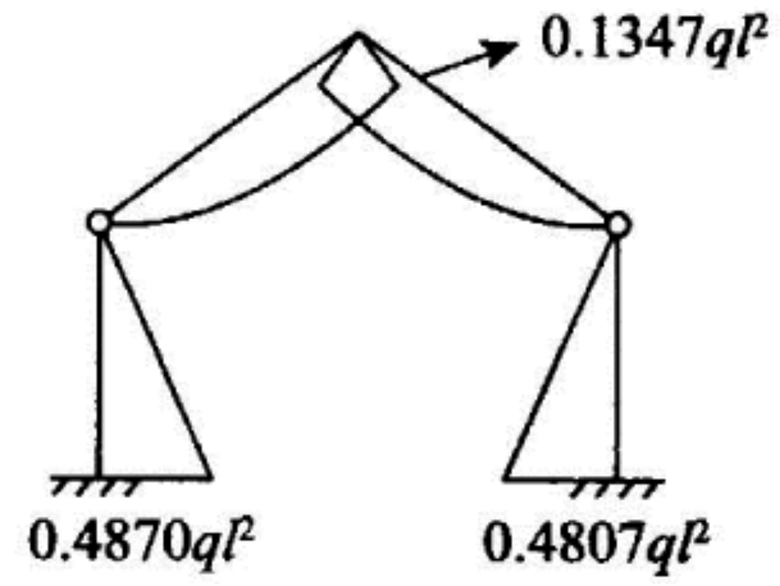


图 8-2-47

8-13　用位移法计算图示结构，绘制弯矩图。E＝常数。

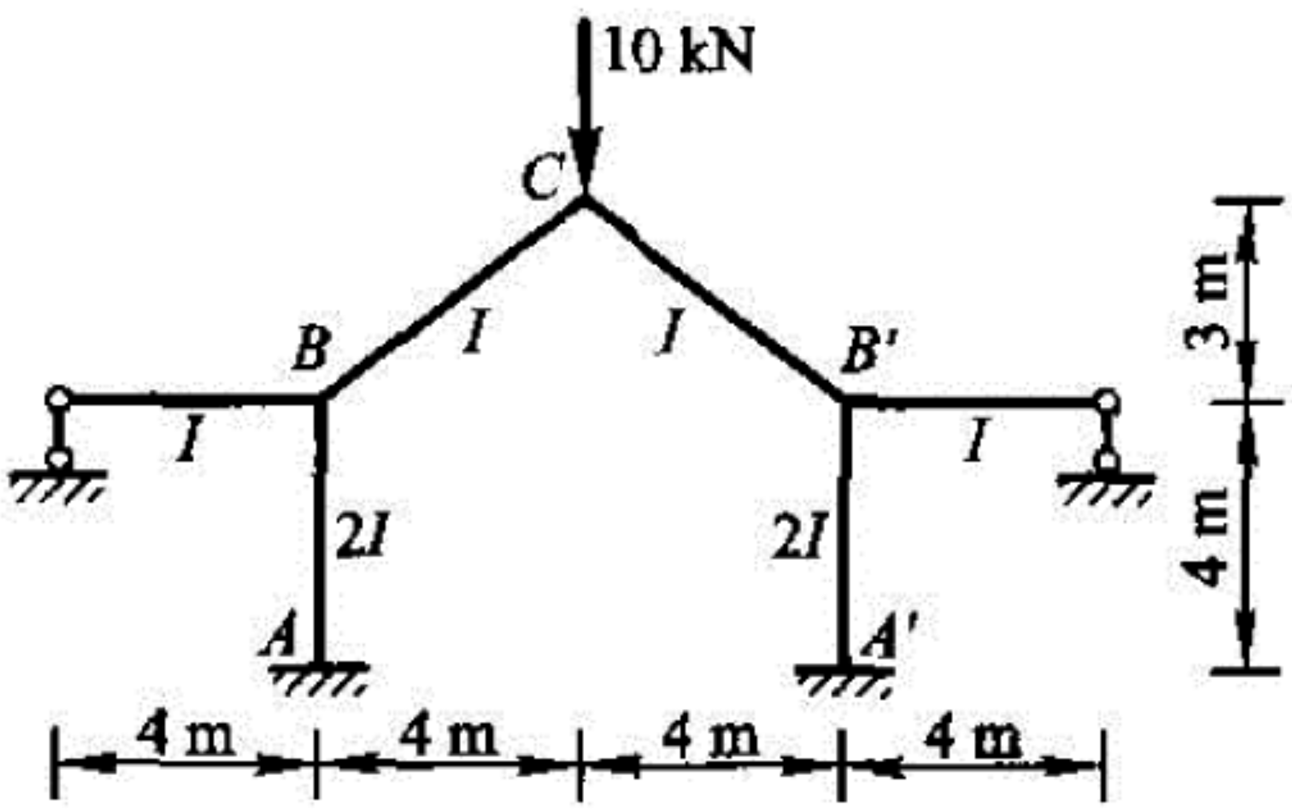


图 8-2-48（题 8-13）

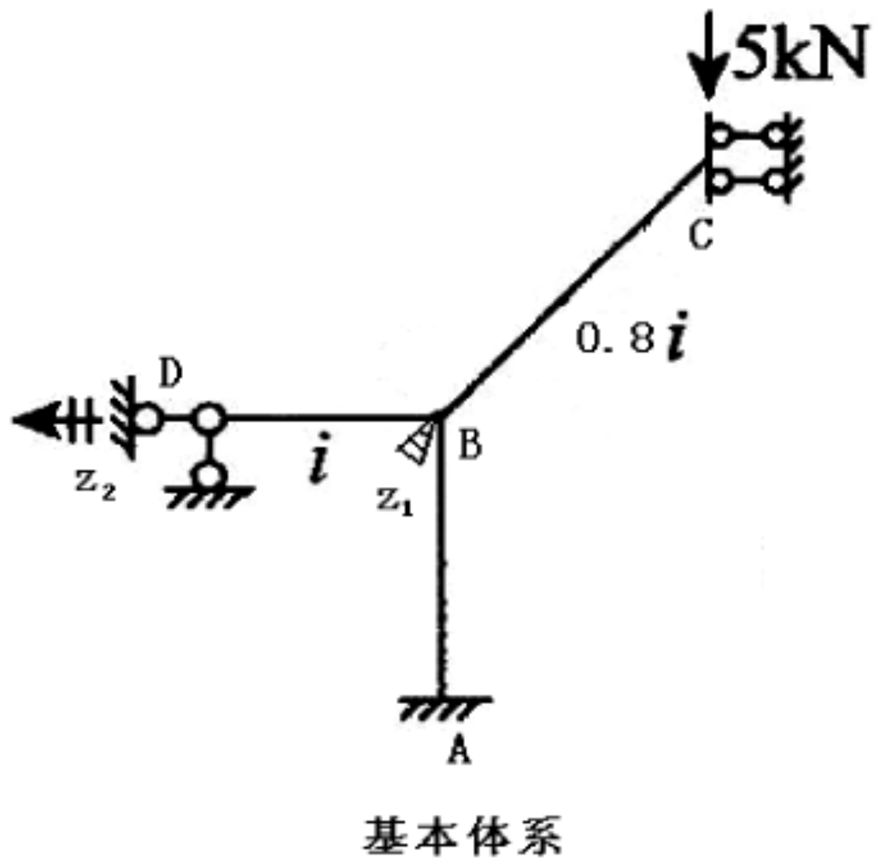


图 8-2-49

解：此体系为正对称结构，取一半结构分析，基本未知量为 D 处的水平位移 z1 和 B 处的转角位移。在 D 处加水平链杆，在 B 处加刚臂即为基本体系，如图 8-2-49 所示。画出$\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$及M_p图，如图 8-2-50 所示。

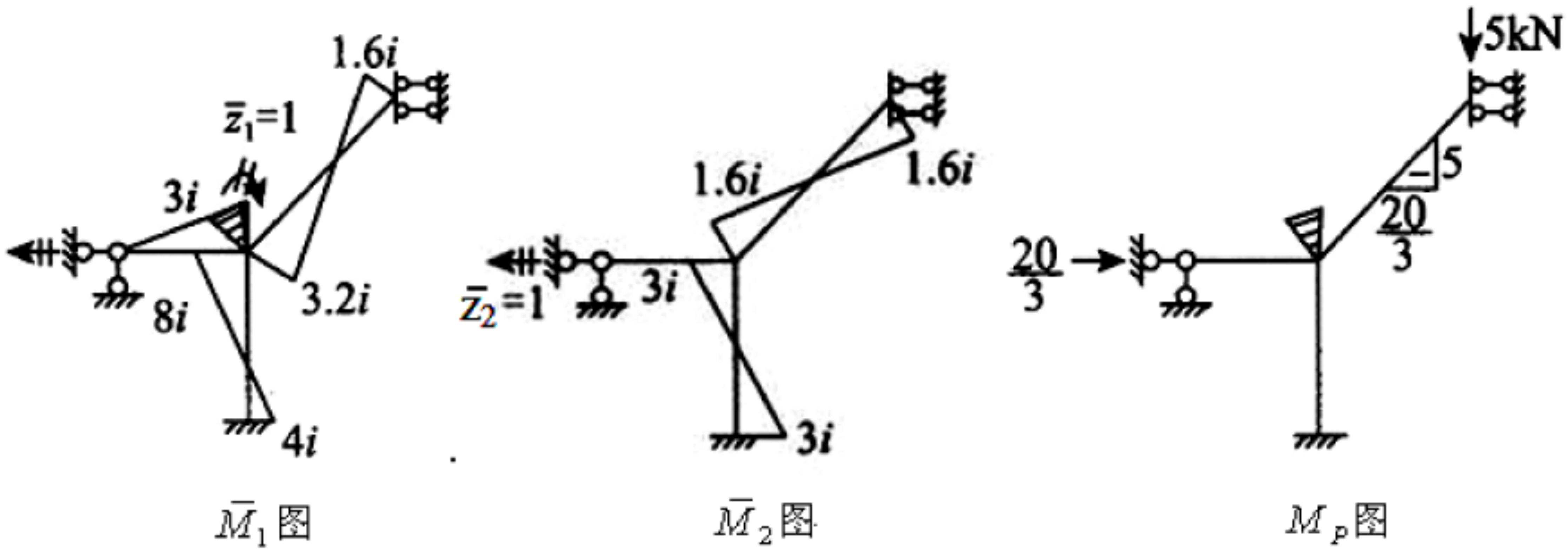


图 8-2-50

令 $i=\frac{EI}{4}$ ，计算位移法典型方程的系数和自由项，如图 8-2-51 所示，具体过程如下

$$r_{11}=14.2i, r_{12}=r_{21}=1.4i$$

$$r_{22}=1.5i+\frac{1.5i\times3+3i-1.4i+1.6i}{3}=\frac{7.7}{3}i$$

$$R_{1p}=0, R_{2p}=-\frac{20}{3}$$

代入位移法典型方程求解

$$\begin{cases}14.2iz_1+1.4iz_2+0=0\\1.4iz_1+\frac{7.7i}{3}z_2-\frac{20}{3}=0\end{cases}$$

计算基本未知量 z_1，z_2 得

$$z_1=-\frac{0.2706}{i}, z_2=\frac{2.745}{i}$$

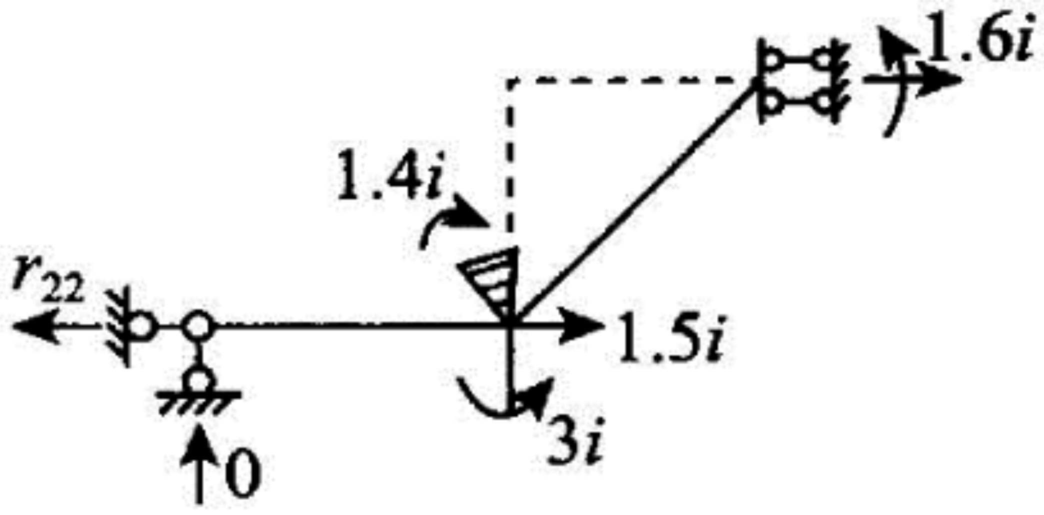


图 8-2-451

由$M=\overline{M_1}z_1+\overline{M_2}z_2+M_p$，可画出原结构的最终弯矩 M 图，如图 8-2-52 所示。

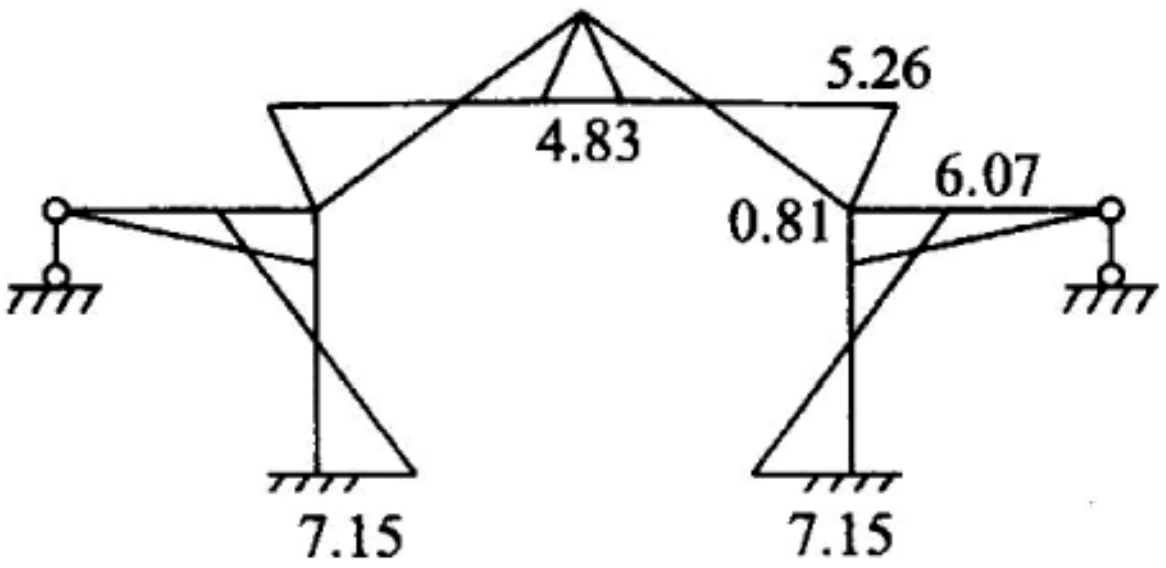


图 8-2-52

8-14　刚架温度变化如图所示，试作其弯矩图。各杆均为矩形截面，高度 h＝0.4m，

$EI=2\times10^4\ kN\cdot m^2, \alpha=1\times10^{-5}℃^{-1}$。

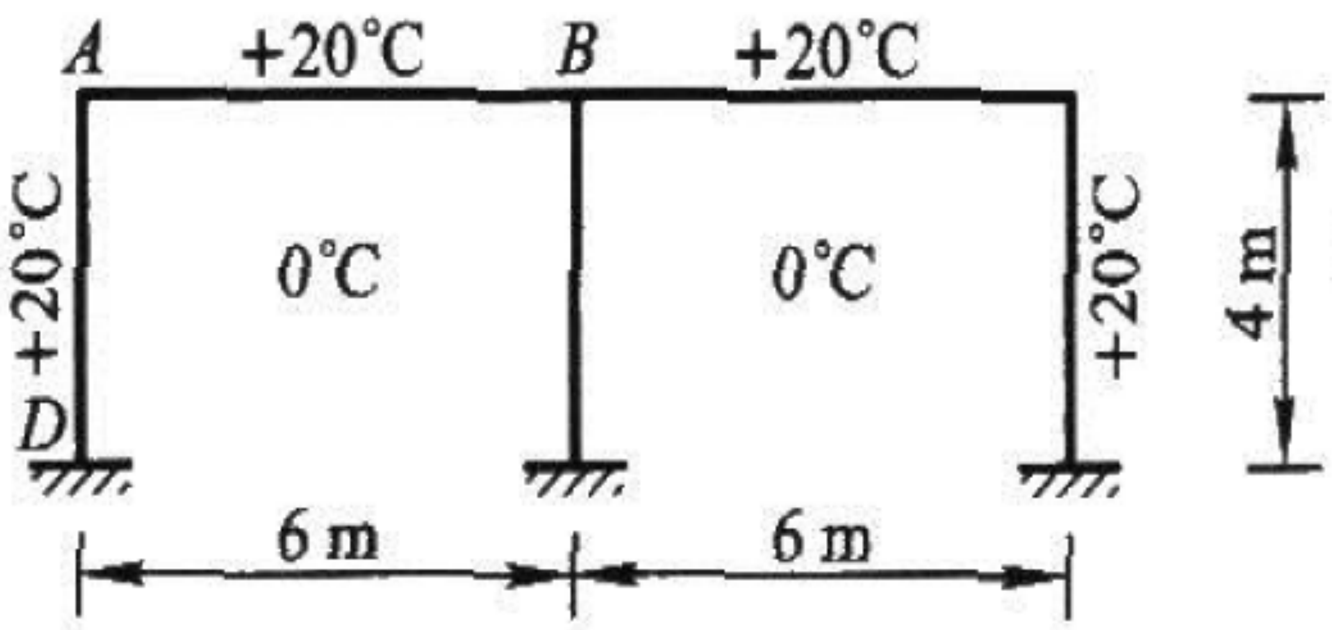


图 8-2-53（题 8-14）

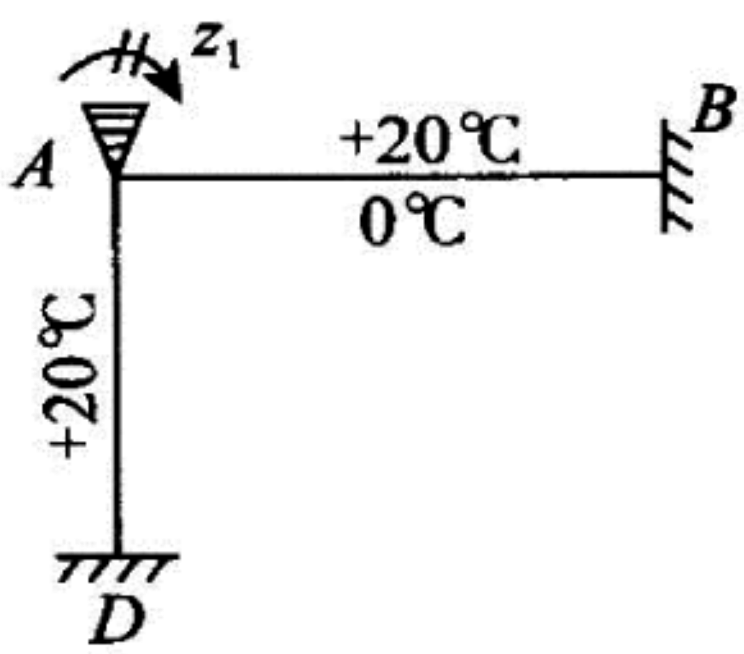
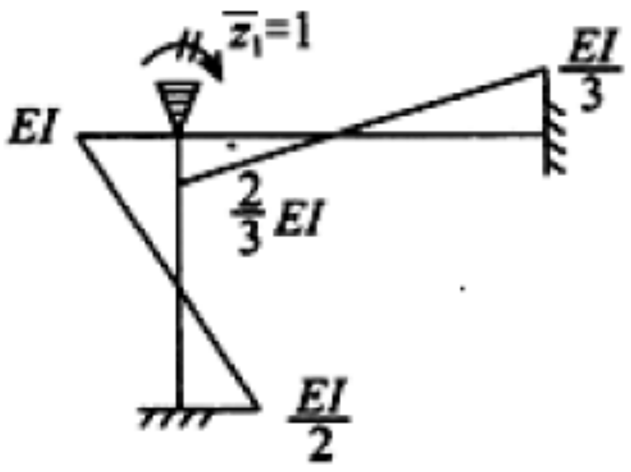
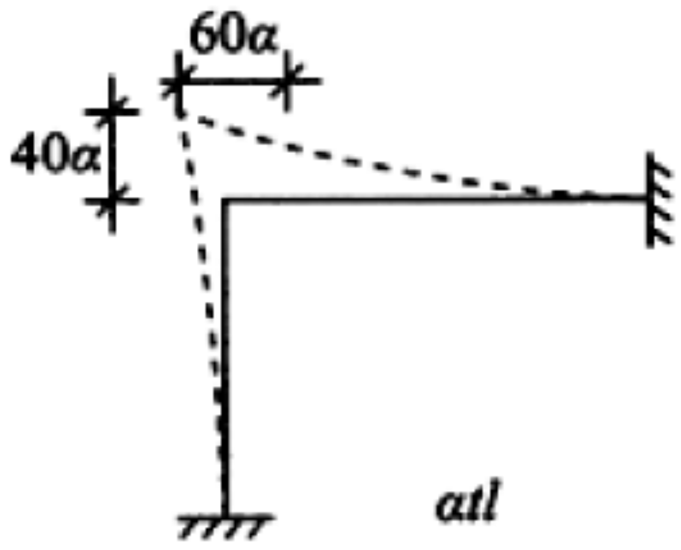


图 8-2-54（基本体系）

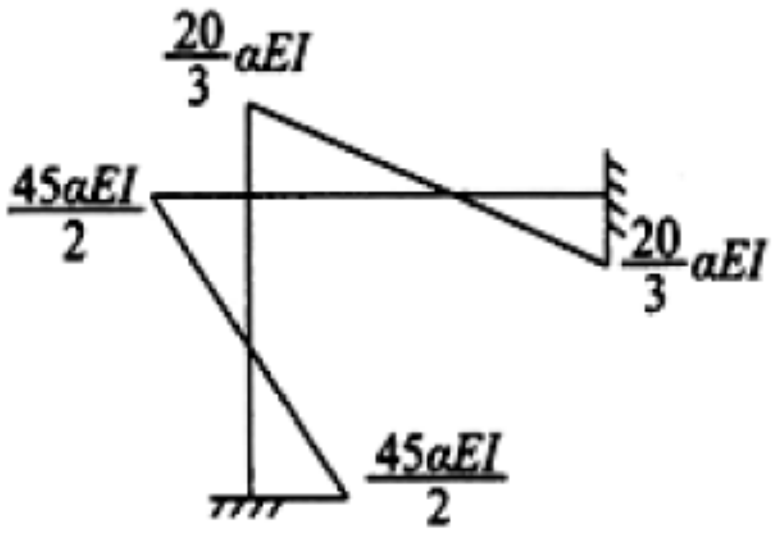
解：此体系为对称结构，取一半结构分析，基本未知量为 A 点的转角位移 z_1，并在 A 点加刚臂，即得基本体系，如图 8-2-54 所示。绘$\overline{M_1}$图、M_t图、温度变化图以及 $M_{\triangle t}$图，如图 8-2-55 所示。



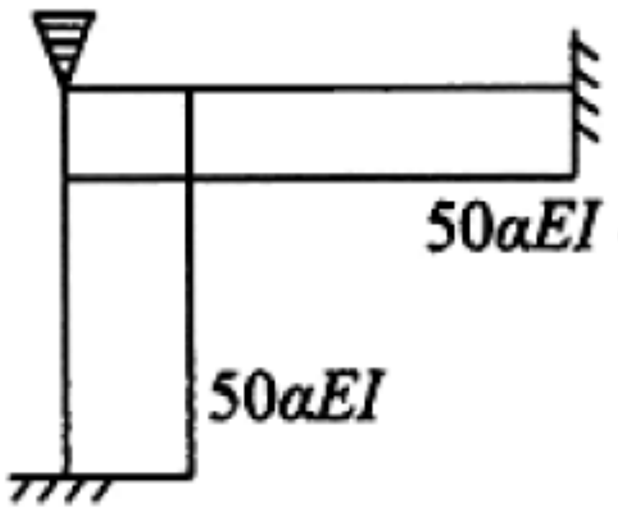
$\bar{M}_1$图



温度变化图



M_t图



$M_{\Delta t}$图

图 8-2-55

由题意知

$$t=+10^\circ C,\quad \Delta t=-20^\circ C,\quad \alpha EI=0.2kN\cdot m^2$$

计算典型方程的系数和自由项

$$r_{11}=\frac{5}{3}EI,\quad R_{1t}=\frac{95\alpha EI}{6}$$

计算基本未知量 z_1 得

$$z_1=-\frac{R_{1t}}{r_{11}}=-\frac{\frac{95}{6}\alpha EI}{\frac{5}{3}EI}=-9.5\alpha$$

刚架最后矩图由 $M=\bar{M}_1z_1+M_t+M_{\Delta t}$ 确定，如图 8-2-56 所示。

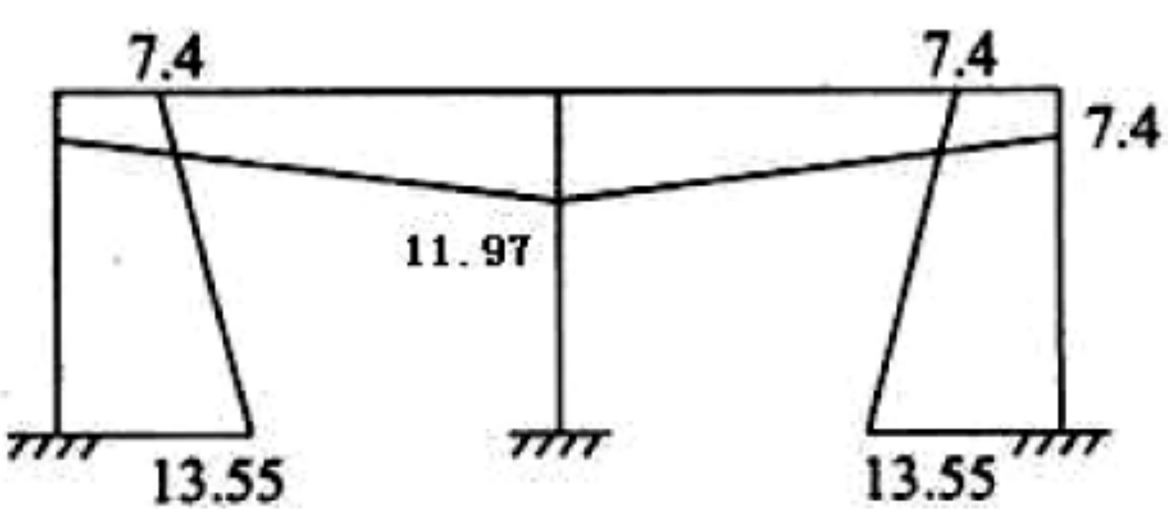


图 8-2-56

8-15　刚架的 EI＝常数，横梁温度均匀升高 t，两柱温度不变。试绘其弯矩图。

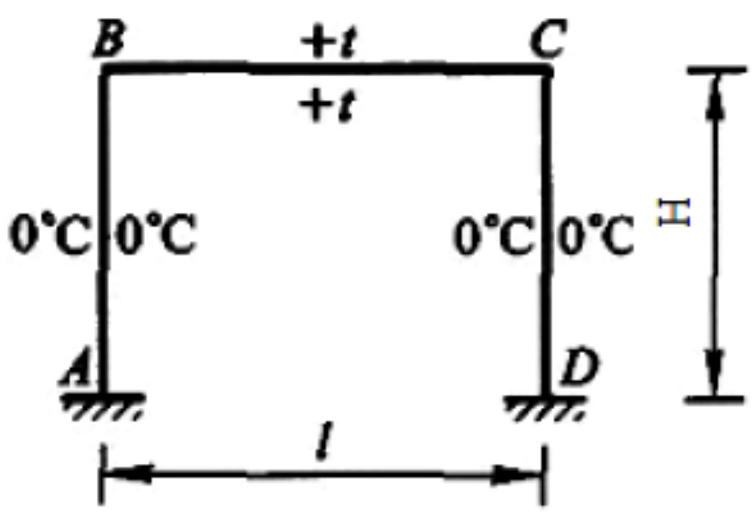


图 8-2-57（题 8-15）

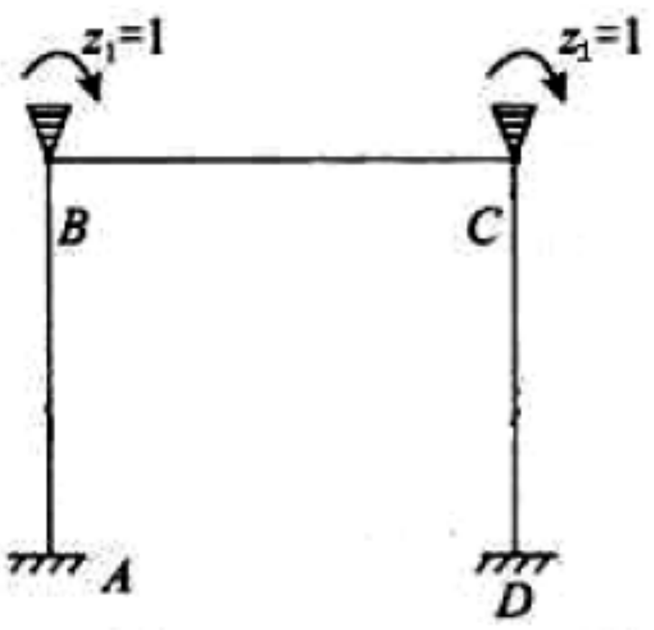


图 8-2-58（基本体系）

解：此体系为对称结构，故 B、C 两端转角相同，均设为 z_1，在 B、C 两点附加刚臂得到基本体系如图 8-2-58 所示。绘出$\overline{M}_1$、温度变化图以及 M_t 图，如图 8-2-59 所示。

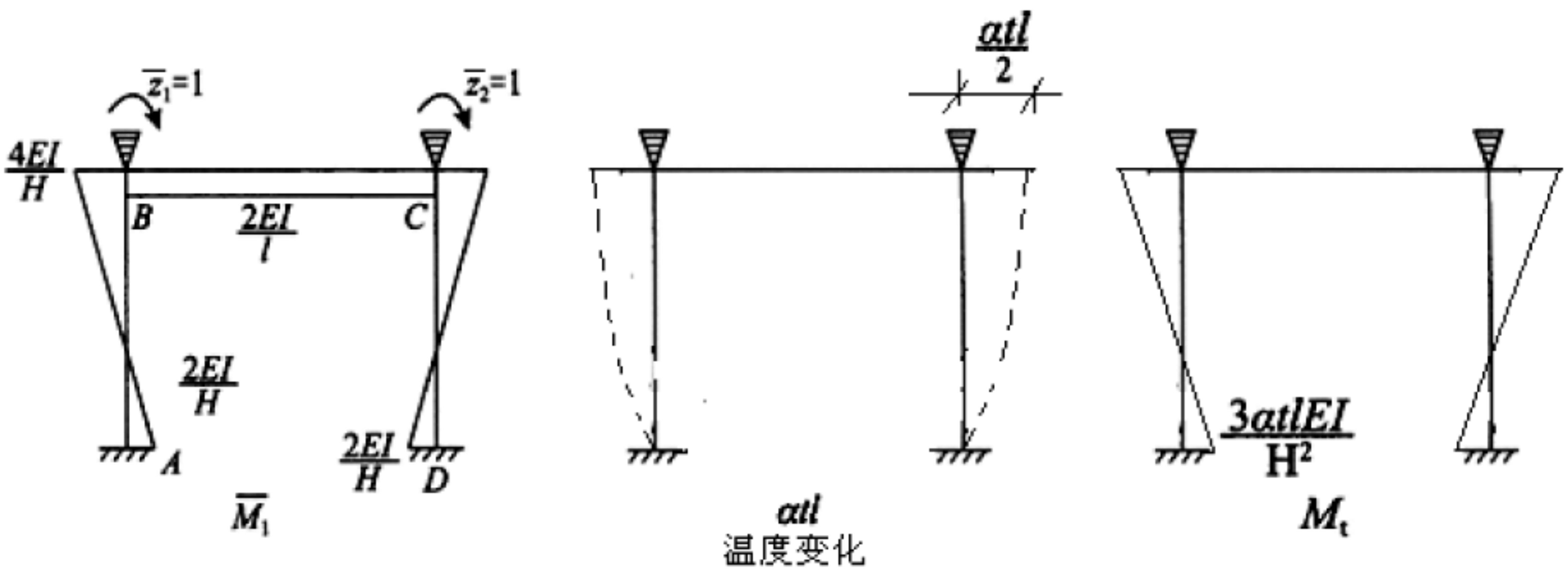


图 8-2-59

用位移法进行计算并算得截面弯矩，具体计算过程如下

$$r_{11}=\frac{4EI}{H}+\frac{2EI}{l}$$

$$R_{1t}=-\frac{3\alpha tlEI}{H^2}$$

$$z_1=-\frac{R_{1t}}{r_{11}}=-\frac{3\alpha tlEI}{H^2}\frac{1}{\frac{4EI}{H}+\frac{2EI}{l}}$$

$$=-\frac{3\alpha tl^2}{2H(2l+H)}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{l}\left[\frac{-3\alpha tl^2}{2H(2l+H)}\right]=-\frac{3\alpha tlEI}{H(2l+H)}$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{H}\left[-\frac{3\alpha tl^2}{2H(2l+H)}\right]+\frac{3\alpha tlEI}{H^2}=\frac{3\alpha tl(l+H)EI}{H^2(2l+H)}$$

由 $M=\bar{M}_1z_1+M_t$ 确定刚架的最终弯矩图 M，如图 8-2-60 所示。

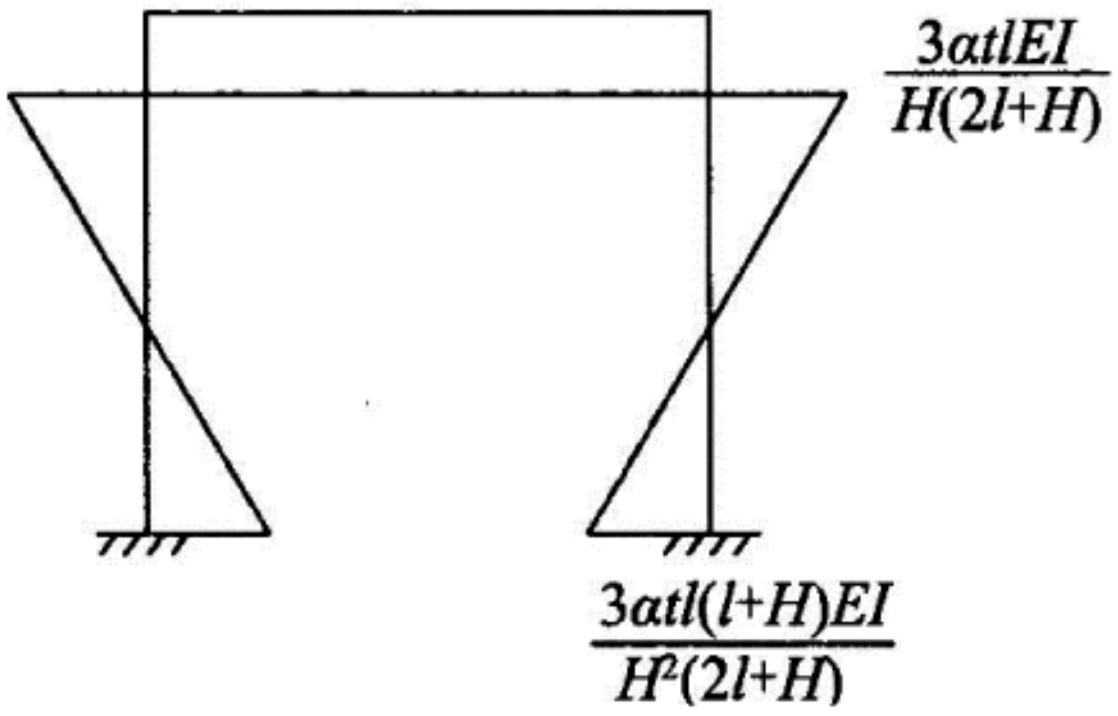


图 8-2-60

8.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 8-3-1 所示位移法的基本结构，当刚臂 B 沿正方向发生单位转角时，支座 C 水平链杆的反力大小为______，方向向______。EI=常数。[浙江大学 2007 研]

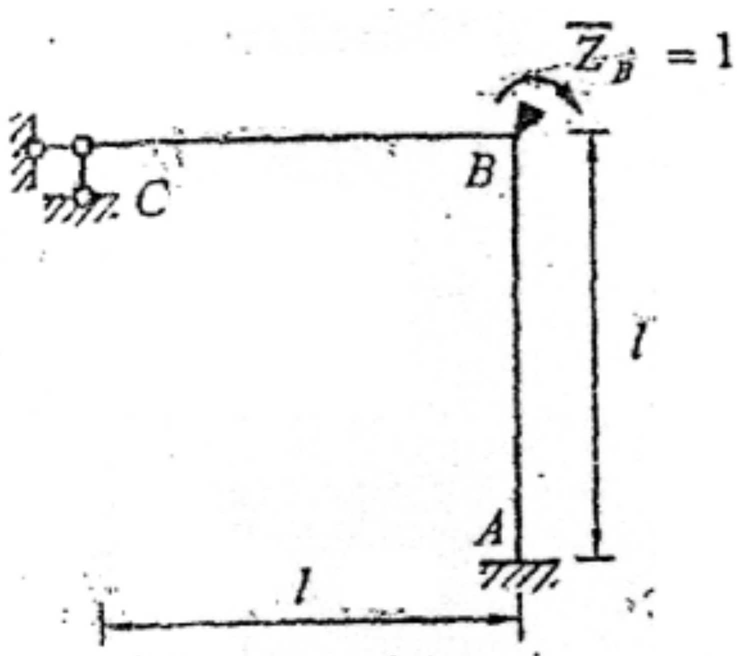


图 8-3-1

【答案】$\frac{6EI}{l^2}$；左

【解析】当刚臂 B 沿正方向发生单位转角时，AB 段的剪力为 $-\frac{6EI}{l^2}$；垂直于 AB 段截开，研究上半部分，根据水平方向上力的平衡可知：支座 C 处水平链杆的反力大小为 $\frac{6EI}{l^2}$，方向水平向左。

2．图 8-3-2 所示结构弹性支座抗转刚度 $\beta=2EI/l$，横梁刚度无穷大，用位移法求得弯矩如图 8-3-2 所示，则 B 点的转角为_____。[西南交通大学 2008 研]

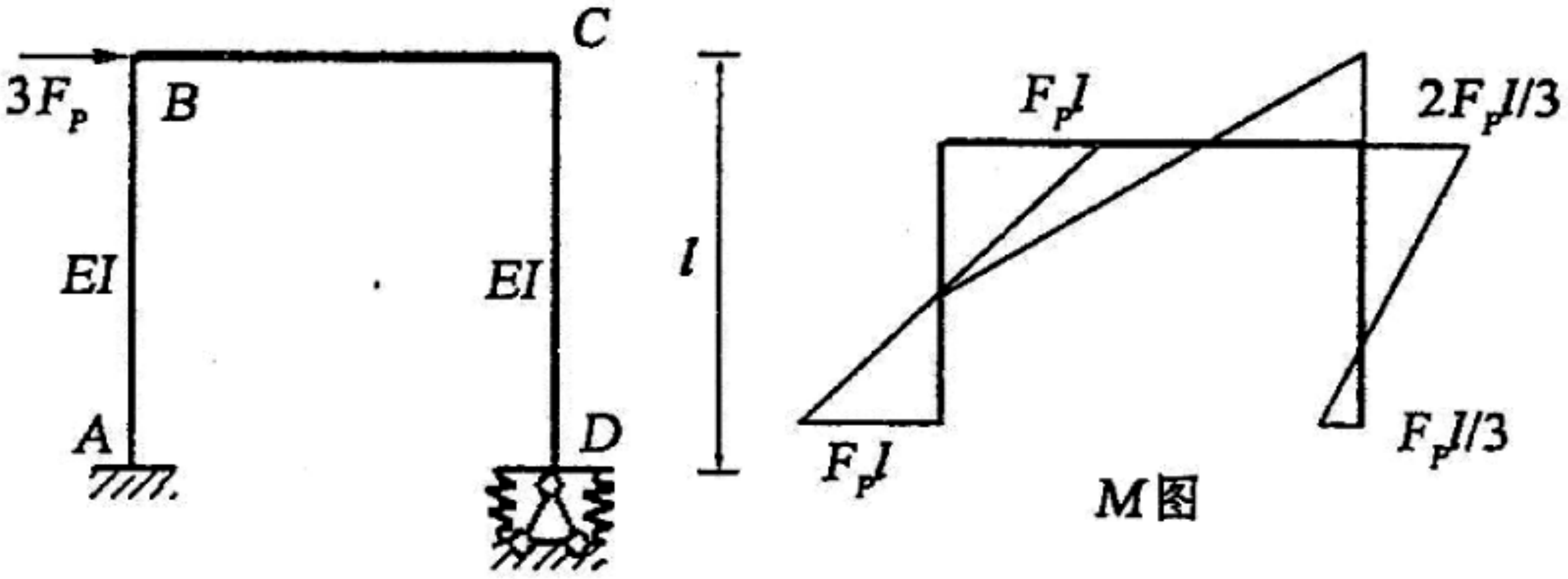


图 8-3-2

【答案】0

【解析】求 B 点的转角，在任意基本结构 B 点处施加顺时针单位弯矩与绘出的原结构弯矩图进行 h 图乘运算即可。基本结构：将 D　支座处的全部约束去掉；在 B 点处施加顺时针单位弯矩的弯矩 M_1 图如图 8-3-3 所示；进行图乘运算得到 B 点的转角为

$$\theta_B=\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times F_P l\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times F_P l\times 1=0$$

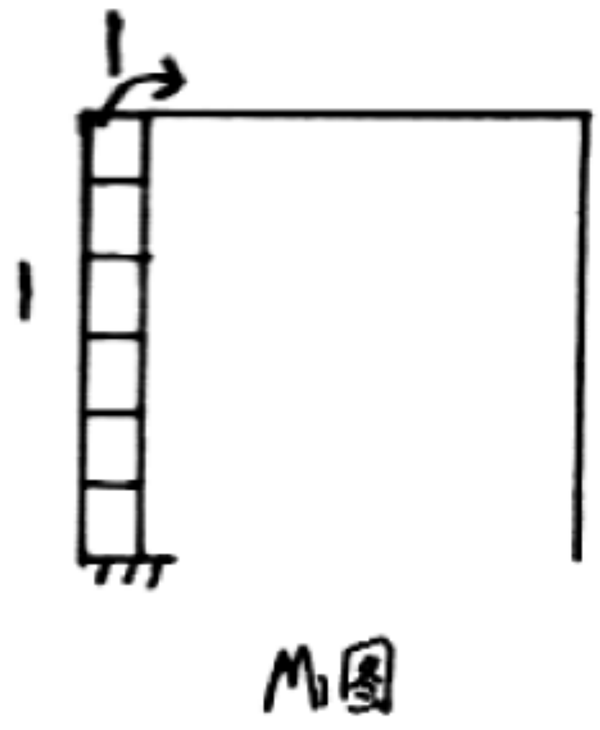


图 8-3-3

3．图 8-3-4 所示结构用位移法求解时，r_{11}=_____，设 $A=I/l^2$（其它杆件不计轴向变形）。[西南交通大学 2007 研]

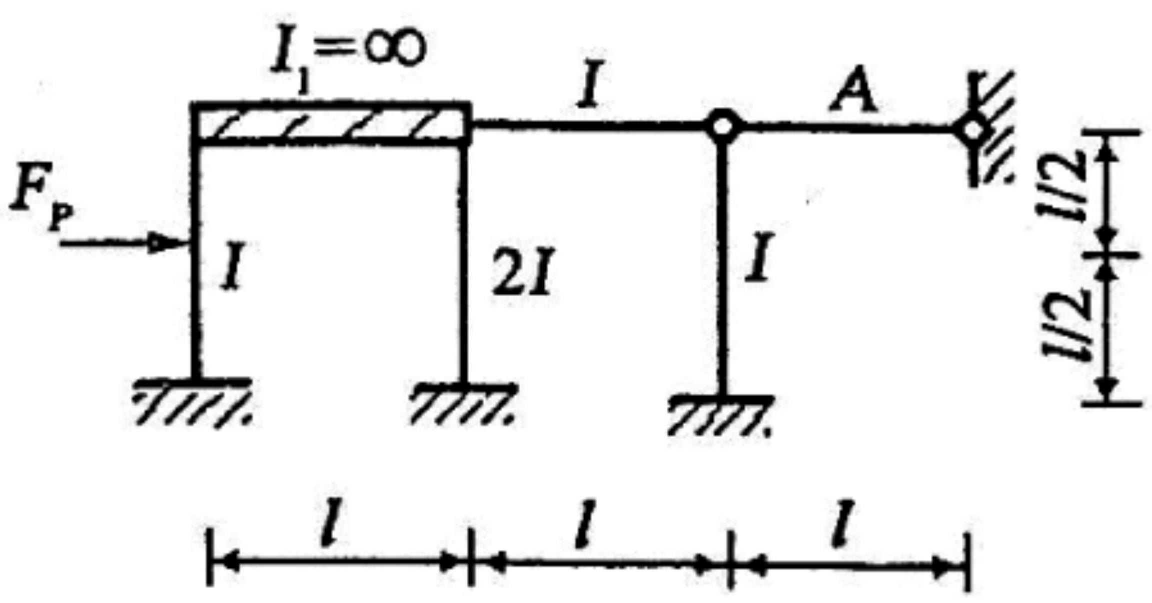


图 8-3-4

【答案】$\dfrac{EA}{l}+\dfrac{12EI}{l^3}+\dfrac{12(2EI)}{l^3}+\dfrac{3EI}{l^2}=\dfrac{40EI}{l^3}$

【解析】r_{11} 是发生向右单位水平位移时，结构产生的反力，如图 8-3-5。则

$r_{11}=\dfrac{EA}{l}+\dfrac{12EI}{l^3}+\dfrac{12(2EI)}{l^3}+\dfrac{3EI}{l^2}=\dfrac{40EI}{l^3}$。

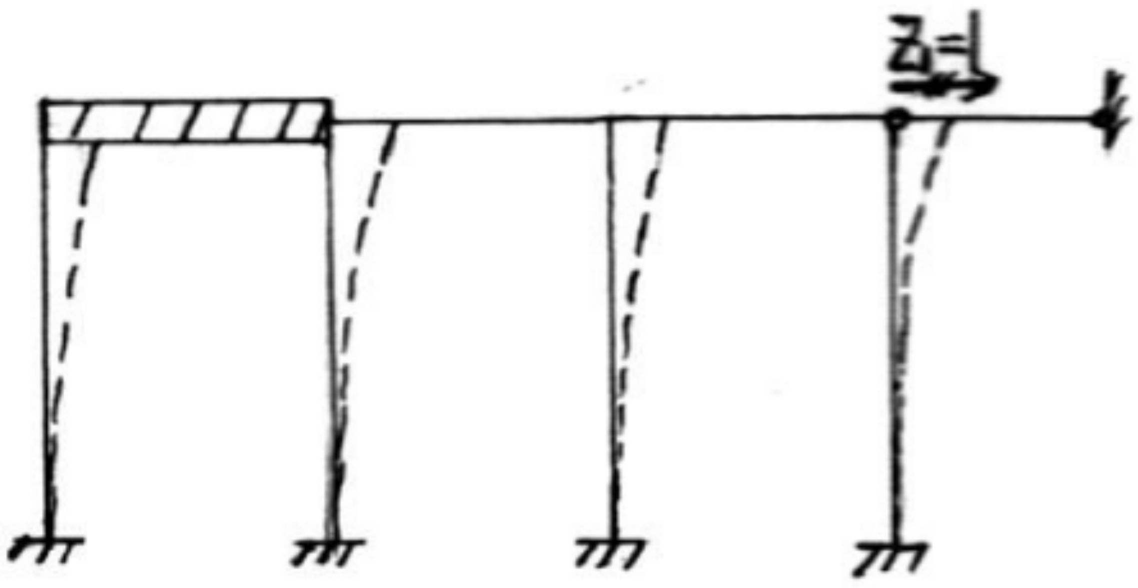


图 8-3-5

4．图 8-3-6 所示结构 B 支座反力为_____，方向_____，E 支座反力为_____（以向右为正）。[国防科技大学 2006 研]

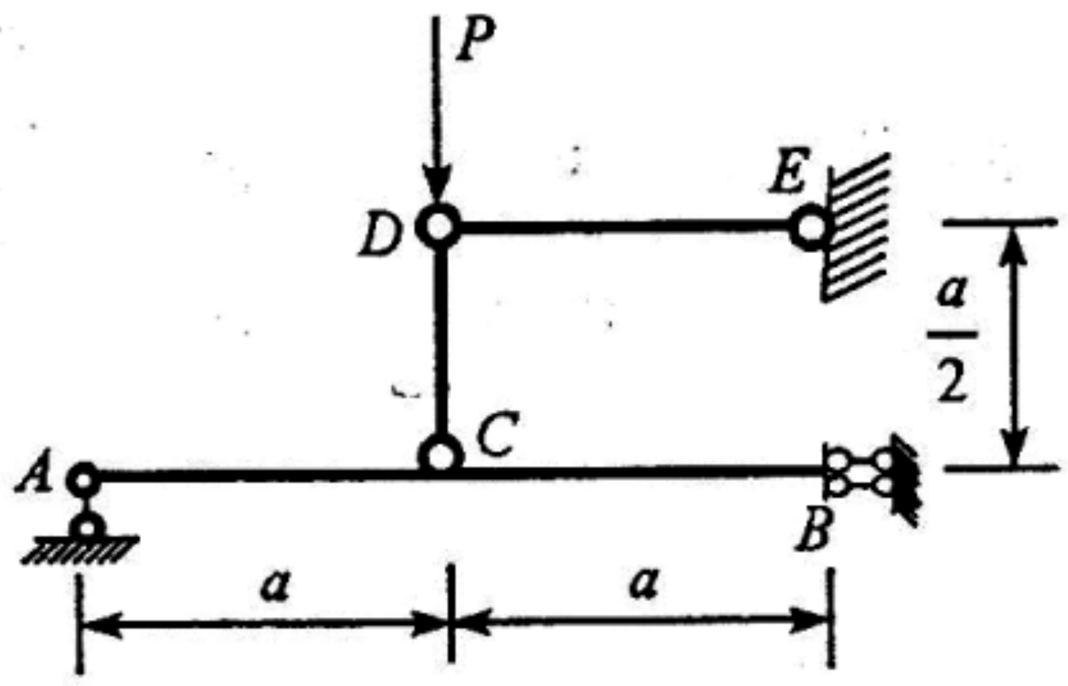


图 8-3-6

【答案】Pa；逆时针；0

【解析】垂直于 DC 杆将结构分为上下两个部分，其中 DC 杆为二力杆轴力大小为 P；研究上半部分，由平衡条件可知 E 支座反力为 0；研究下半部分，由水平方向力的平衡可知 B 处的水平支座反力为零；向 B 点取矩，算得 B 处的弯矩为 Pa，方向为逆时针。

二、选择题

1．图 8-3-7 示结构用位移法求解时，最少的未知数个数为（　　）。[哈尔滨工业大学 2008 研]

A．1

B．2

C．3

D．4

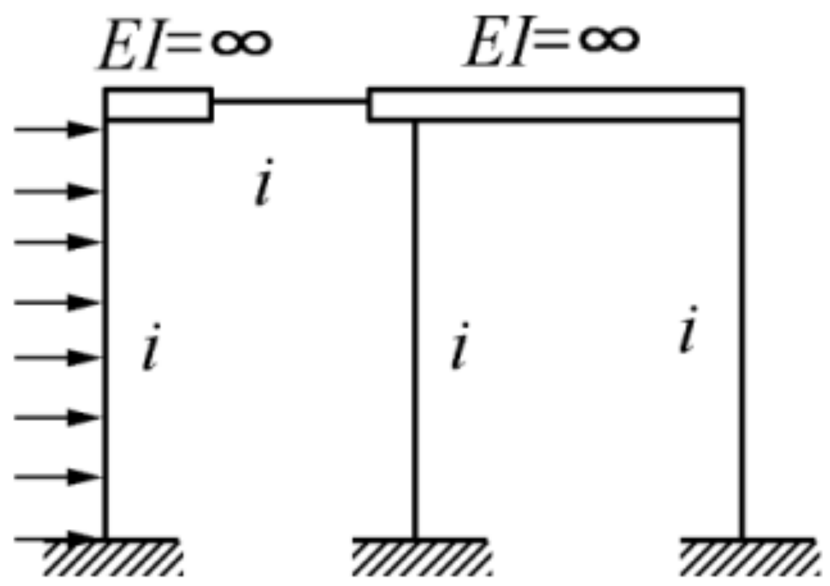


图 8-3-7

【答案】B

【解析】位移法的基本未知量为结点独立位移的数目，该结构显然在各个结点处没有角位移，因为水平横梁是两端无穷刚杆；有两个独立的结点线位移：水平线位移和左边第一个无穷杆与普通杆结点处的竖向线位移。

2．从位移法的计算原理看，该方法（　　）。[浙江大学 2006 研]

A．只能用于超静定结构　　B．只能用于静定结构

C．只能用于超静定结构中的刚架和连续梁　　D．适用于各类结构

【答案】D

【解析】位移法是指确定原结构基本未知量，加入附加联系而得基本结构，令各附加联系发生与结构相同的结点位移，根据在载荷等外因和各结点位移共同作用下，各附加联系上的反力偶或反力均等于零的条件，建立方程，首先求出未知位移，然后再求出结构反力和内力的方法。由于原理中存在假设条件，适用于各类结构。

3．图 8-3-8 所示结构用位移法求解可得（　　）。[西南交通大学 2007 研]

A. $\Delta = F_P h^2 / 24 i_1$　B. $\Delta = F_P / (12 i_1 / h)$　C. $\Delta = F_P / (12 i_1 / h^2)$　D. $\Delta = F_P / (24 i_1 / h)$

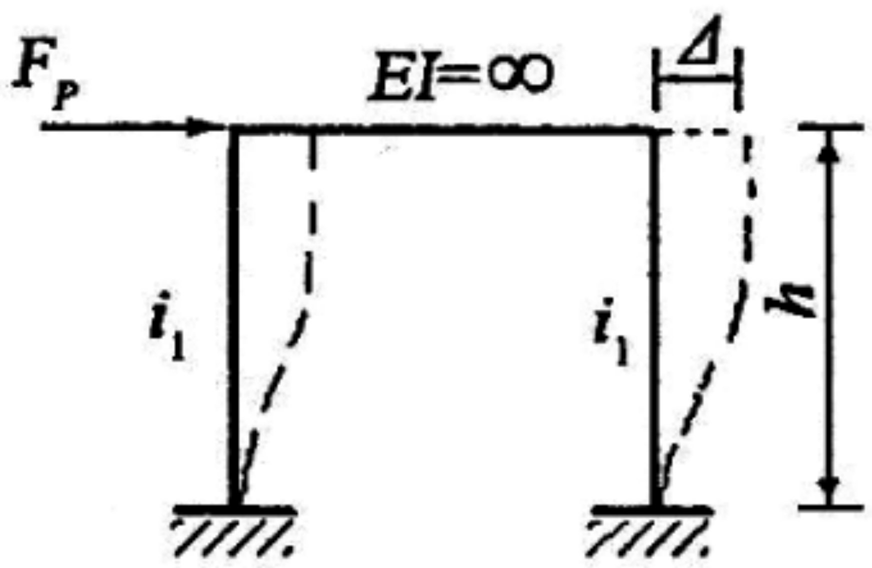


图 8-3-8

【答案】A

【解析】由于水平杆的刚度为无穷大，一根竖向杆的刚度为 $12i_1/h$，两根竖向杆的刚度为 $24i_1/h$，故水平位移为 $\Delta=F_Ph^2/24i_1$。

4．图 8-3-9 所示结构，用位移法求解时，基本未知量为（　　）。[国防科技大学 2006 研]

A 一个线位移　　B. 二个线位移和四个角位移

C. 四个角位移　　D. 两个线位移

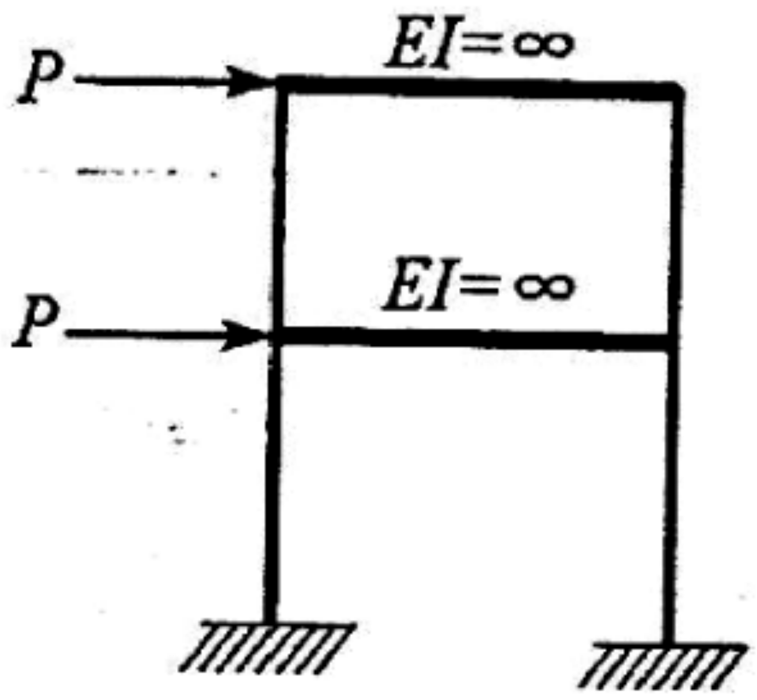


图 8-3-9

【答案】D

【解析】位移法的基本未知量为结点独立位移的数目。该结构水平杆的刚度无穷大，故无结点角位移；在两根水平杆方向上有两个独立的结点线位移。

5．图 8-3-10 所示结构各杆 EI 为常数，位移法中其结点位移基本未知量个数为（　　）。[宁波大学 2009 研]

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

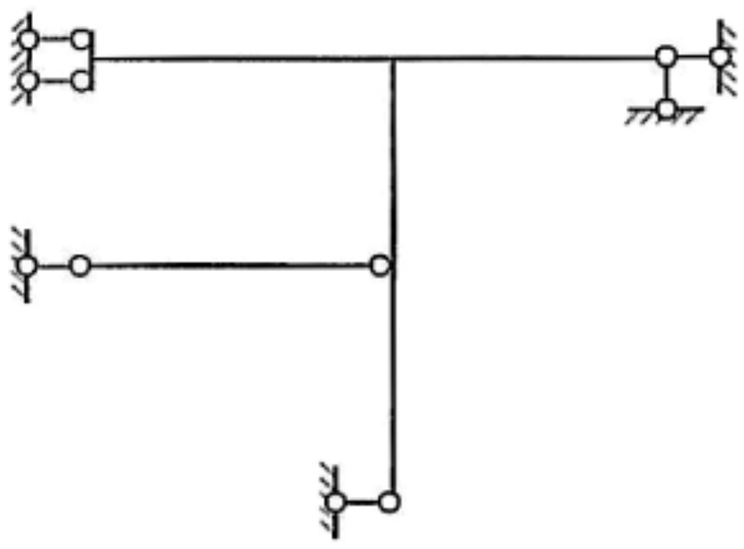


图 8-3-10

【答案】A

【解析】位移法的基本未知量为结点独立位移的数目。在中间的刚结点处有一个独立的结点角位移和一个独立的竖向的结点线位移，在组合结点处有一个独立的结点角位移；故基本未知量的数目为 3 个。

三、判断题

1．位移法典型方程中的主、副系数与作用于结构上的各种因素无关（　　）。[湖南大学 2006 研]

【答案】对

【解析】位移法典型方程中的主、副系数只与选取的基本结构有关，与作用于结构上的其它因素无关。

2．位移法既可以用于求解超静定结构，也可用于求解静定结构（　　）。[中南大学 2005 研]

【答案】对

【解析】位移法适用于求解各种结构，当然包括静定结构和超静定结构。

3．图 8-3-11（a）结构 A 端产生单位转角时，其弯矩图如图 8－3－11（b）所示（　　）。[天津大学 2005 研]

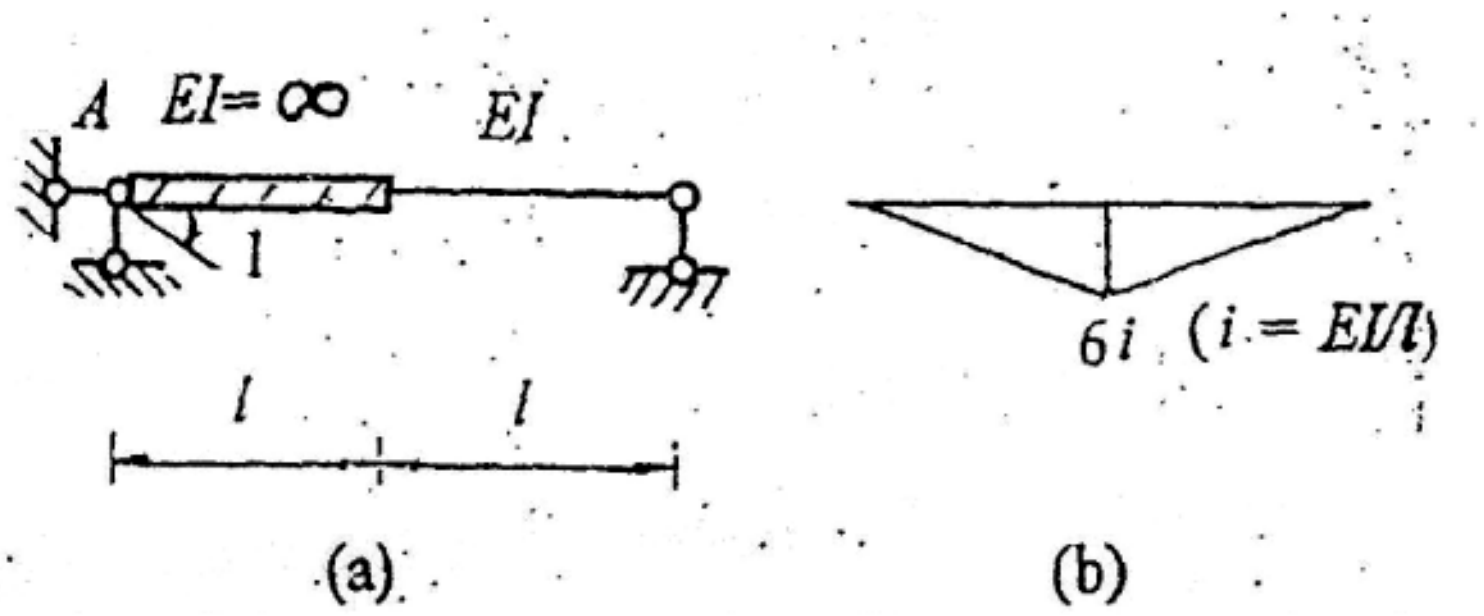


图 8-3-11

【答案】对

【解析】在 EI=∞和 EI 的交点处，有一个单位的顺时针转角和一个竖向单位位移如图 8-3-12 所示，故弯矩图如图 8-3-11（b）所示。

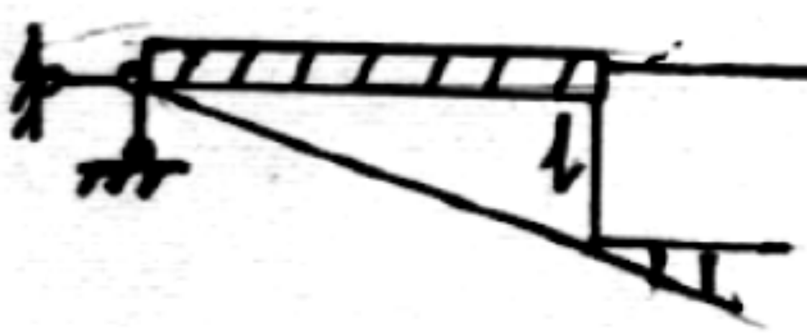


图 8-3-12

四、计算题

1．试用位移法求解图 8-3-13 示刚架，并且绘制弯矩图。设各杆的 EI 为常数。[同济大学 2006 研]

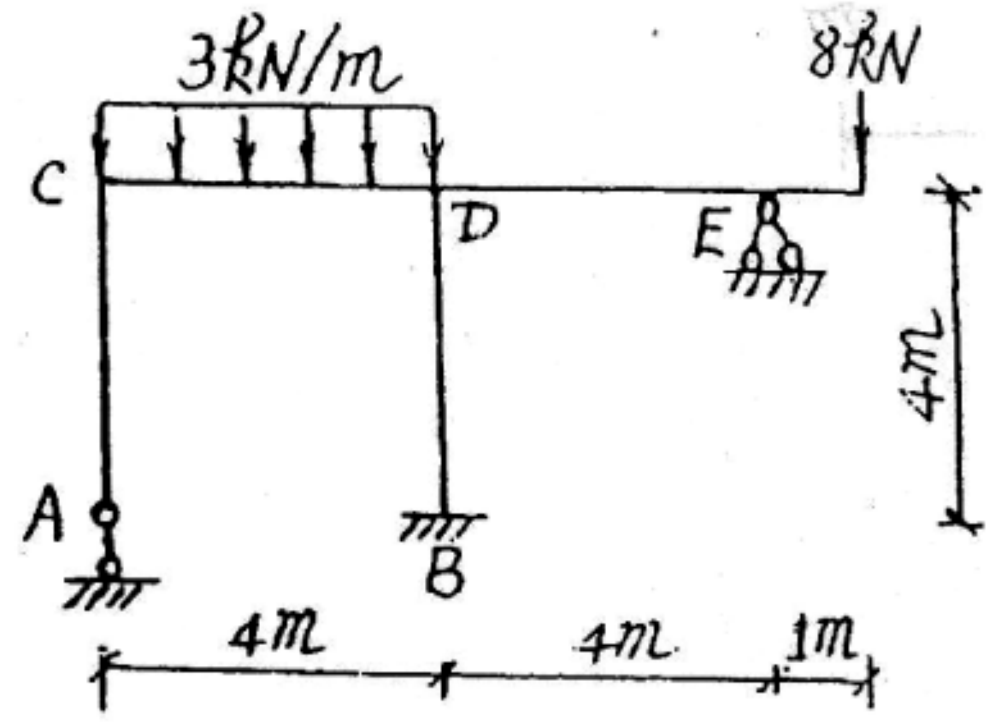


图 8-3-13

解：（1）在图示荷载作用下，系统有一个位移未知量，即节点 D 的转角，则此时的基本体系如下图 8-3-14 所示。

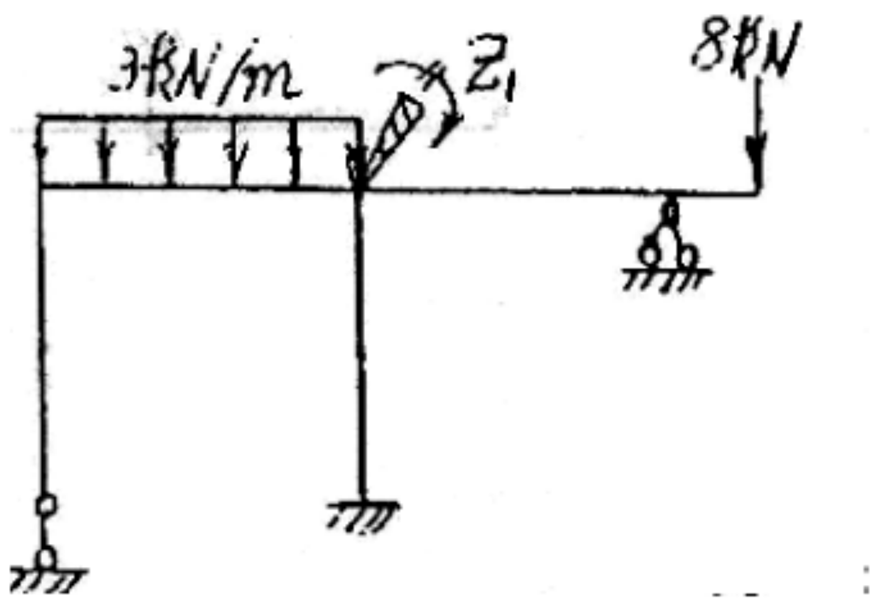


图 8-3-14

位移法基本方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

（2）去掉约束，则系统在位移分量的作用下的弯矩图如下图 8-3-15 所示。

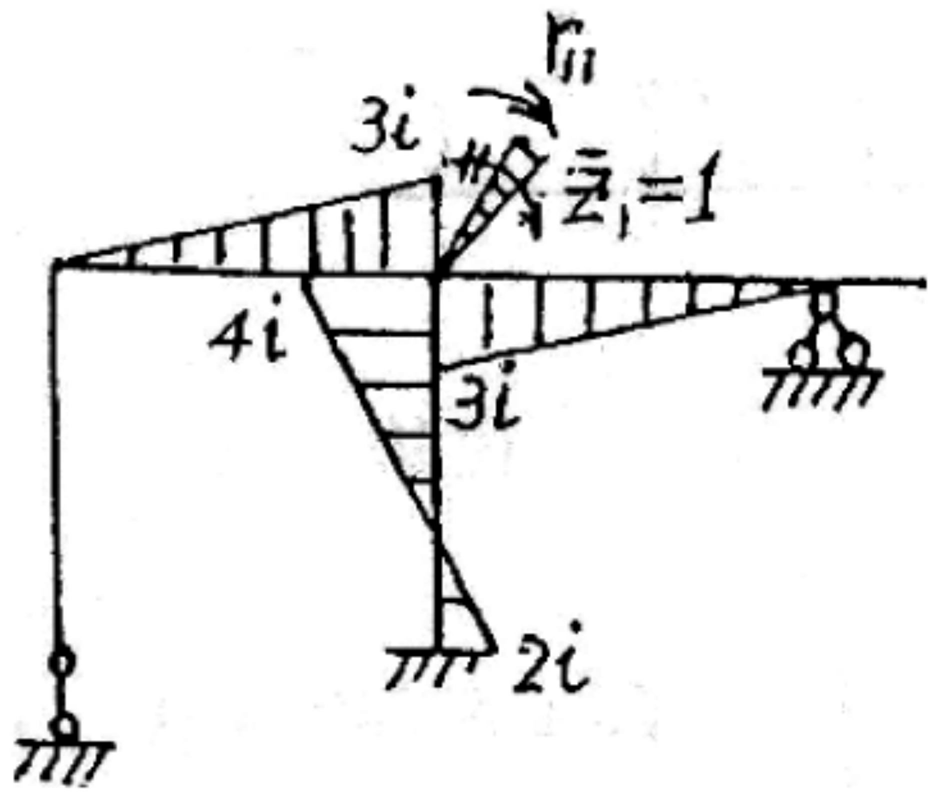


图 8-3-15

令 $EI/4=i$，则由图示弯矩图求得

$$r_{11} = 3i + 4i + 3i = 10i$$

（3）在节点处附加刚臂，此时的弯矩图如下图 8-3-16 所示。

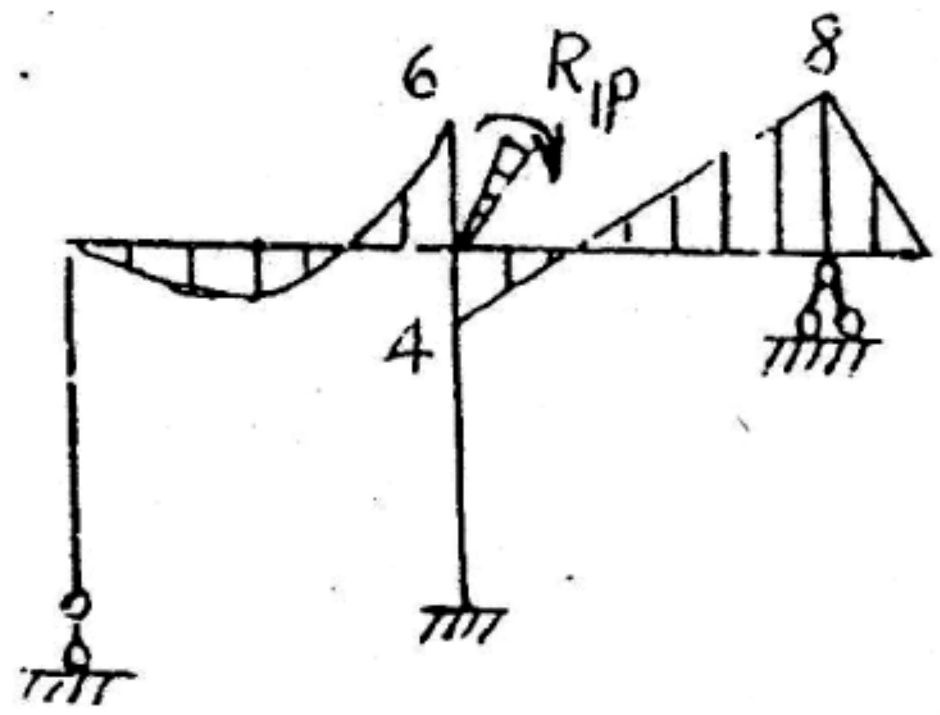


图 8-3-16

由图示弯矩图可得

$$R_{1P} = 6 + 4 = 10\text{kN}\cdot\text{m}$$

代入位移基本方程可得 $Z_1 = -\dfrac{1}{i}$。

（4）根据弯矩叠加原理绘制弯矩图，如下图 8-3-17 所示。

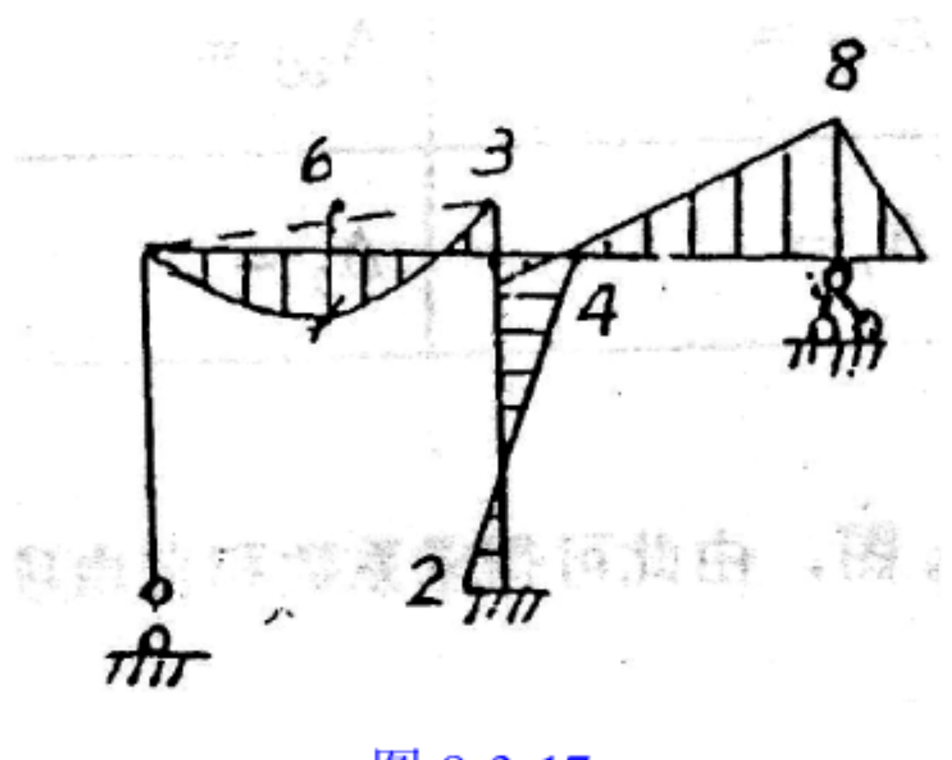


图 8-3-17

2．用位移法求解图 8-3-18 所示结构，并且作出 M 图。设各杆的 *EI* 为常数。[同济大学 2006 研]

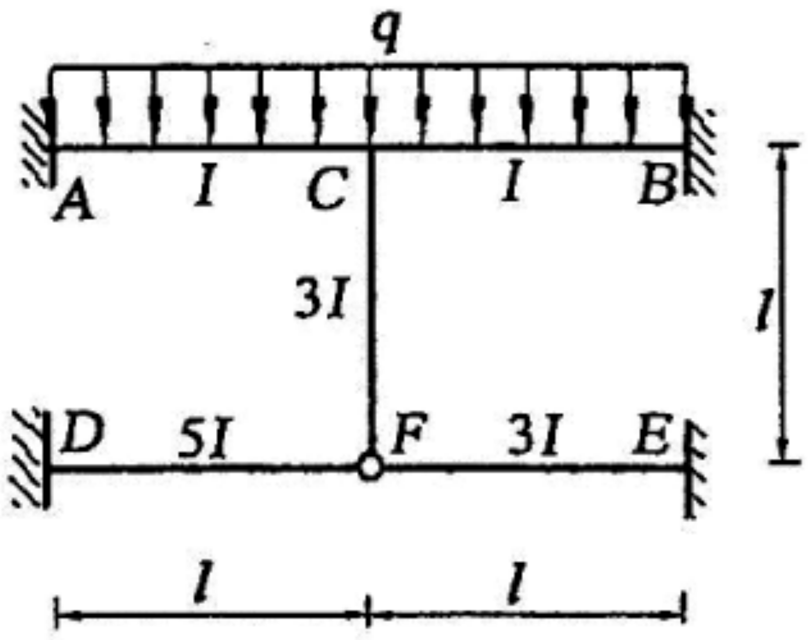


图 8-3-18

解：由题图所示结构可知，系统的位移未知量只有一个，即为 *CF* 杆的竖向位移。基本体系如下图 8-3-19 所示：

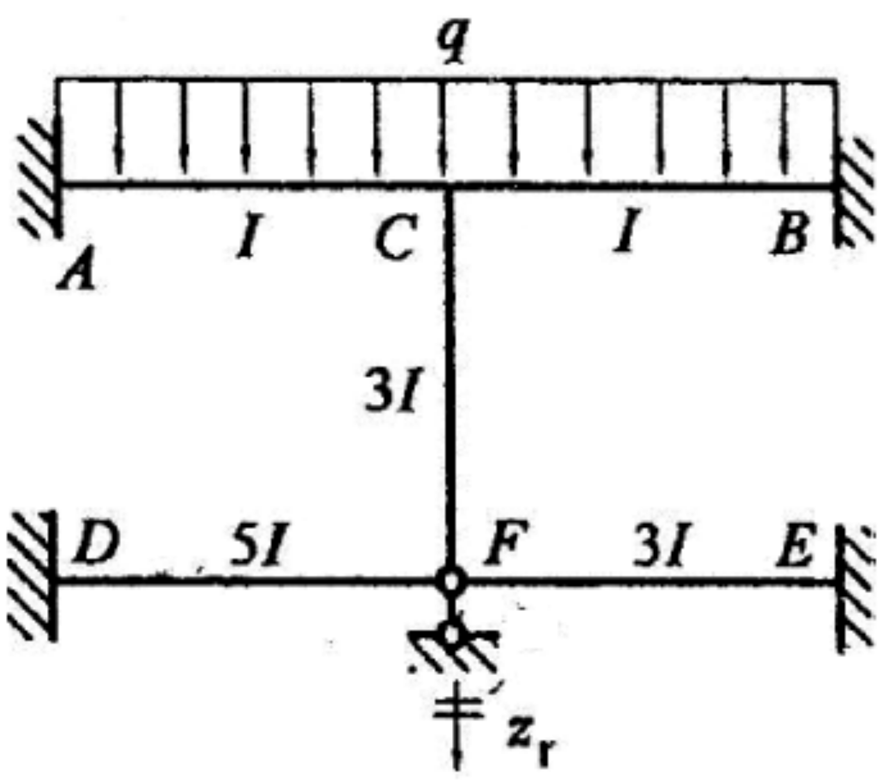


图 8-3-19

可求得系统的位移未知量为

$$r_{11}=48EI/l^3,\quad R_{1P}=-ql$$

代入位移法基本方程，解得

$$Z_1=ql^4/48EI$$

绘制弯矩图如下图 8-3-20 所示。

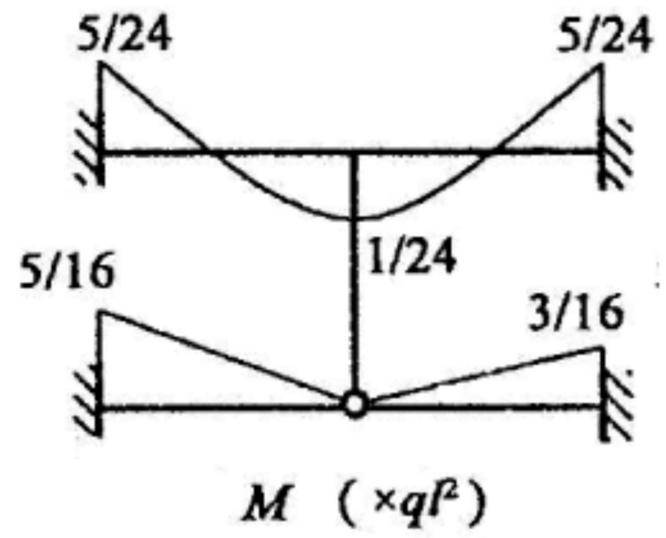


图 8-3-20

3．用位移法作图 8-3-21 示结构的弯矩图，写出分析过程。[东南大学 2005 研]

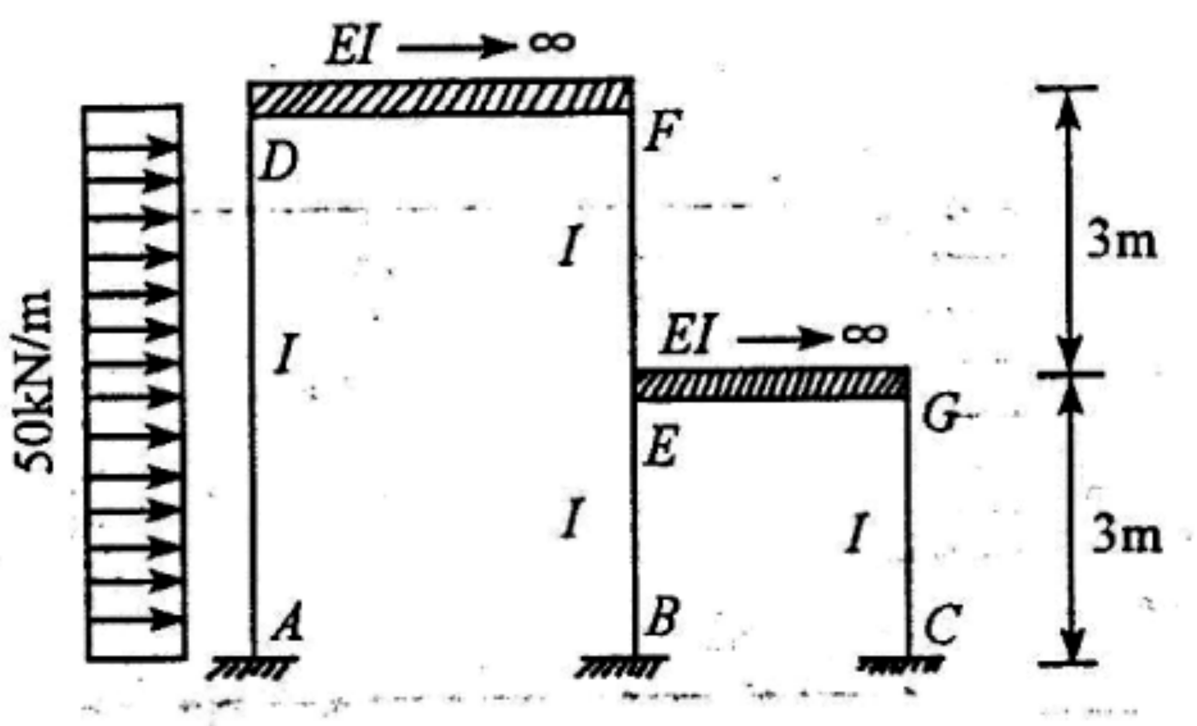


图 8-3-21

解：由图示结构可知，有两个位移位置分量，取基本机构如下图 8-3-22 所示。

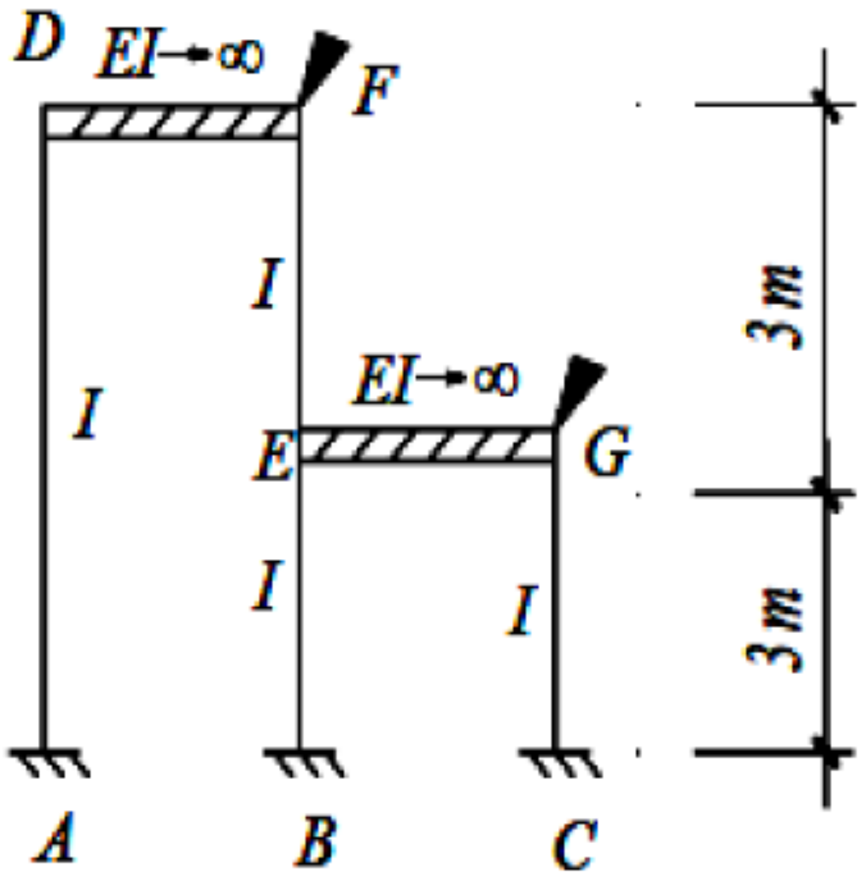


图 8-3-22

采用刚度法。.在 FG 处，同时加上两个两杆约束住位移，绘制此时结构在原荷载作用下的弯矩图如下图 8-3-23 所示。

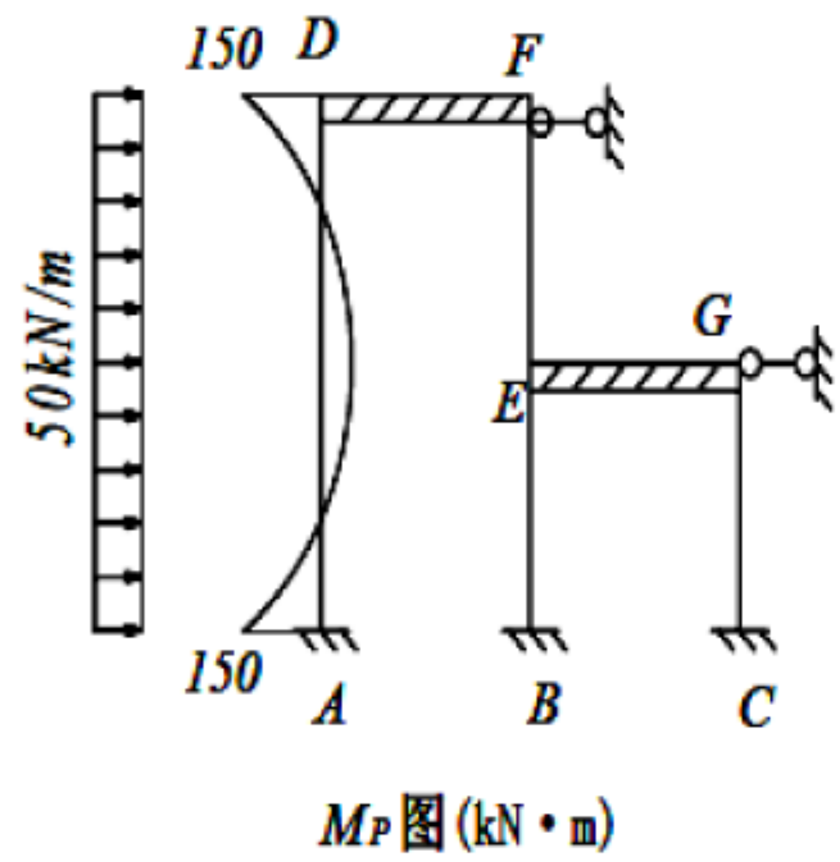


图 8-3-23

由上图可以求得

$$F_{2P}=0,F_{1P}=-150kN$$

分别将 F 和 G 用滑动支座固定，并分别绘制弯矩图如下图 8-3-24 所示。

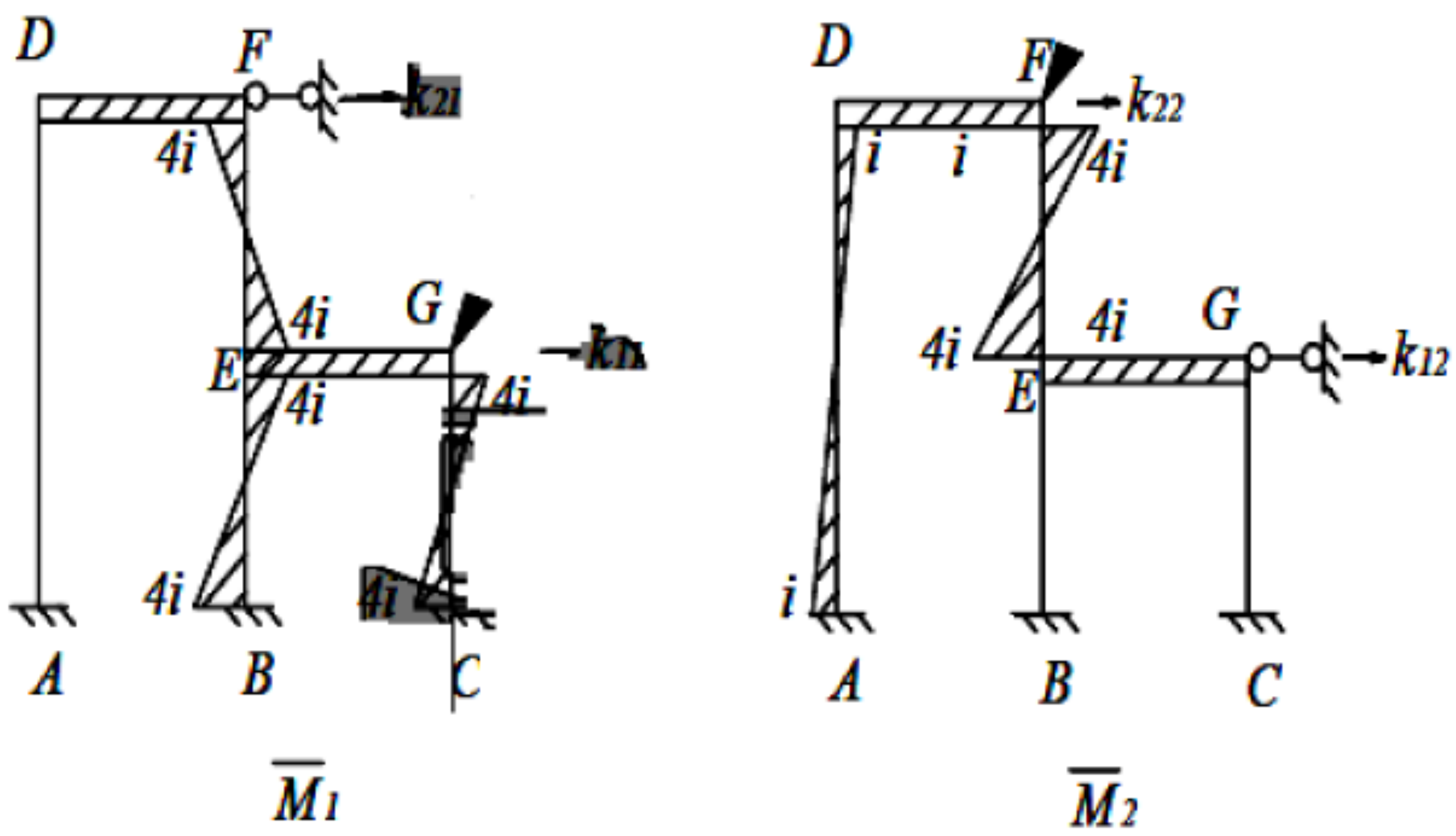
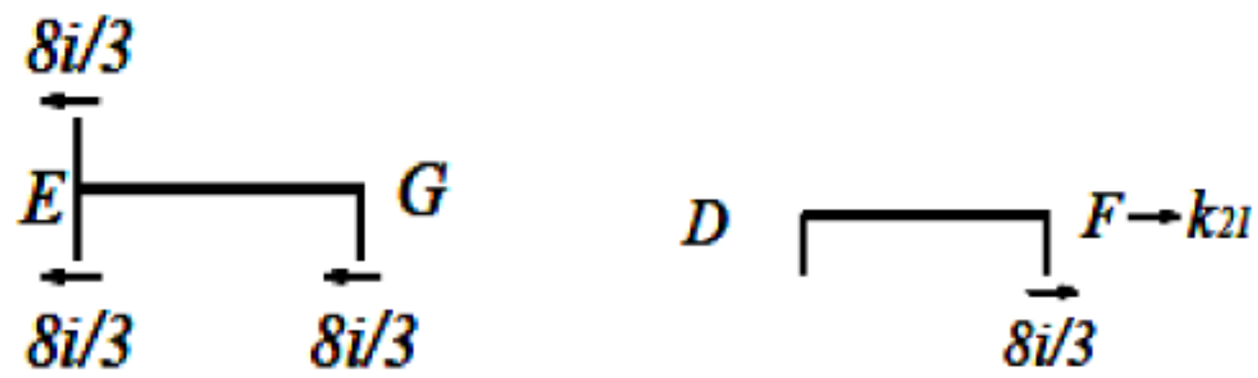


图 8-3-24

在上述两图的基础上分别取下面的隔离体



由上述两个隔离体可求得

$$k_{11}=8i, k_{12}=k_{21}=-\frac{8}{3}i$$

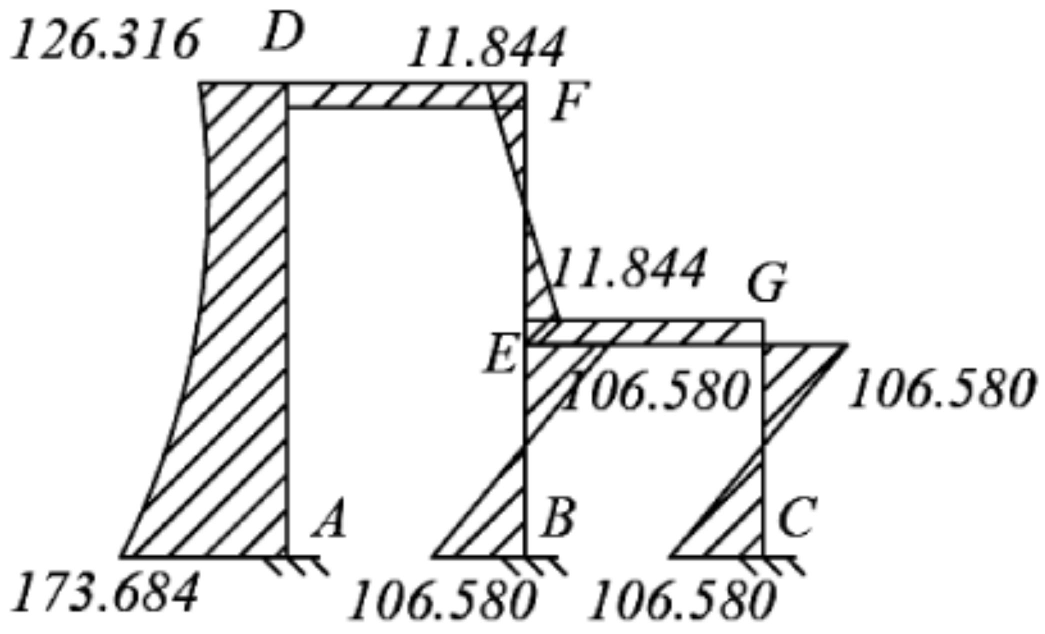
代入位移法的方程

$$\begin{cases}k_{11}\Delta_1+k_{12}\Delta_2+F_{1P}=0\\k_{21}\Delta_1+k_{22}\Delta_2+F_{2P}=0\end{cases}$$

解得

$$\Delta_1=26.645/i \quad \Delta_2=23.684/i$$

由弯矩叠加原理可画出最后的弯矩图，如下图 8-3-25 所示。



M 图(kN·m)

图 8-3-25

4．图 8-3-26 示结构中各杆的 EI 为常数，绘制结构的弯矩图，并求 B 点的转角。[武汉科技大学 2009 研]

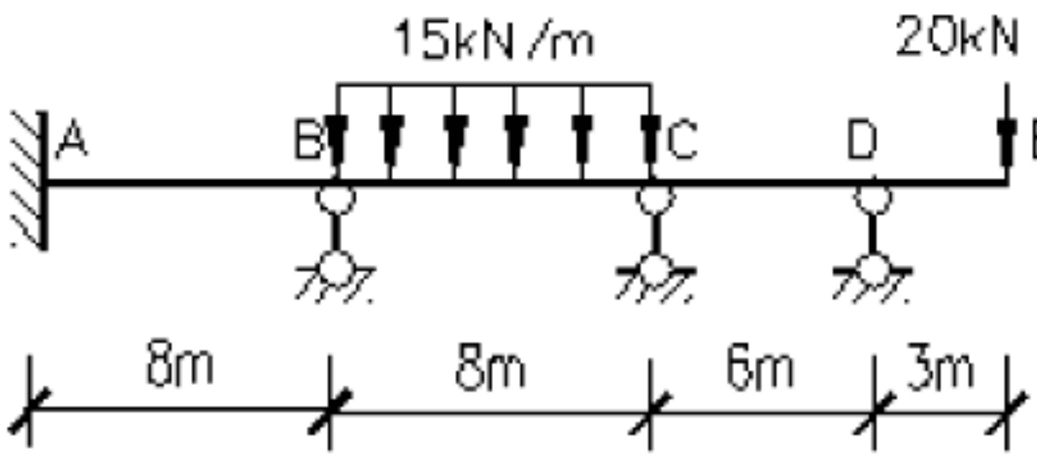


图 8-3-26

解：题图所示结构有两个未知位移量，采用位移法求解的基本方程为

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0$$

$$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0$$

基本体系如下图 8-3-27 所示。

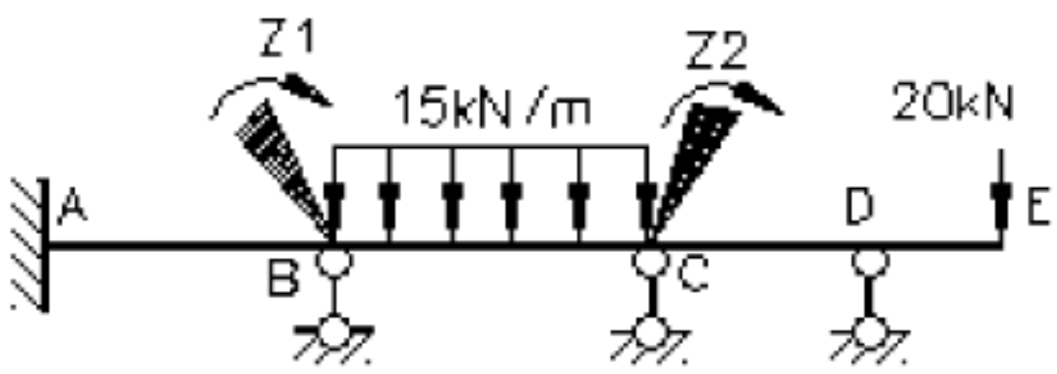


图 8－3－27

令 $Z_1=1$，此时产生的弯矩图如下图 8-3-28 所示。

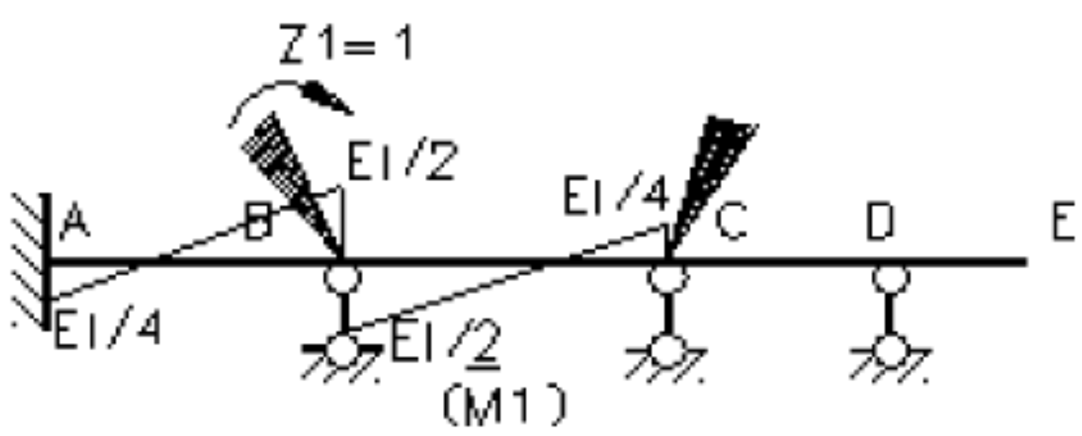


图 8-3-28

令 $Z_2=1$，此时的弯矩图如图 8-3-29 所示。

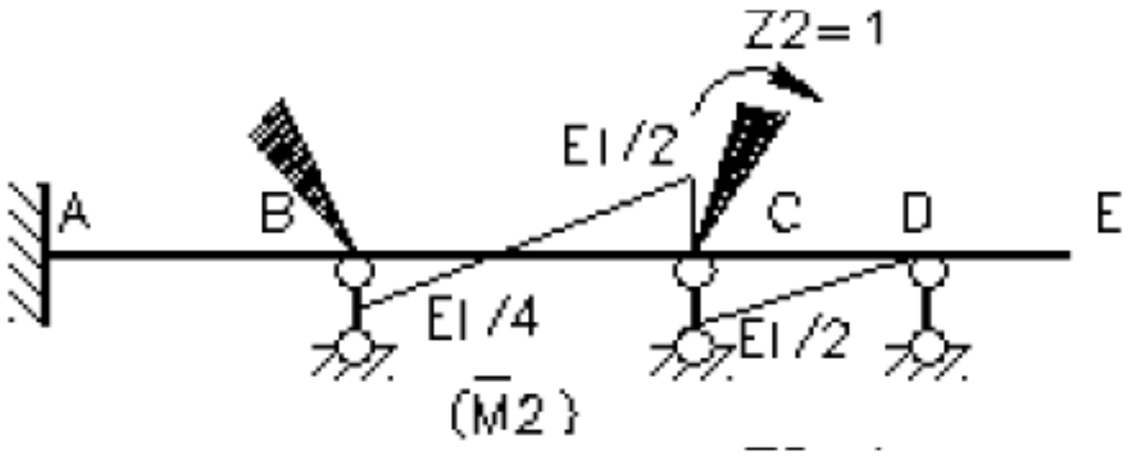


图 8-3-29

固定 Z_1 和 Z_2，系统在原荷载作用下的弯矩图如图 8-3-30。

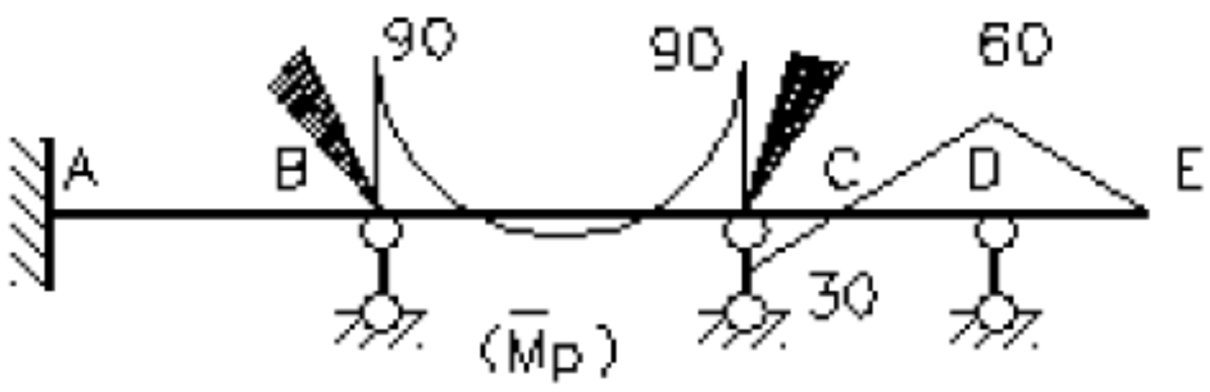


图 8-3-30

由图示弯矩图可求得

$$r_{11}=EI\text{，}\quad r_{12}=r_{21}=\frac{EI}{4}\text{，}\quad r_{22}=EI$$

$$R_{1P}=-90\text{，}\quad R_{2P}=90+30=120$$

代入基本方程，求得

$$\begin{cases}Z_1=128/EI\\Z_2=-152/EI\end{cases}$$

由弯矩叠加原理可得最终弯矩图如图 8-3-31。

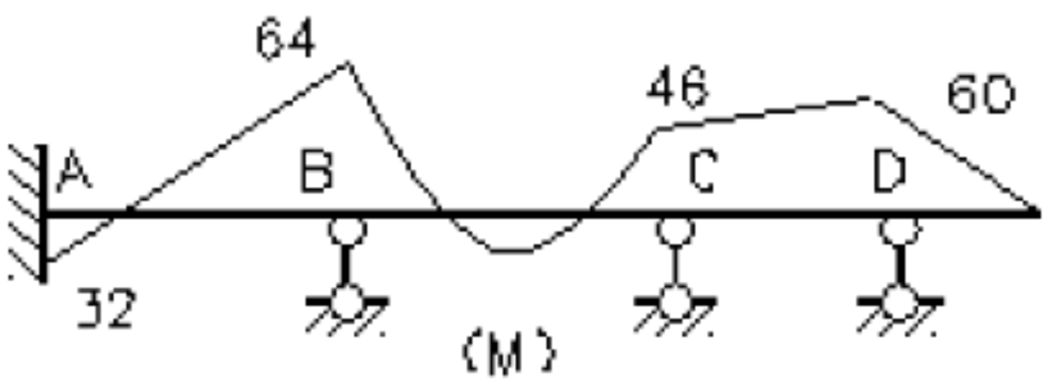


图 8-3-31

进而求的 B 点的转角位为

$$Z_1=128/EI$$

第 9 章　渐近法

9.1　复习笔记

【知识框架】

- 渐进法
  - 渐进法的概述
    - 力矩分配法的相关定义
      - 劲度系数
      - 传递系数
    - 力矩分配法的基本原理及举例分析
    - 应用力矩分配法计算无侧移刚架和连续梁
  - 无剪力分配法
    - 适用的对象
    - 无剪力分配法的举例分析
    - 无剪力分配法的定义
    - 无剪力分配法解多层无侧移刚架
    - 无剪力分配法应用于有侧移刚架
  - 剪力分配法
    - 适用对象
    - 剪力分配法的举例分析
    - 剪力分配法的定义
    - 剪力分配法的其他情况
    - 剪力分配法的实用举例

【重点难点归纳】

一、力矩分配法

1．定义

（1）劲度系数

当杆件 AB(图 9-1-1)的 A 端(又称近端)转动单位角时，A 端的弯矩 M_{AB} 称为该杆端的劲度系数，用 S_{AB} 表示。它标志着该杆端抵抗转动能力的大小，故又称为转动刚度，其值不仅与杆件的线刚度 $i=\frac{EI}{l}$ 有关，而且与杆件另一端（又称远端）的支承情况有关。

（2）传递系数

当 A 端转动时，B 端也产生一定的弯矩，将 B 端弯矩与 A 端弯矩之比称为由 A 端向 B 端的传递系数，用 C_{AB} 来表示，即 $C_{AB}=\frac{M_{BA}}{M_{AB}}$ 或 $M_{BA}=C_{AB}M_{AB}$。

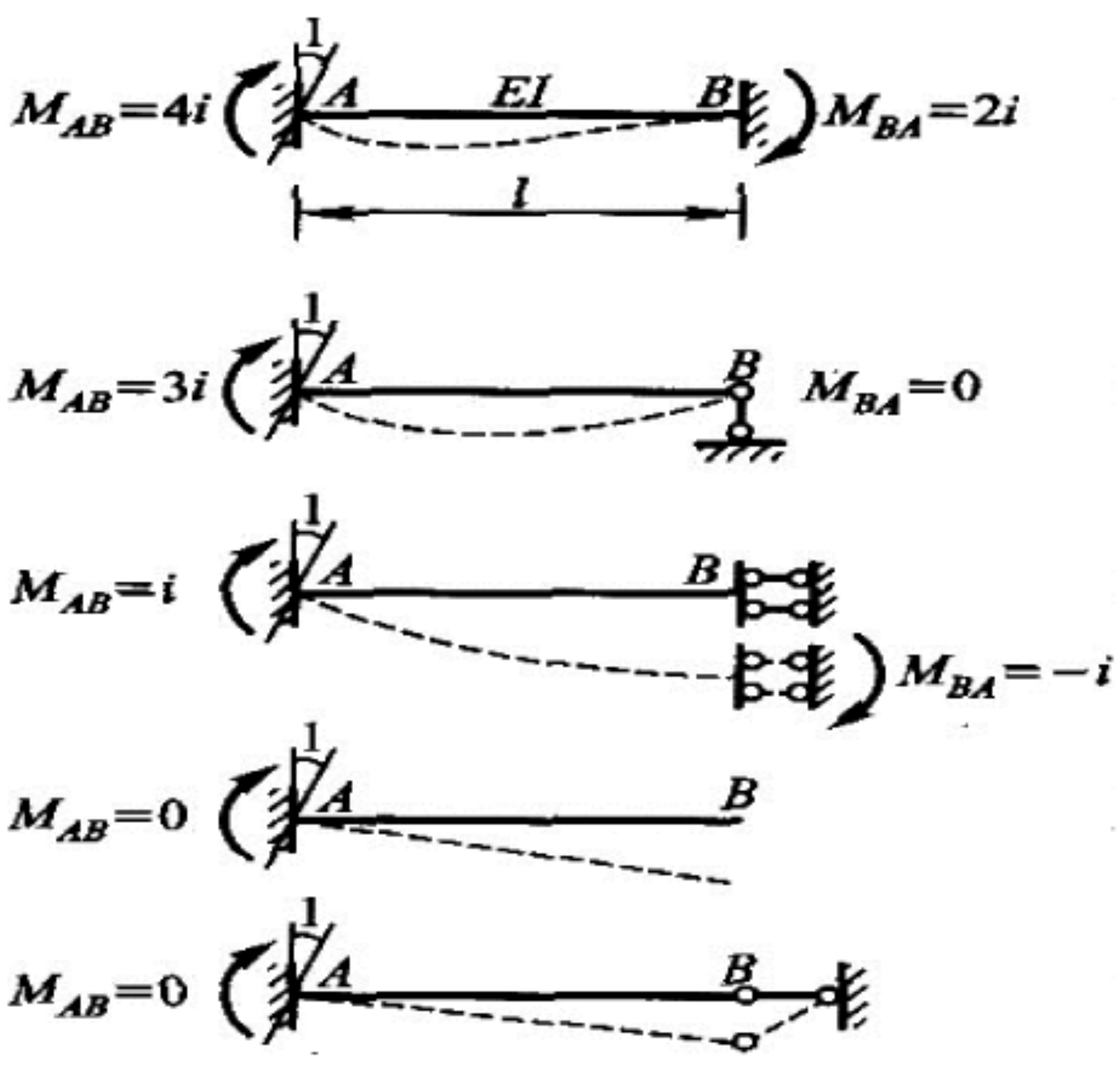


图 9-1-1

等截面直杆的劲度系数和传递系数见表 9-1-1。当 B 端为自由或为一根轴向支承链杆时， A 端转动时杆件将毫无抵抗，其劲度系数为零。

表 9-1-1　等截面直杆的劲度系数和传递系数

远端支承情况	劲度系数 S	传递系数 C
固定	4i	0.5
铰支	3i	0
滑动	i	-1
自由或轴向支杆	0	

2．应用（单个结点转角）

力矩分配法其结点角位移、杆端力的符号规定均与位移法相同，非常适用于连续梁和无结点线位移刚架的计算。

（1）举例

①原结构

如图 9-1-2（a）所示刚架。

②典型方程

只有一个基本未知量即结点转角 Z_1，其典型方程为： $r_{11}Z_1+R_{1P}=0$ 。

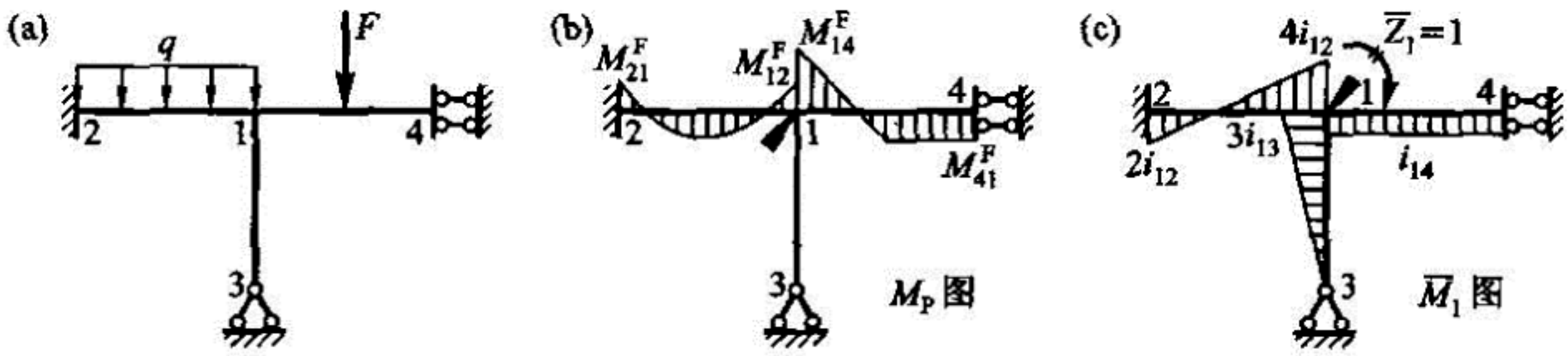


图 9-1-2

③绘出 M_p、M_1 图

如图 9-1-2（b）、（c）所示。

④求自由项

a．求 R_{1P}

$$R_{1P}=M_{12}^F+M_{13}^F+M_{14}^F=\sum M_{1j}^F \tag{9-1}$$

式中，R_{1P} 为结点固定时附加刚臂上的反力偶，可称为刚臂反力偶，它等于汇交于结点 1 的各杆端固端弯矩的代数和 $\sum M_{1j}^F$，即各固端弯矩所不能平衡的差额，故又称结点上的不平衡力矩。

b．求 r_{11}

$$r_{11}=4i_{12}+3i_{13}+i_{14}=S_{12}+S_{13}+S_{14}=\sum S_{1j} \tag{9-2}$$

式中，$\sum S_{1j}$ 为汇交于结点 1 的各杆端劲度系数的总和。

⑤解典型方程

$$Z_1=-\frac{R_{1P}}{r_{11}}=\frac{-\sum M_{1j}^F}{\sum S_{1j}}$$

⑥最终弯矩图

按叠加法计算各杆端的最后弯矩

$$M = M_P + \bar{M}_1 Z_1$$

a．近端弯矩

各杆汇交于结点 1 的一端为近端，另一端为远端。

各近端弯矩为

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= M_{12}^F + \frac{S_{12}}{\sum S_{1j}}(-\sum M_{1j}^F) = M_{12}^F + \mu_{12}(-\sum M_{1j}^F) \\ M_{13} &= M_{13}^F + \frac{S_{13}}{\sum S_{1j}}(-\sum M_{1j}^F) = M_{13}^F + \mu_{13}(-\sum M_{1j}^F) \\ M_{14} &= M_{14}^F + \frac{S_{14}}{\sum S_{1j}}(-\sum M_{1j}^F) = M_{14}^F + \mu_{14}(-\sum M_{1j}^F) \end{aligned}\right\}$$

第一，固端弯矩

以上各式右边第一项为荷载产生的弯矩，即固端弯矩。

第二，分配弯矩

第二项为结点转动 Z_1 角所产生的弯矩，相当于把不平衡力矩反号后按劲度系数大小的比例分给各近端，因此称为分配弯矩，μ_{12}、μ_{13}、μ_{14} 等称为分配系数，其计算公式为

$$\mu_{1j} = \frac{S_{1j}}{\sum S_{1j}}$$

同一结点各杆端的分配系数之和应等于 1，即 $\sum \mu_{1j} = 1$。

b．各远端弯矩为

$$\left.\begin{aligned} M_{21} &= M_{21}^F + \frac{C_{12}S_{12}}{\sum S_{1j}}(-\sum M_{1j}^F) = M_{21}^F + C_{12}[\mu_{12}(-\sum M_{1j}^F)] \\ M_{31} &= M_{31}^F + C_{13}[\mu_{13}(-\sum M_{1j}^F)] \\ M_{41} &= M_{41}^F + C_{14}[\mu_{14}(-\sum M_{1j}^F)] \end{aligned}\right\}$$

第一，固端弯矩

各式右边第一项仍是固端弯矩。

第二，传递弯矩

第二项是由结点转动 Z_1 角所产生的弯矩，它好比是将各近端的分配弯矩以传递系数的比例传到各远端一样，故称为传递弯矩。

（2）计算步骤

①固定结点：加入刚臂，各杆端有固端弯矩，而结点上有不平衡力矩，它暂时由刚臂承担。

②放松结点：取消刚臂，让结点转动。

③各近端弯矩等于固端弯矩加分配弯矩，各远端弯矩等于固端弯矩加传递弯矩。

（3）优点

得出上述规律之后，便可不必绘 M_P、$\bar{M}_1$ 图，也不必列出和求解典型方程，而直接按以上结论计算各杆端弯矩。

3．用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架（多个结点转角）

对于具有多个结点转角但无结点线位移（简称无侧移）的结构，其作法是

（1）将所有结点固定，计算各杆固端弯矩；

（2）将各结点轮流地放松，即每次只放松一个结点，其他结点仍暂时固定，把各结点的不平衡力矩轮流地进行分配、传递，直到传递弯矩小到可略去时为止，以逐次渐近方法来计算杆端弯矩。

二、无剪力分配法

1．适用对象

符合某些特定条件的有侧移刚架。

2．举例

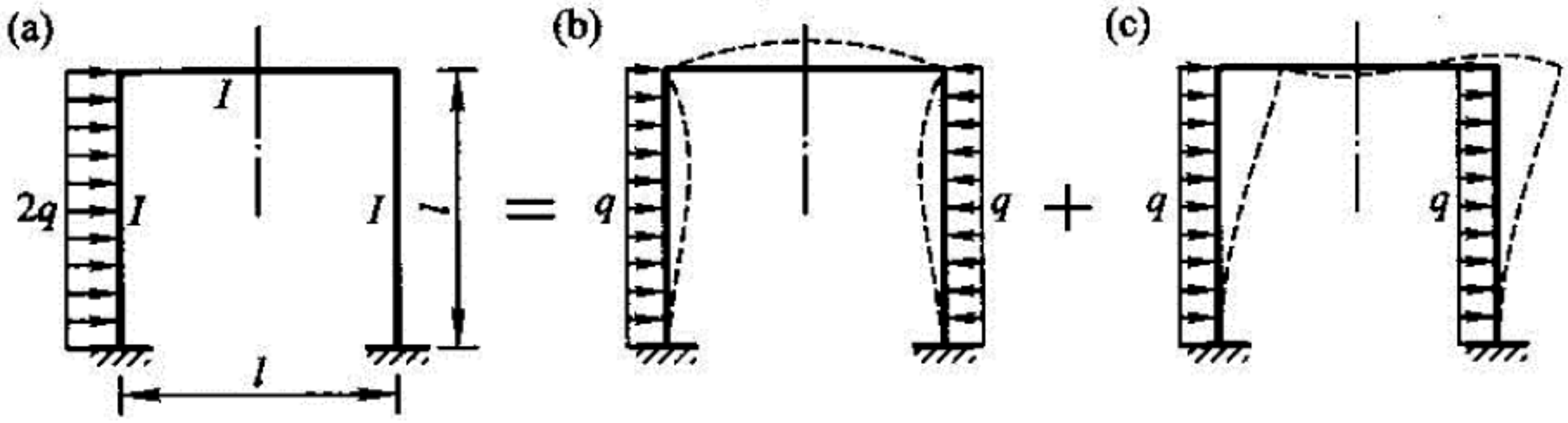


图 9-1-8

对于图 9-1-8（a）所示单跨对称刚架。

（1）分析

可将其荷载分为正、反对称两组。

①正对称时（图 9-1-8（b））结点只有转角，没有侧移，故可用前述一般力矩分配法计算；

②反对称时（图 9-1-8（c））则结点除转角外，还有侧移，此时可采用下面的无剪力分配法来计算。

（2）无剪力分配法

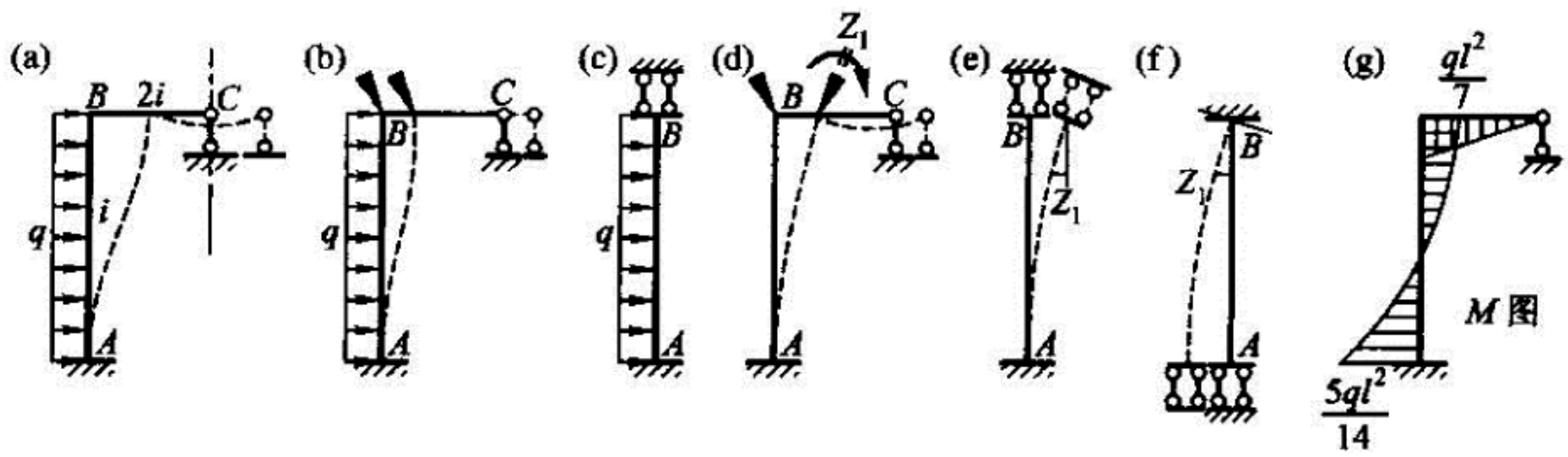


图 9-1-9

①基本结构

取反对称时的半刚架如图 9-1-9（a）所示，C 处为一竖向链杆支座。

②受力和变形特点

a．横梁 BC 虽有水平位移但两端并无相对线位移，称为无侧移杆件；

b．竖柱 AB 两端虽有相对侧移，但由于支座 C 处无水平反力，故 AB 柱的剪力是静定的，称为剪力静定杆件。

③计算步骤

a．固定结点

只加刚臂阻止结点 B 的转动，而不加链杆阻止其线位移。

第一，如图 9-1-9（b）所示，柱 AB 的上端虽不能转动但仍可自由地水平滑行，故相当于下端固定上端滑动的梁（图 9-1-9（c））。

第二，对于横梁 BC 则因其水平移动并不影响本身内力，仍相当于一端固定另一端铰支的梁。查表可得柱的固端弯矩为

$$M_{AB}^{F}=-\frac{ql^2}{3},\quad M_{BA}^{F}=-\frac{ql^2}{6}$$

第三，结点 B 的不平衡力矩暂时由刚臂承受。注意此时柱 AB 的剪力仍然是静定的，其两端剪力为

$F_{SBA}=0$，$F_{SAB}=ql$，即全部水平荷载由柱的下端剪力所平衡。

b．放松结点

为了消除刚臂上的不平衡力矩，需放松结点，进行力矩的分配和传递。

第一，结点 B 不仅转动 Z_1 角，同时也发生水平位移，如图 9-1-9（d）所示。

第二，由于柱 AB 为下端固定上端滑动，当上端转动时柱的剪力为零，因而处于纯弯曲受力状态（图 9-1-9（e））。

第三，图 9-1-9（e）所示受力状态与上端固定下端滑动而上端转动同样角度时的受力和变形状态（图 9-1-9（f））完全相同。故可推知其劲度系数应为 i，而传递系数为-1。

第四，结点 B 的分配系数为

$$\mu_{BA}=\frac{i}{i+3\times 2i}=\frac{1}{7},\quad \mu_{BC}=\frac{3\times 2i}{i+3\times 2i}=\frac{6}{7}$$

c．其余计算如图 9-1-10 所示。弯矩 M 图如图 9-1-9（g）所示。

④总结

上述计算中，在固定结点时柱 AB 的剪力是静定的；在放松结点时柱 B 端得到的分配弯矩将乘以-1 的传递系数传到 A 端，因此弯矩沿 AB 杆全长均为常数而剪力为零。

3．定义

在力矩的分配和传递过程中，使柱中原有剪力保持不变而不增加新的剪力的力矩分配方法称为无剪力力矩分配法，简称无剪力分配法。

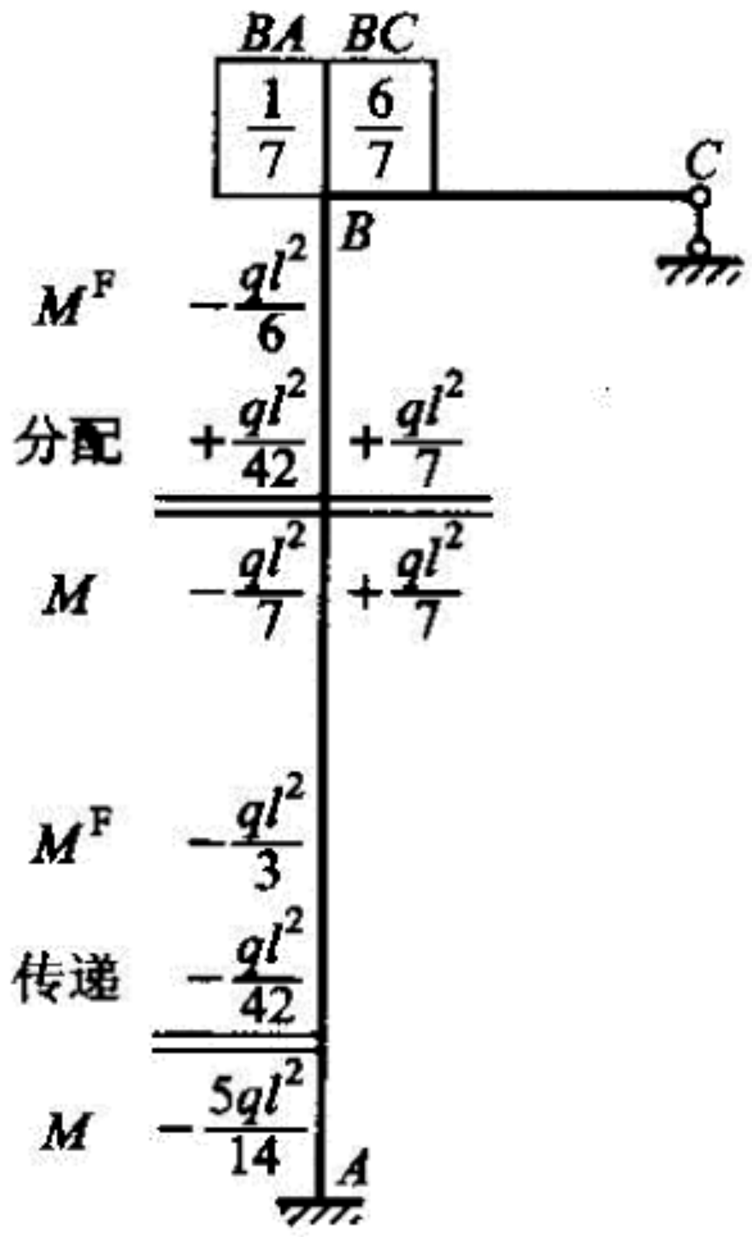


图 9-1-10

4．多层无侧移刚架

如图 9-1-11（a）所示刚架，各横梁均为无侧移杆，各竖柱则均为剪力静定杆。

（1）固定结点

固定结点时只加刚臂阻止各结点的转动，而并不阻止其线位移，如图 9-1-11（b）所示。

①各层柱子两端均无转角，但有侧移。因此不论刚架有多少层，每一层的柱子均可视为上端滑动下端固定的梁。如 BC 两端的相对侧移时，可将其下端看作是不动的，上端是滑动的。

②除了柱身承受本层荷载外，柱顶处还承受剪力，其值等于柱顶以上各层所有水平荷载的代数和。如 BC 上端的剪力值为 $F_{SCB}=2ql$（图 9-1-11（c））。

③查表算出各层竖柱的固端弯矩。

（2）放松结点

将各结点轮流地放松，进行力矩的分配、传递。

①如图 9-1-11（d）所示，放松某一结点 C，相当于将该结点上的不平衡力矩反号作为力偶荷载施加于该结

点上。

②结点 C 不仅转动某一角度 θ_c，同时 BC、CD 两柱还将产生相对侧移，但由平衡条件知两柱剪力均为零，处于纯弯曲受力状态（与图 9-1-9（f）相同）。

③根据受力状态知，计算时各柱的劲度系数应取各自的线刚度 i，而传递系数为-1（指等截面杆）。

④需注意的几个方面

a．此时只有汇交于结点 C 的各杆才产生变形而受力；

b．B 以下各层无任何位移故不受力；

c．D 以上各层则随着 D 点一起发生水平位移，但其各杆两端并无相对侧移，故仍不受力；

d．放松结点 C 时，力矩的分配、传递将只在 CB、CF、CD 三杆范围内进行。

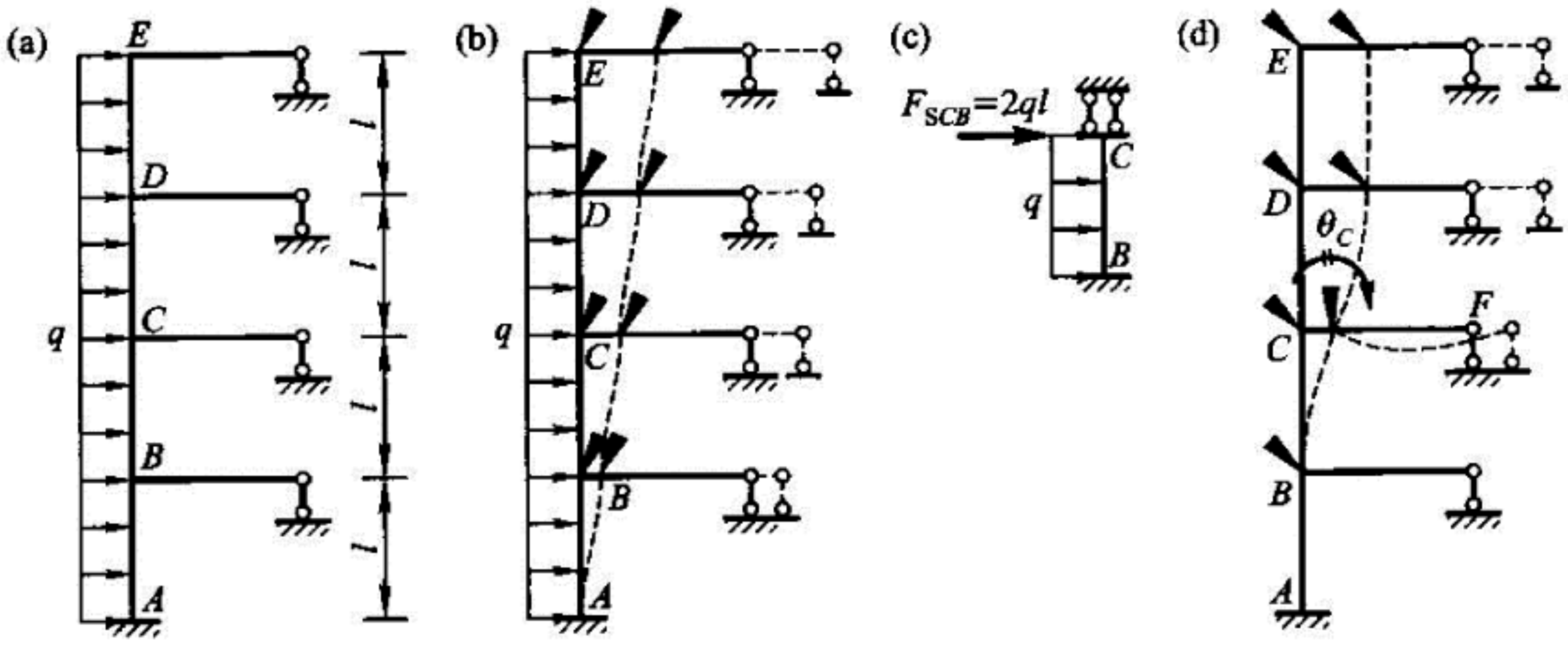


图 9-1-11

5．无剪力分配法应用于有侧移刚架

（1）无侧移刚架需满足的条件

刚架的一部分杆件是无侧移杆，其余杆件都是剪力静定杆。

（2）分析方法

由于采取了只控制结点转动而任其侧移的特殊措施，其计算过程和普通力矩分配法一样简便。

三、剪力分配法

1．适用对象

适用于所有横梁为刚性杆、竖柱为弹性杆的框架结构。

2．举例

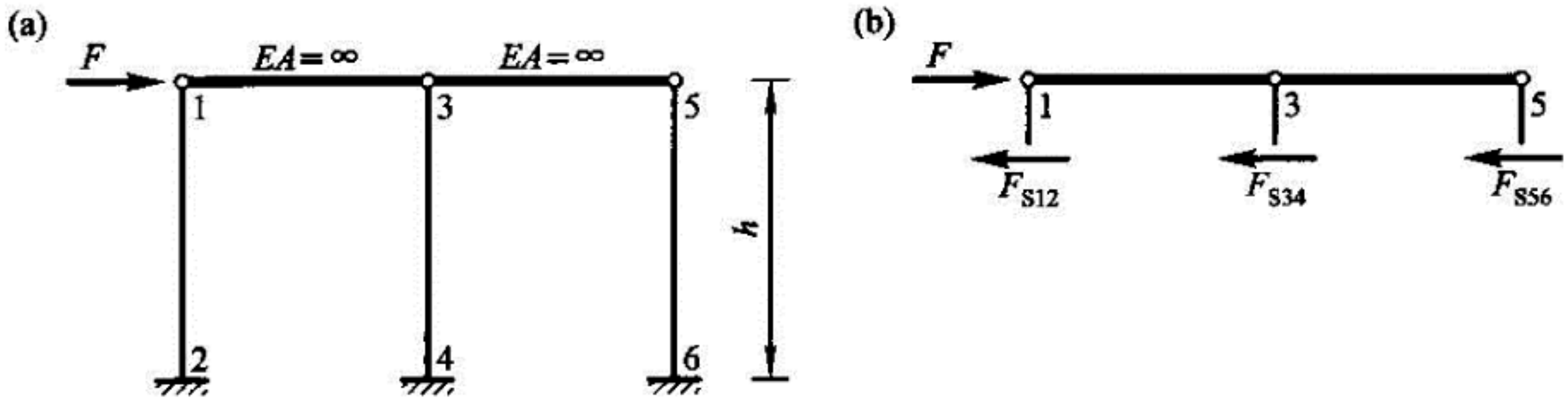


图 9-1-12

如图 9-1-12 所示的结构，其横梁为刚性二力杆，只有一个独立结点线位移 Z_1（即柱顶 1、3、5 的水平线位移），为求此位移。

（1）将各柱顶截开，得隔离体如图 9-1-12（b）所示，其平衡条件 $\sum F_x=0$ 为

$$F=F_{S12}+F_{S34}+F_{S56}$$

（2）各柱顶剪力与柱顶水平线位移 Z_1 的关系，可查得

$$F_{S12}=\frac{3i_{12}}{h^2}Z_1,\quad F_{S34}=\frac{3i_{34}}{h^2}Z_1,\quad F_{S56}=\frac{3i_{56}}{h^2}Z_1$$

式中，$D_1=\frac{3i_{12}}{h^2}$，$D_2=\frac{3i_{34}}{h^2}$，$D_3=\frac{3i_{56}}{h^2}$ 为杆件的侧移刚度，即杆件发生单位侧移时，所产生的杆端剪力。

（3）将上述剪力代入平衡条件，可求出线位移 $Z_1=\frac{F}{D_1+D_2+D_3}=\frac{F}{\sum D_i}$ 。

（4）各柱顶剪力为

$$F_{S12}=\frac{D_1}{\sum D_i}F=\nu_1F,\quad F_{S34}=\frac{D_2}{\sum D_i}F=\nu_2F,\quad F_{S56}=\frac{D_3}{\sum D_i}F=\nu_3F$$

式中，$\nu_1=\frac{D_1}{\sum D_i}$，$\nu_2=\frac{D_2}{\sum D_i}$，$\nu_3=\frac{D_3}{\sum D_i}$ 为剪力分配系数，可见 $\nu_1+\nu_2+\nu_3=1$。

（5）对于排架结构，各柱固定端的弯矩等于柱顶剪力与其高度之积，即

$$M_{21}=-F_{S12}h,\quad M_{43}=-F_{S43}h,\quad M_{65}=-F_{S65}h$$

式中，负号表示弯矩绕杆端逆时针转动。

3．定义

利用剪力分配系数求柱顶剪力的方法称为剪力分配法。

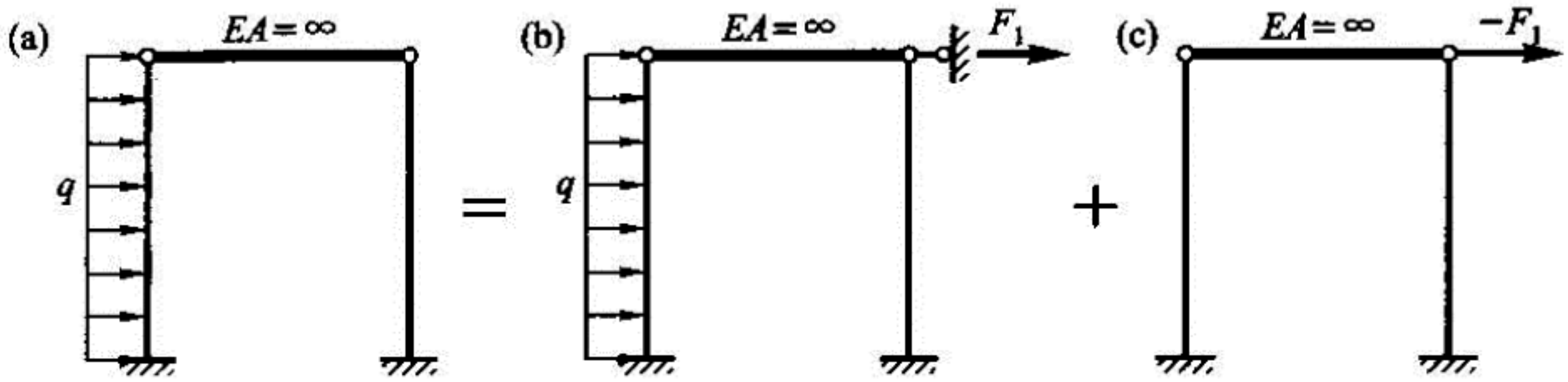


图 9-1-13

4．其他情况

（1）荷载不是作用于柱顶，而是作用在竖柱上，如图 9-1-13（a）所示。

①将结构分解为只有结点线位移和只有荷载 q 的单独作用，如图 9-1-13（b）、（c）所示。

②查表求出图 9-1-13（b）中各柱端内力（又称固端力）。

③从而求出附加链杆上的反力 F_1。

④而由叠加原理可知，图 9-1-13（c）中右柱顶的柱顶荷载值应为 F，，方向与图 9-1-13（b）中的 F_1 相反，用上述剪力分配法进行计算。

⑤将图 9-1-13（b）、（c）两种情况的内力叠加，即得原结构的最后内力。

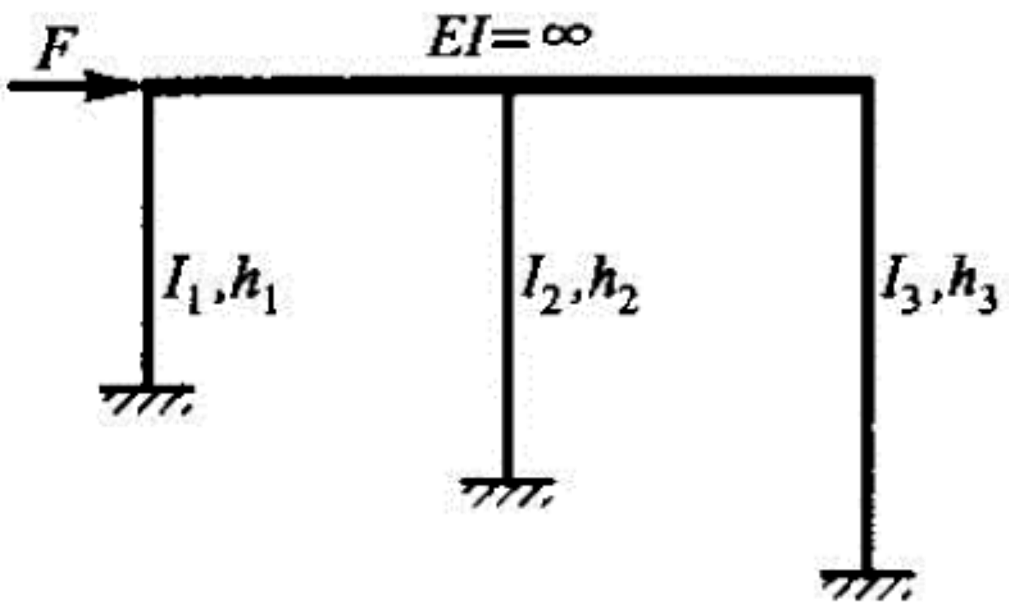


图 9-1-14

（2）对于图 9-1-14 所示横梁为刚性杆（EI＝∞）的刚架，因只有一个独立结点线位移（柱顶的水平线位移），可采用剪力分配法进行计算。其各柱的侧移刚度为

$$D_1=\frac{12EI_1}{h_1^3},\quad D_2=\frac{12EI_2}{h_2^3},\quad D_3=\frac{12EI_3}{h_3^3}$$

各柱的剪力分配系数和最后内力的计算方法与上述排架的相同，但各柱的杆端弯矩等于柱顶剪力与其高度之积的一半。

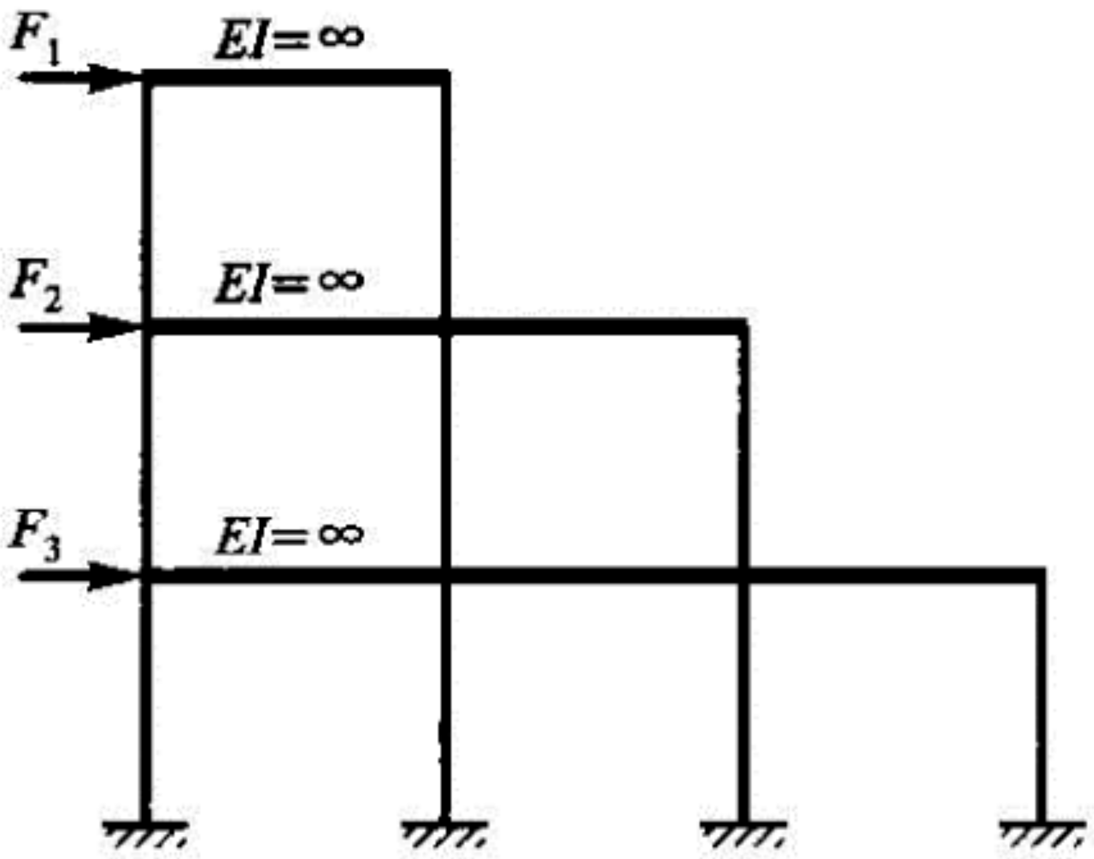


图 9-1-15

（3）若结构为图 9-1-15 所示多层多跨刚架，由水平投影平衡条件可知，任一层的总剪力等于该层及以上各层所有水平荷载的代数和，按剪力分配系数分配到该层的各个柱顶，即可确定各竖柱的弯矩。

5．实用实例

试用剪力分配法求图 9-1-16（a）所示刚架竖柱的弯矩图。竖柱 E 为常数。

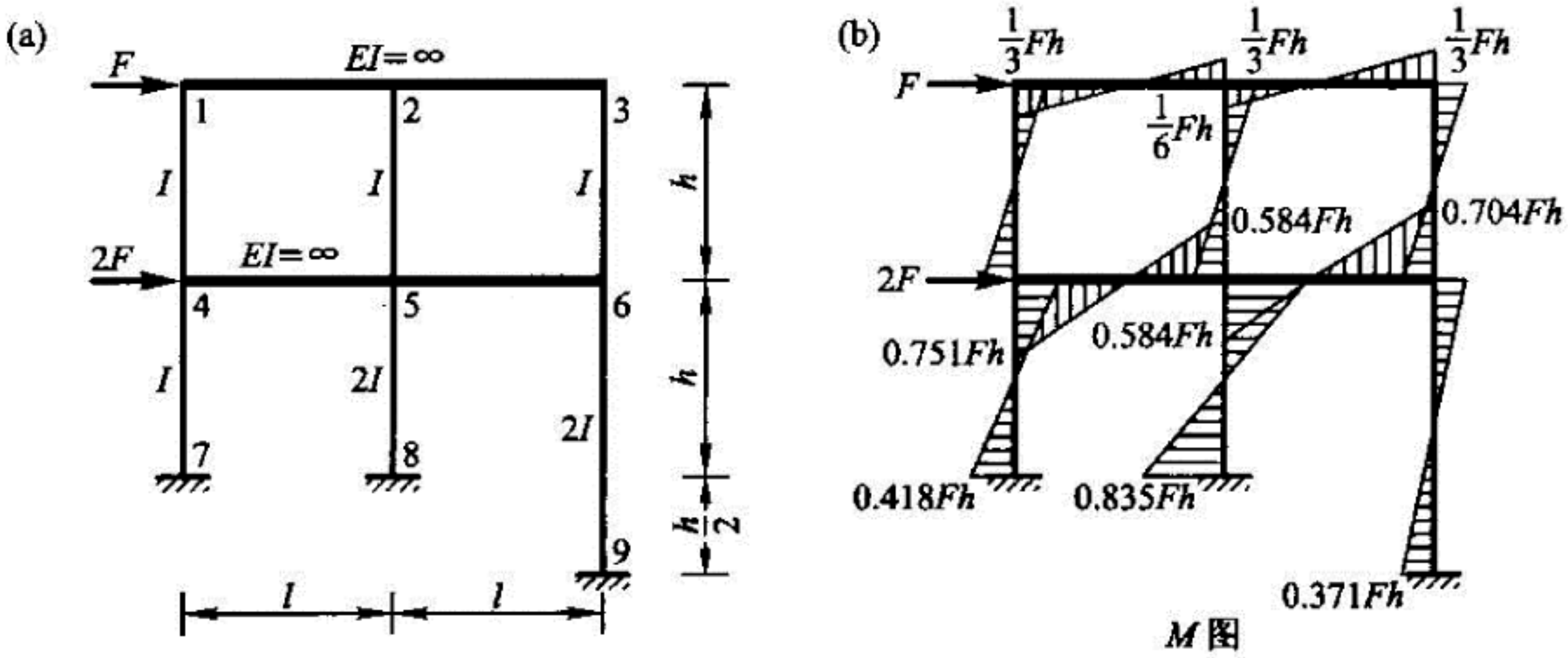


图 9-1-16

解：（1）求各竖柱的刚度

设$\frac{12EI}{h^3}=1$，查表 8-1-1，可得上层各竖柱的侧移刚度为 $D_1=D_2=D_3=1$，下层各竖柱（从左至右）的侧移刚度为 $D_4=1$，$D_5=\frac{12E\times 2I}{h^3}=2$，$D_6=\frac{12E\times 2I}{(3h/2)^3}=\frac{16}{27}$。

（2）剪力分配系数

上、下层各竖柱顶的剪力分配系数分别为

$$\nu_1=\nu_2=\nu_3=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

$$\nu_4=\frac{1}{1+2+\frac{16}{27}}=0.2784,\quad \nu_5=\frac{2}{1+2+\frac{16}{27}}=0.5567\quad \nu_6=\frac{\frac{16}{27}}{1+2+\frac{16}{27}}=0.1649$$

（3）各柱顶的剪力

上、下层的总剪力分别为 F、3F，则各柱顶的剪力分别为

$$F_{S14}=\nu_1 F=\frac{F}{3},\quad F_{S25}=F_{S36}=\frac{F}{3}$$

$$F_{S47}=\nu_4\times 3F=0.835F,\quad F_{S58}=1.670F,\quad F_{S69}=0.495F$$

（4）各柱端的弯矩分别为

$$M_{14}=M_{41}=-\frac{F_{S14}h}{2}=-\frac{Fh}{6}$$

$$M_{25}=M_{52}=M_{36}=M_{63}=-\frac{Fh}{6}$$

$$M_{47}=M_{74}=-\frac{F_{S47}h}{2}=-0.418Fh$$

$$M_{58}=M_{85}=-\frac{F_{S58}h}{2}=-0.835Fh$$

$$M_{69}=M_{96}=-F_{S96}\times\frac{3h}{2}=-0.371Fh$$

（5）确定刚性横梁的弯矩

①若结点只联结一根刚性横梁，则可由结点的力矩平衡条件确定横梁在该结点端的杆端弯矩；

②若结点联结了两根刚性横梁，则可近似认为两根刚性横梁的转动刚度相同，从而分配到相同的杆端弯矩。最后弯矩图如图 9-1-16（b）。

（6）总结

①以上剪力分配法对于绘制多层多跨刚架在风力、地震作用（通常简化为结点水平力荷载）作用下的弯矩图是非常方便的，但其基本假设是横梁刚度为无穷大，各刚结点均无转角，因而各柱的反弯点在其高度的一半处。

②实际结构的横梁刚度并非无穷大，故各柱的反弯点的高度与上述结果有所不同。经验表明，当梁与柱的线刚度比大于 5 时，上述结果仍足够精确。

③随着梁柱线刚度比的减小，结点转动的影响将逐渐增加，柱的反弯点位置将有所变动。其规律是

a．底层柱的反弯点位置逐渐升高；

b．顶部少数层柱的反弯点位置逐渐降低（尤以最顶层较为显著）；

c．其余中间各层则变化不大，柱的反弯点仍在中点附近。

9.2 课后习题详解

复习思考题

1．什么是劲度系数（转动刚度）?什么是分配系数？为什么一刚结点处各杆端的分配系数之和等于 1？

答：（1）劲度系数（转动刚度）的定义

杆端的劲度系数是指当杆件的近端转动单位角时，在该近端产生的弯矩。

（2）分配系数的定义

分配系数是指结点某一杆端的劲度系数与该结点处所有杆端的劲度系数的比值。

（3）一刚结点处各杆端的分配系数之和等于 1 的原因

因为分配系数的计算公式 $\mu_{1j}=\dfrac{S_{1j}}{\sum S_{1j}}$，在刚节点处各杆端分配系数之和应为

$$\mu=\frac{\sum S_{1j}}{\sum S_{1j}}=1$$

2．单跨超静定梁的劲度系数和传递系数与杆件的线刚度有何关系?

答：单跨超静定梁的劲度系数不仅与杆件线刚度 $i=\dfrac{EI}{l}$ 相关，而且与杆件另一端（又称远端）的支承情况有关；传递系数与杆件的线刚度无关，只与远端支承形式有关。

3．图 9-2-1 所示三个单跨梁，仅 B 端约束不同。它们的劲度系数 S_{AB} 和传递系数 C_{AB} 是否相同，为什么？



图 9-2-1

答：不考虑杆件轴向变形，(a)、(b)、(c）三个图的劲度系数均相同，即 $S_{AB}=4i$，其中 i 为杆件的线刚度；(a)、(b)、(c）三个图的传递系数均相同，即 $C_{AB}=0.5$。因为虽然 B 端约束表面上形式各异，但在不考虑杆件轴向变形的条件下，(a)、(b)、(c）三个图在 B 端的最终约束效果上均可以当成固定端来处理。

4．什么是不平衡力矩?如何计算不平衡力矩?为什么要将它反号才能进行分配?

答：（1）不平衡力矩的定义

不平衡力矩是指在附加约束结点处各固端弯矩所不能平衡的差额。

（2）其计算值等于汇交于该结点处的各杆端固端弯矩的代数和。

（3）用反号进行分配才能平衡掉附加约束结点处产生的不平衡力矩，满足平衡条件，与该结点未加约束时的受力状态吻合。

5．什么叫传递弯矩和传递系数?

答：（1）传递弯矩的定义

传递弯矩是指将各近端的分配弯矩以传递系数的比例传到各远端，即近端的分配弯矩与传递系数的乘积。

（2）传递系数的定义

传递系数是指当杆件近端有转角时，远端弯矩与近端弯矩的比值。

6．说明力矩分配法每一步骤的物理意义。

答：力矩分配法每一步骤的物理意义分别为：

（1）固定结点

在刚结点加入刚臂，各杆端有固端弯矩，而结点上有不平衡力矩，暂时由刚臂承担。其物理意义就是相当于变成固定端，产生固端弯矩和约束反力矩。

（2）放松结点

取消刚臂，让节点转动。其物理意义就是在结点上有加入一个反号的不平衡力矩，于是不平衡力矩被消除而结点获得平衡，变为原结构的真实状态。

（3）不平衡力矩的分配、传递

其物理意义就是满足平衡条件和原结构受力状态。

（4）分配弯矩和传递弯矩叠加得出最终结果

其物理意义就是力的叠加原理。

7．为什么力矩分配法的计算过程是收敛的?

答：力矩分配法是位移法演变而来的一种结构计算方法，避免了组成和解算典型方程，而以逐次渐进的方法

来计算杆端弯矩，每轮弯矩传递对应的角度增量会形成一个收敛的数列，故其计算结果的精度随计算轮次的增加而提高，最后收敛于精确解。

8．力矩分配法计算，何时可以同时放松多个结点?

答：力矩分配法计算无结点线位移的连续梁时，不能同时放松相邻结点，但可以同时放松不相邻的结点，可以加快该渐进法的收敛速度。

9．力矩分配法只适合于无结点线位移的结构，当这类结构发生已知支座移动时结点是有线位移的，为什么还可以用力矩分配法计算?

答：因为当已知支座位移时，支座位移产生的固端弯矩可以计算出来，在汇总不平衡力矩时考虑进去即可，与已知力产生的固端弯矩同等对待，所以力矩分配法仍然行的通。

10．无剪力分配法的基本结构是什么形式?无剪力分配法的适用条件是什么?为什么称无剪力分配法?

答：（1）无剪力分配法的基本结构的形式

无剪力分配法的基本结构的形式是剪力静定柱和无侧移横梁的组合。

（2）无剪力分配法的适用条件

无剪力分配法的适用条件是符合某些特定条件的有侧移刚架，即刚架中除两端无相对线位移的杆件外，其余杆件都是剪力静定杆件。

（3）称无剪力分配法的原因

因为在力矩的分配和传递过程中，柱中原有剪力将保持不变而不断增加新的剪力，故称之为无剪力分配法。

11．剪力分配法的适用条件是什么?为什么称为剪力分配法?

答：（1）剪力分配法的适用条件

剪力分配法的适用条件是所有横梁为刚性杆、竖柱为弹性杆的框架结构。

（2）称为剪力分配法的原因

因为该方法是利用剪力分配系数求解柱顶剪力的，故称之为剪力分配法。

习题

9-1　试用力矩分配法计算图示刚架、并绘制 M 图。

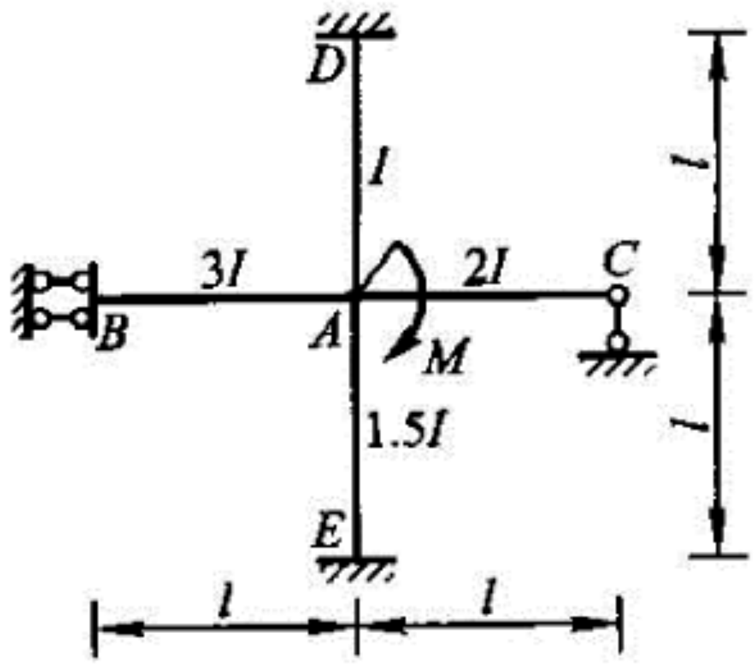


图 9-2-2（题 9-1）

解：计算各杆端分配系数

为方便计算，令 $\frac{EI}{l}=i=1$，则可算得其余杆件的线刚度为

$$i_{AD}=i, i_{AB}=3i, i_{AC}=2i, i_{AE}=1.5i$$

分配系数计算如下

$$u_{AD}=\frac{4}{4\times1+4\times1.5+3\times2+1\times3}=\frac{4}{19}$$

$$u_{AB}=\frac{3}{19},u_{AE}=\frac{6}{19},u_{AC}=\frac{6}{19}$$

不平衡力在刚架上产生的反力矩为−M，进行力矩分配与传递。结点的不平衡力矩ΣM=−M，将其反号并乘以分配系数即得各近端的分配弯矩，再乘以传递系数即得到各远端的传递弯矩。

具体的分配、传递过程如图 9-2-3（a）所示。将固端弯矩和分配弯矩叠加，便可得到此刚架的最终弯矩 M 图，如图 9-2-3（b）所示。

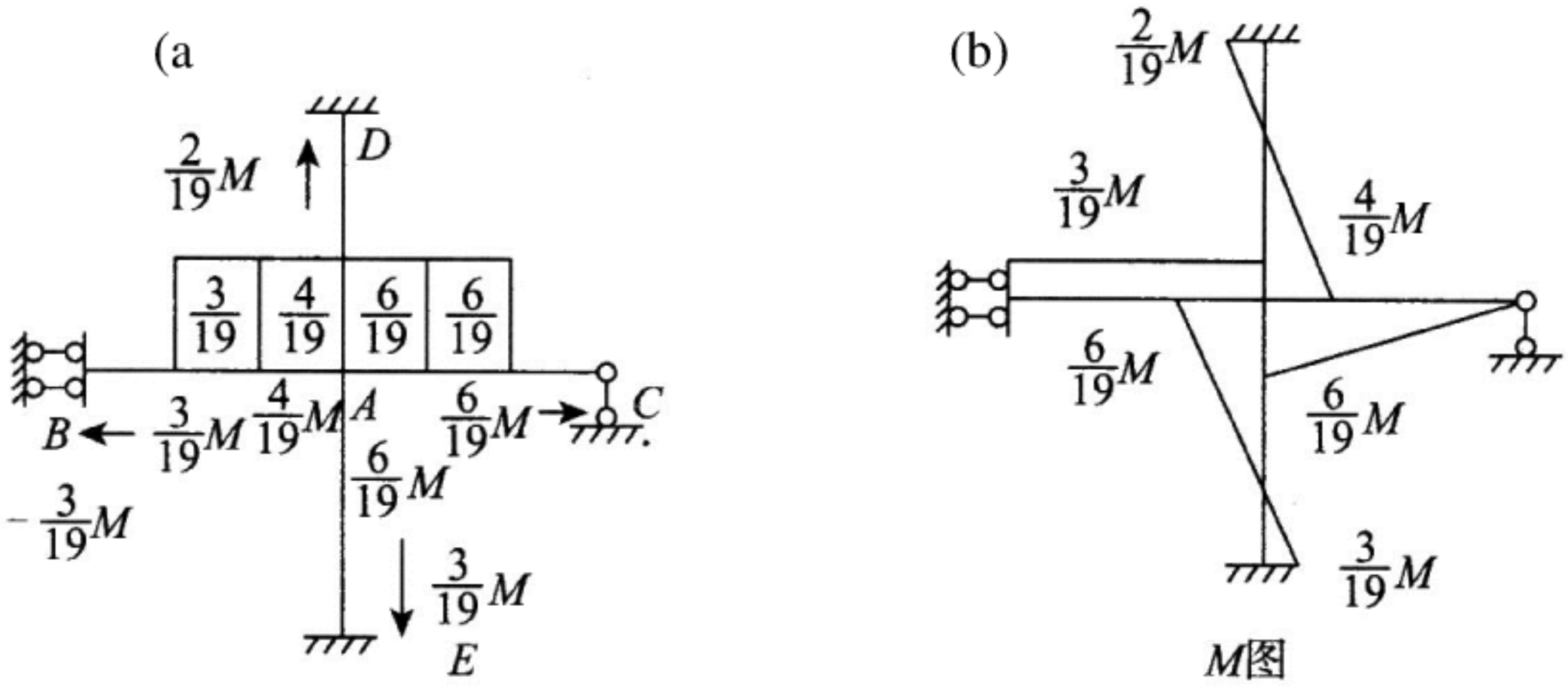


图 9-2-3

9-2　试用力矩分配法计算图示刚架、并绘制 M 图。

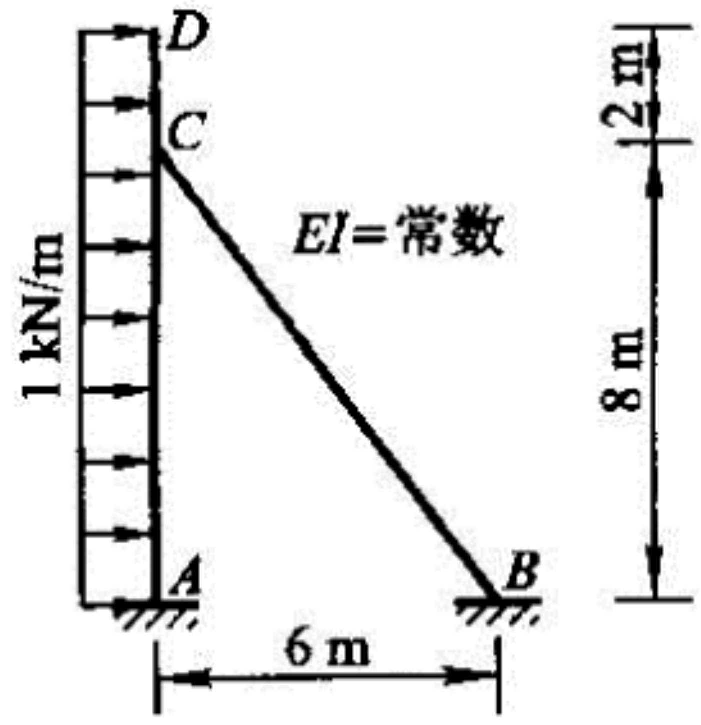


图 9-2-4（题 9-2）

解：CD 段为静定结构，计算各杆端分配系数

为方便计算，令$\frac{EI}{10}=1$，则$\frac{EI}{8}=\frac{5}{4}=i_{AC}$。

分配系数和固端弯矩计算如下

$$\mu_{CA}=\frac{4\times\frac{5}{4}}{4\times1+4\times\frac{5}{4}}=\frac{5}{9}，\ \mu_{CB}=\frac{4}{9}$$

$$M_{CD}=-1\times2\times1=-2kN\cdot m$$

$$M_{CA}=\frac{1}{12}\times64\times1=5.33kN\cdot m$$

不平衡力矩为 5.33−2=3.33kN·m，将其反号并乘以分配系数即得近端分配弯矩，再乘以传递系数，即得各远端的传递弯矩。

具体的分配、传递过程如图 9-2-5 所示。将固端弯矩和分配弯矩叠加，便可得此刚架最终弯矩 M 图，如图

9-2-6 所示。

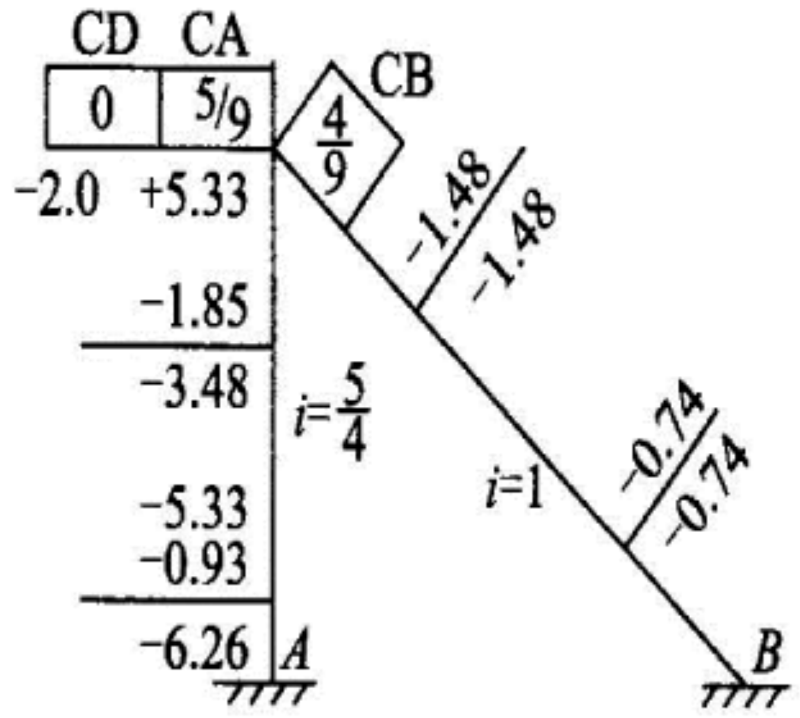


图 9-2-5

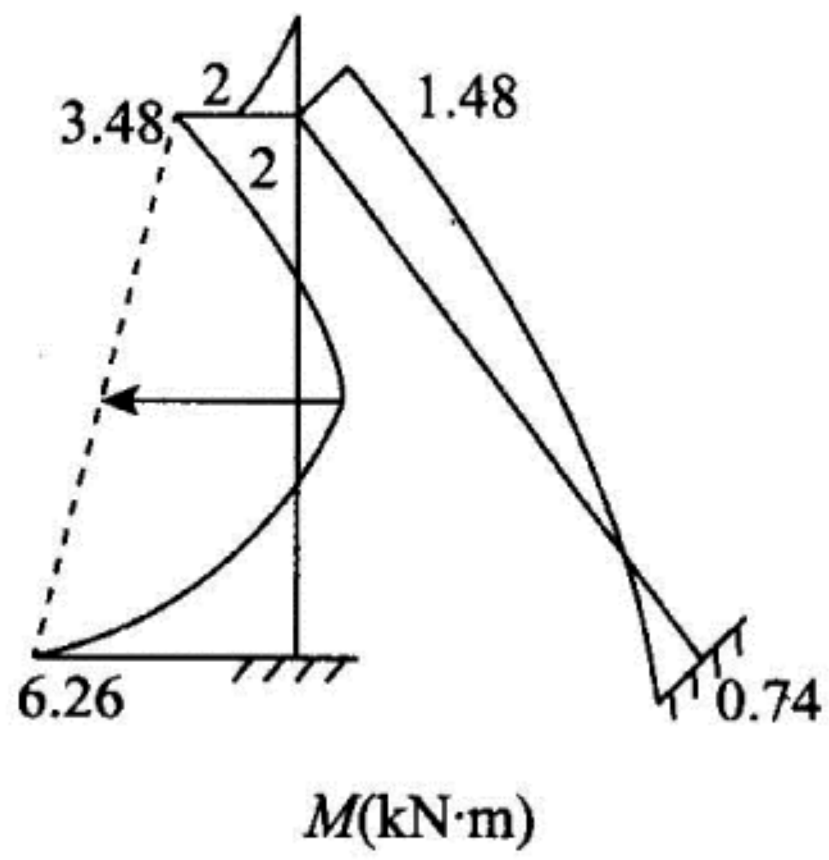


图 9-2-6

9-3　试用力矩分配法计算题 7-22 所示连续梁。如图 9-2-7 所示。

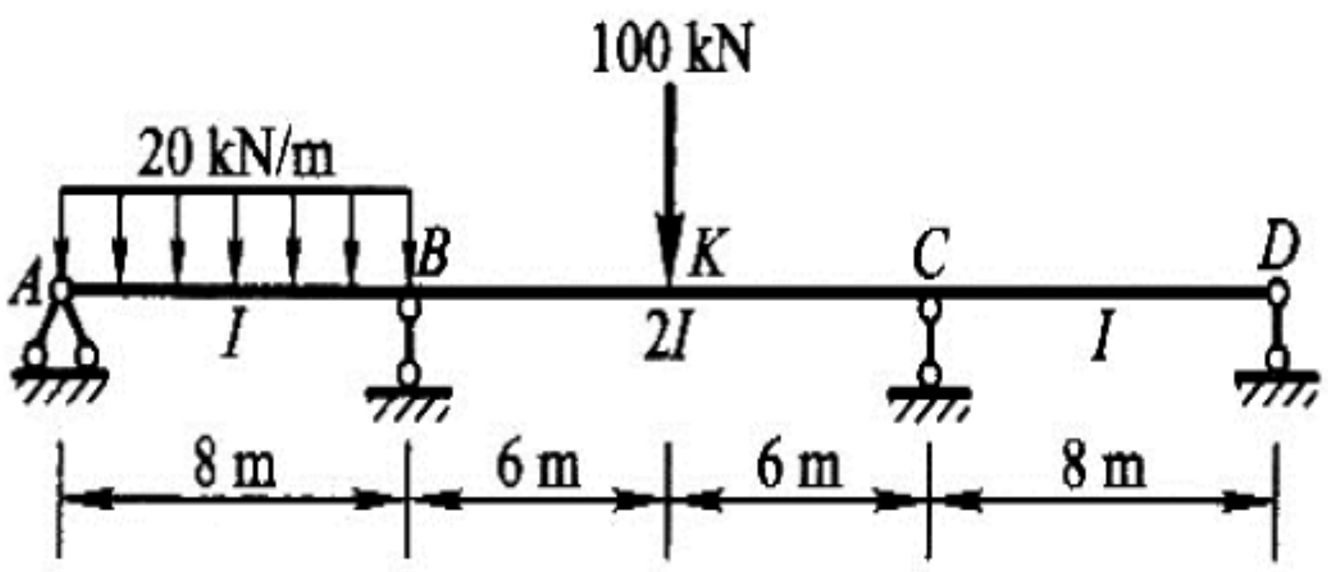


图 9-2-7（题 9-3）

解：各杆线刚度为

$$i_{AB}=\frac{EI}{8}=1, i_{BC}=\frac{4}{3}$$

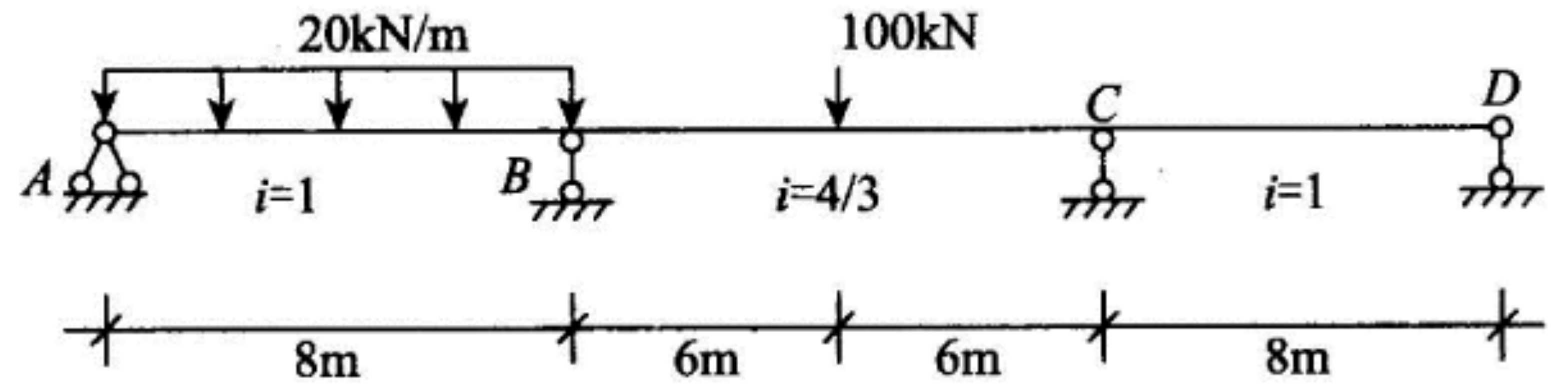
分配系数计算如下

$$u_{BA}=\frac{3}{3\times1+4\times\frac{4}{3}}=0.36, u_{BC}=0.64, u_{CB}=0.64, u_{CD}=0.36$$

计算固端弯矩

$M_{BA}=160\text{kN·m}$，$M_{BC}=-150\text{kN·m}$，$M_{CB}=150\text{kN·m}$

进行 C 端弯矩分配，将其反号并乘以分配系数，即得各近端分配弯矩，再以传递系数得远端弯矩，轮流放松各结点进行力矩分配与传递。具体的分配、传递过程如图 9-2-8 所示。



	A	B			C		D
u		0.36	0.64		0.64	0.36	
M^F	0	+160	−150		+150		
分传			−48	←	−96	−54	
		13.7	24.3	→	12.2		
			−3.9	←	−7.8	−4.4	
		1.4	2.5	→	1.2		
			−0.4	←	−0.8	−0.4	
		0.1	0.3	→	0.2		
					−0.1	−0.1	
M	0	175.2	−175.2		58.9	−58.9	0

图 9-2-8

计算杆端最后弯矩，并绘出最终弯矩 M 图，如图 9-2-9 所示。

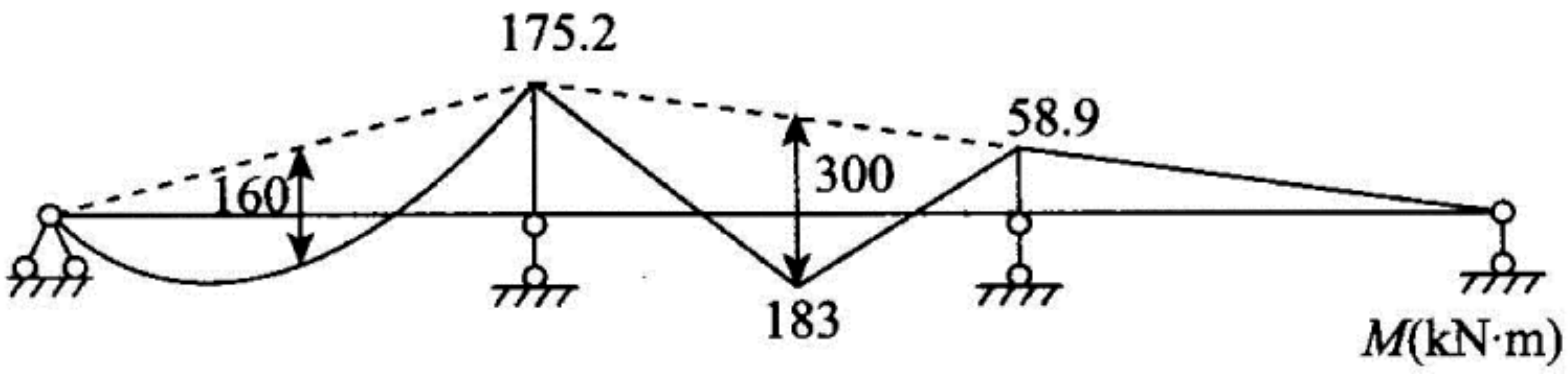


图 9-2-9

9-4　图示连续梁 EI＝常数，试用力矩分配法计算其杆端弯矩，并绘制 M 图。

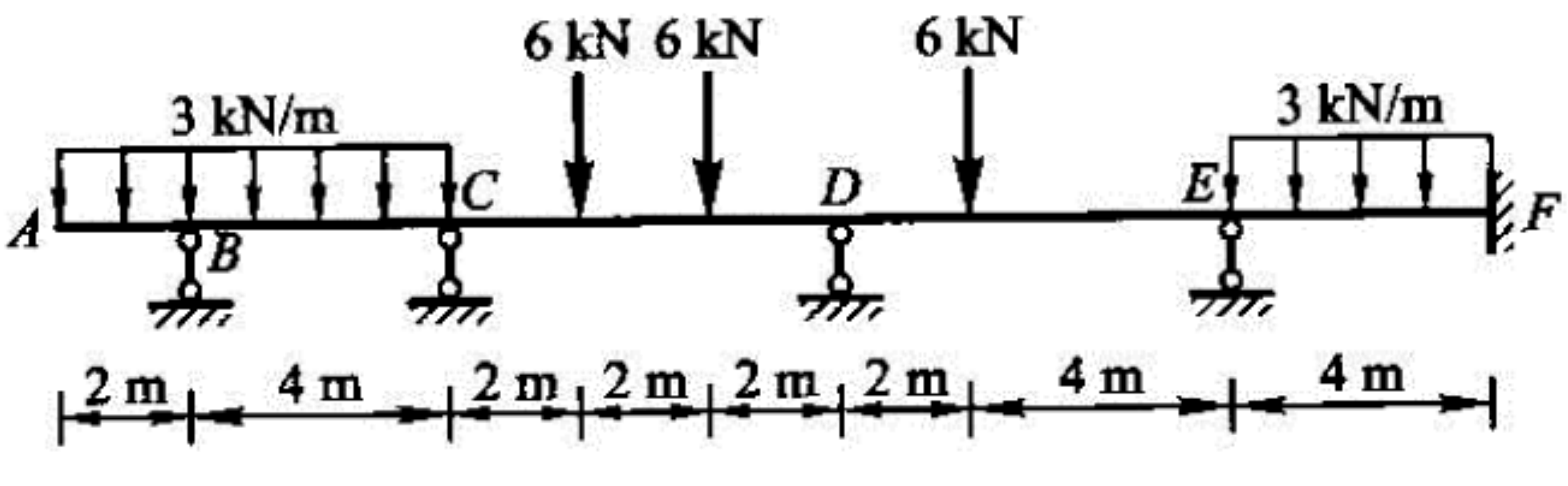


图 9-2-10（题 9-4）

解：计算分配系数及各固端弯矩，将 C 端、E 端弯矩分配，将其弯矩反号并乘以分配系数即得各近端分配弯矩，再乘以传递系数得远端弯矩，轮流放松各结点进行力矩的分配与传递。具体过程如表 9-2-1 所示。

表 9-2-1

u		0.5294	0.4706	0.5	0.5	0.4	0.6	
M^F	-6	+3	-8	+8	-5.33	+2.67	-4	+4
分传		+2.65	+2.35 →	+1.18	+0.27 ←	+0.53	+0.8 →	0.4
			-1.03 ←	-2.06	-2.06 →	-1.03		
		+0.55	+0.48 →	+0.24	+0.21 ←	+0.41	+0.62 →	0.31
			-0.11 ←	-0.23	-0.22 →	-0.11		
		+0.06	+0.05 →	+0.03	+0.02 ←	+0.04	+0.07 →	0.03
			-0.01 ←	-0.02	-0.03 →	-0.01		
		+0.01	0			0	+0.01	
M	-6	+6.27	-6.27	+7.14	-7.14	+2.50	-2.50	+4.75

计算出各杆端最后弯矩，并绘出最终弯矩 M 图，如图 9-2-11 所示。

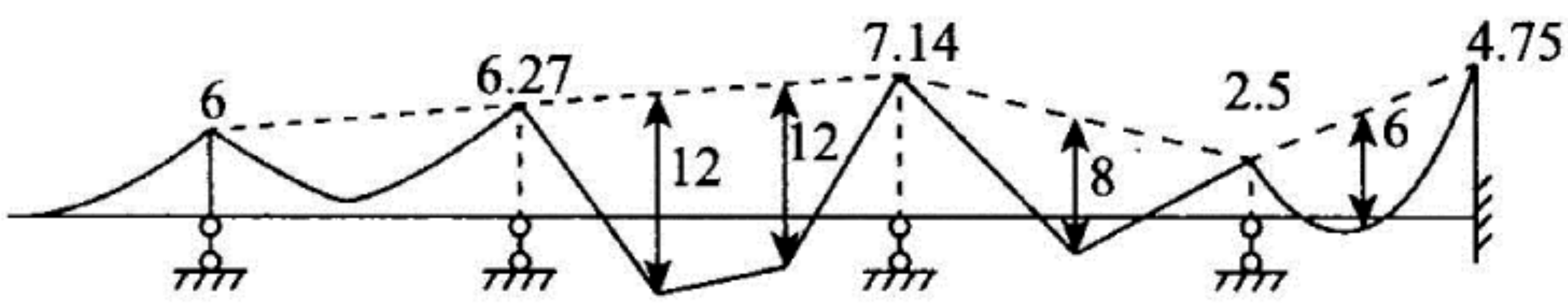


图 9-2-11

9-5 开挖基坑时用以支撑坑壁的板桩立柱及其计算简图如图所示。试作其弯矩图。

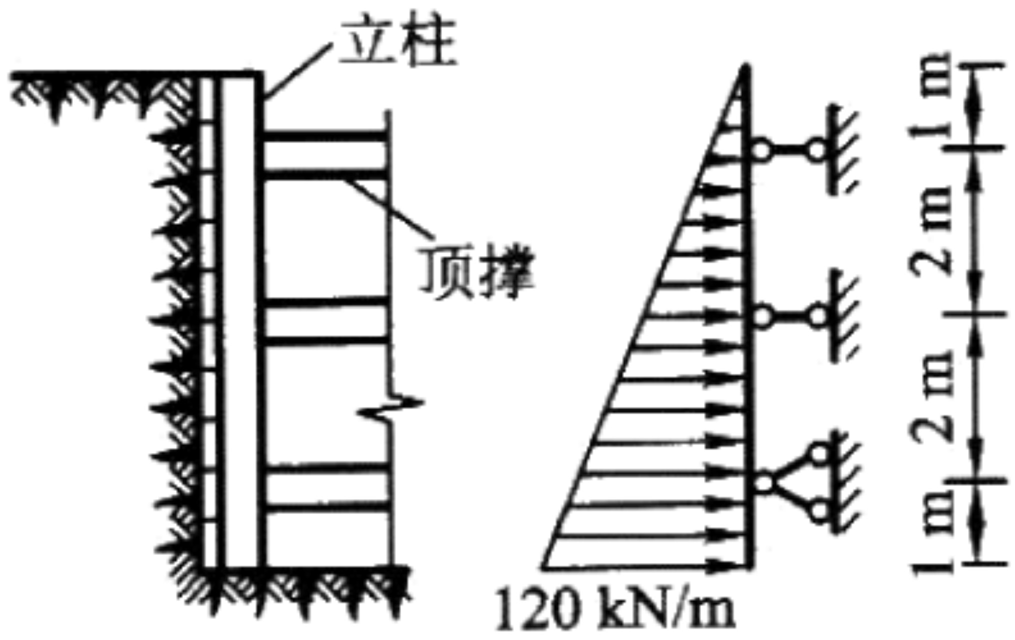


图 9-2-12（题 9-5）

解：计算分配系数及各固端弯矩，固端弯矩的计算如图 9-2-13 所示。

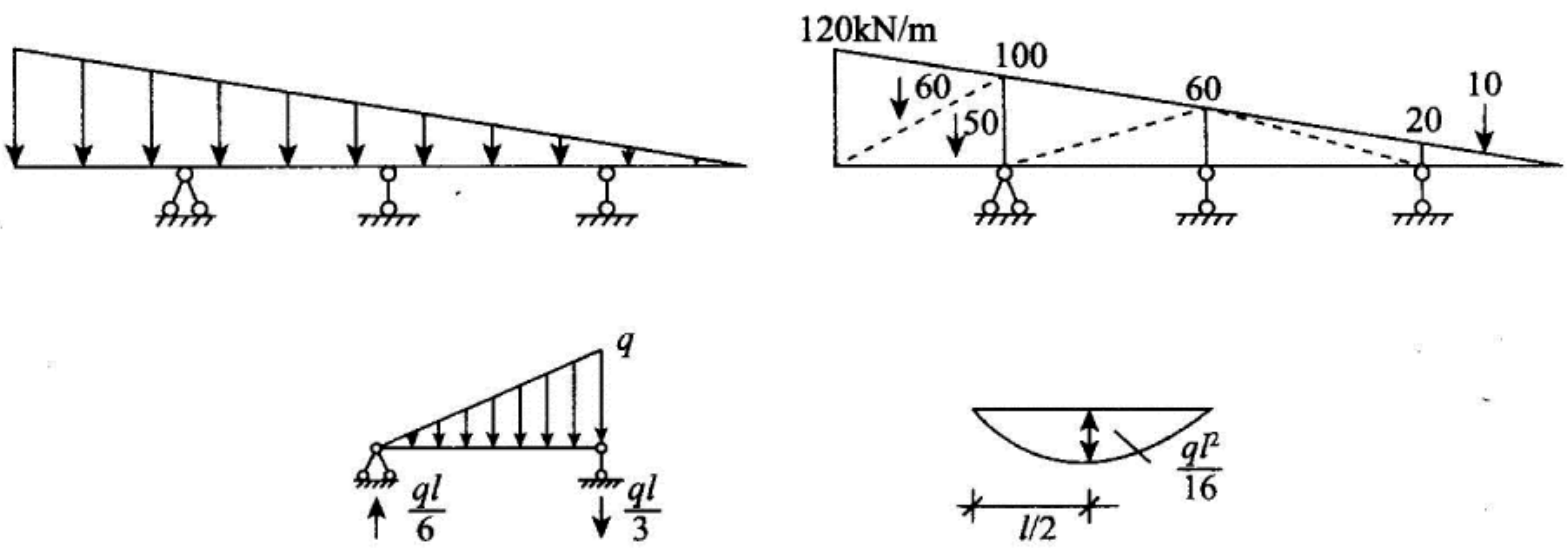
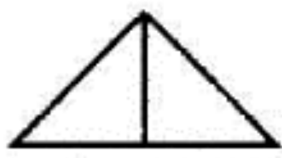
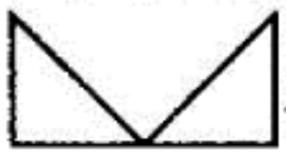


图 9-2-13

分配系数的计算以及按力矩分配法进行力矩的分配与传递过程如表 9-2-2 所示。

表 9-2-2

u		1/2	1/2	
悬臂荷载	−56.67	−28.33	+1.67	+3.33
荷载		+16	+16	
荷载		+23.33	−4.67	
总计M^F		+11.0	−19.0	
分配		+4	+4	
M	−56.67	+15	−15	+3.33

计算出各杆端最后弯矩，并绘出最终 M 图。如图 9-2-14 所示。

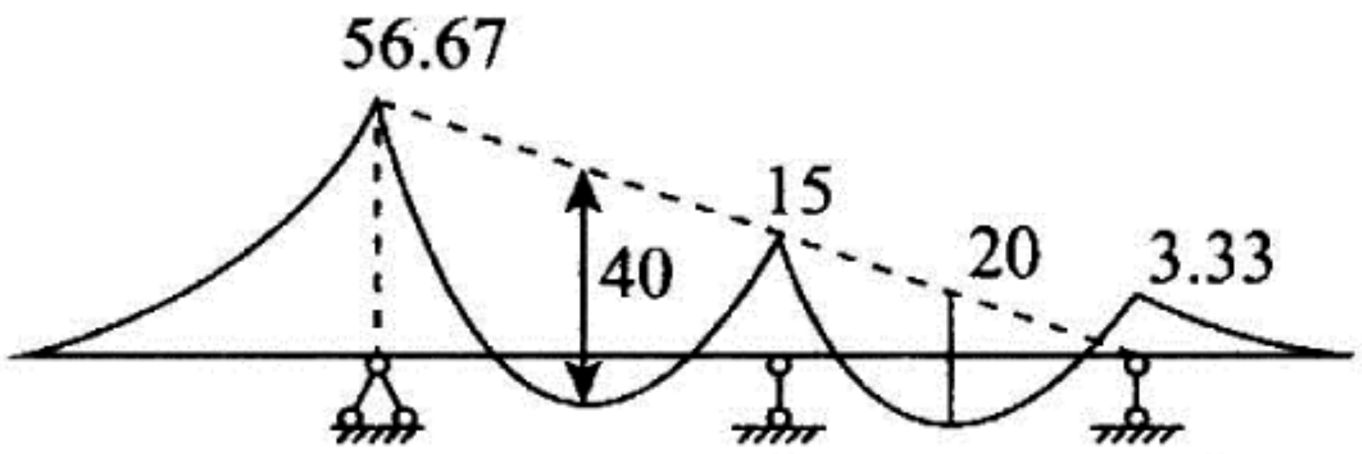


图 9-2-14

9-6　试用力矩分配法计算图示刚架，并绘 M 图。E＝常数。

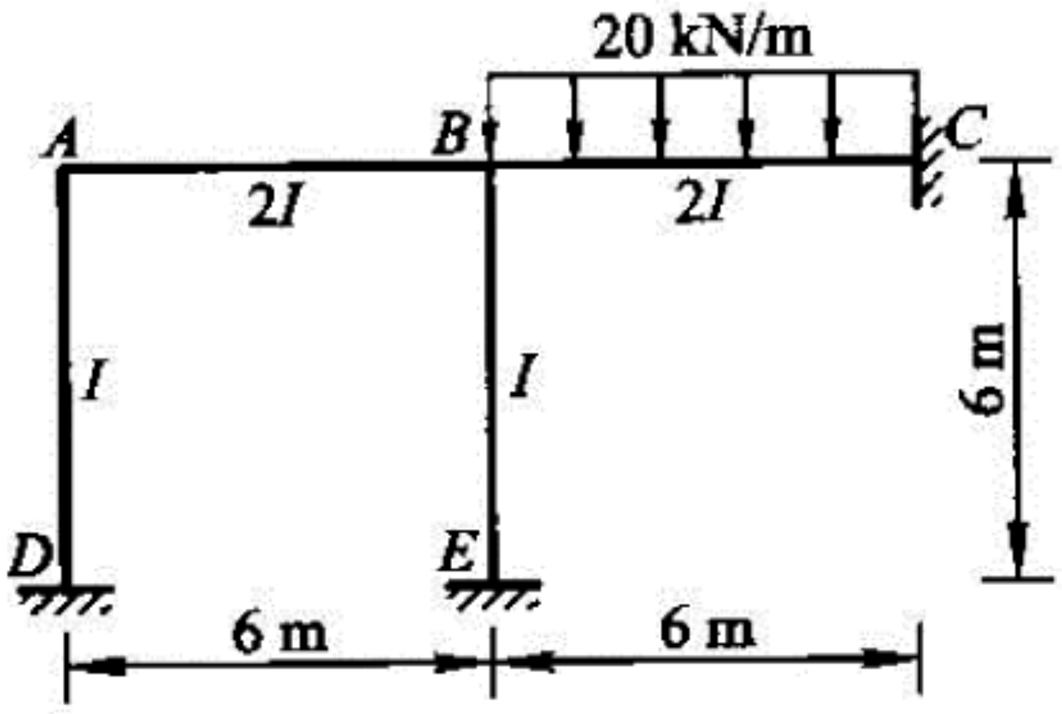


图 9-2-15（题 9-6）

解：计算出刚架的杆端分配系数以及刚架不平衡力矩，进行力矩的分配与传递。将 B 结点不平衡弯矩反号并乘以分配系数，即得各近端的分配弯矩，再将其乘以传递系数即得远端弯矩。具体计算过程如图 9-2-16 所示。

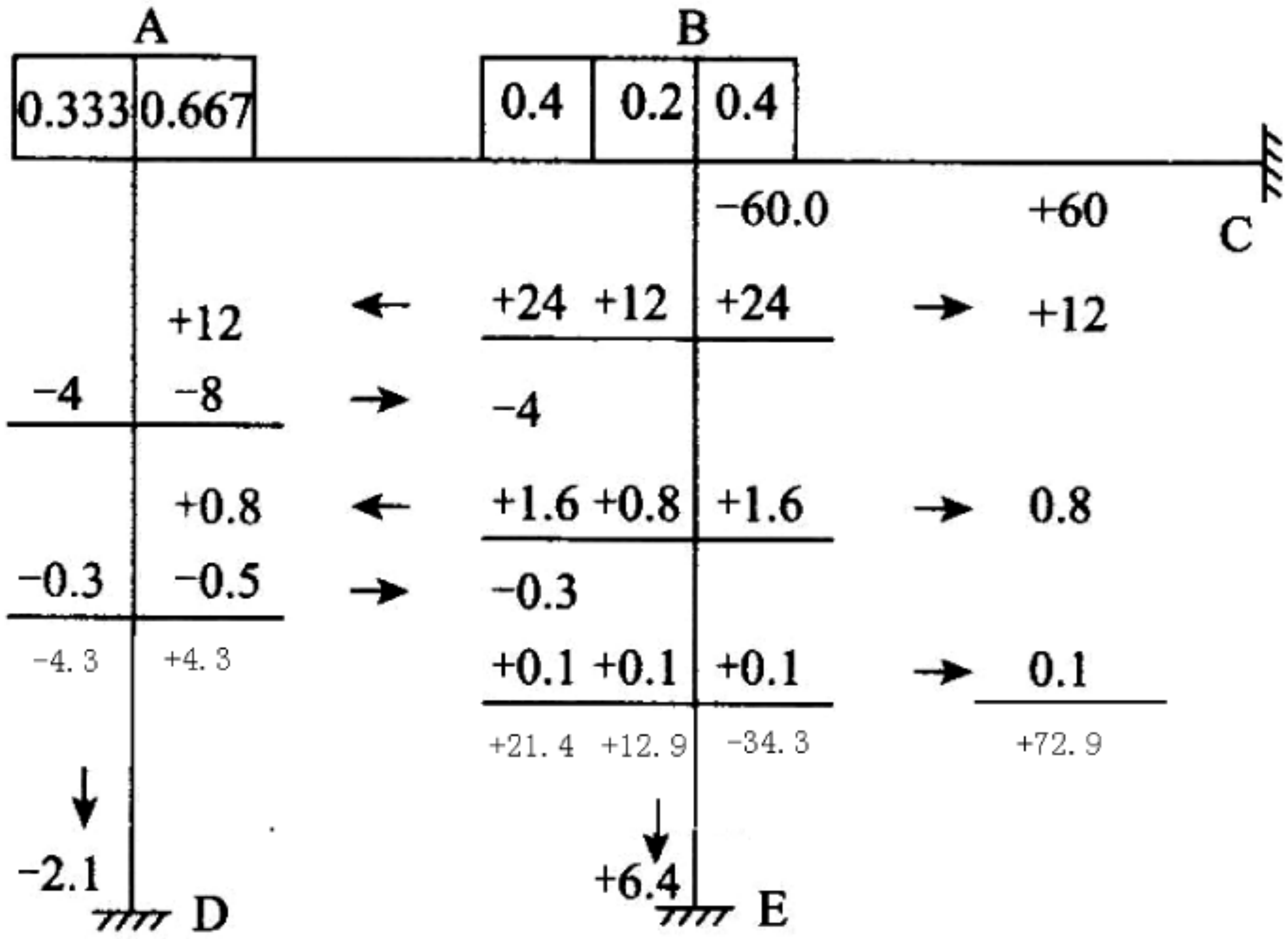


图 9-2-16

将上述算得的固端弯矩和分配弯矩叠加，即可得到最终弯矩 M 图，如图 9-2-17 所示。

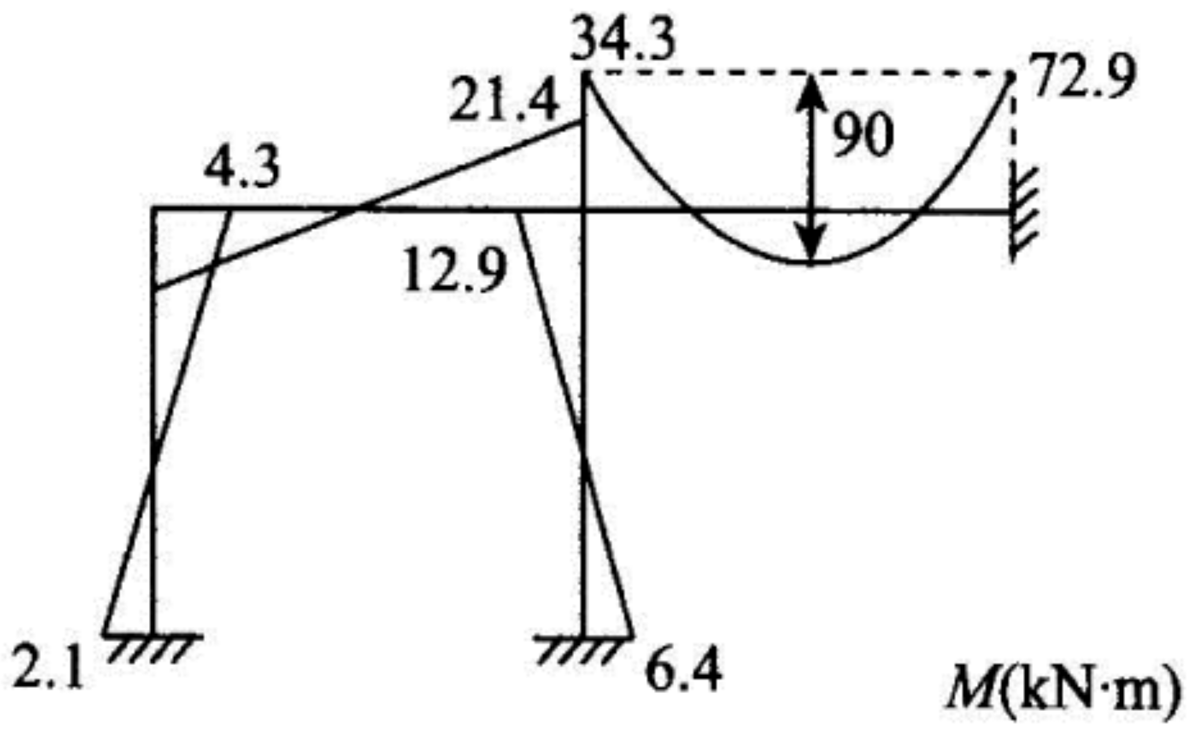


图 9-2-17

9-7　试用力矩分配法计算图示刚架，并绘 M 图。E＝常数。

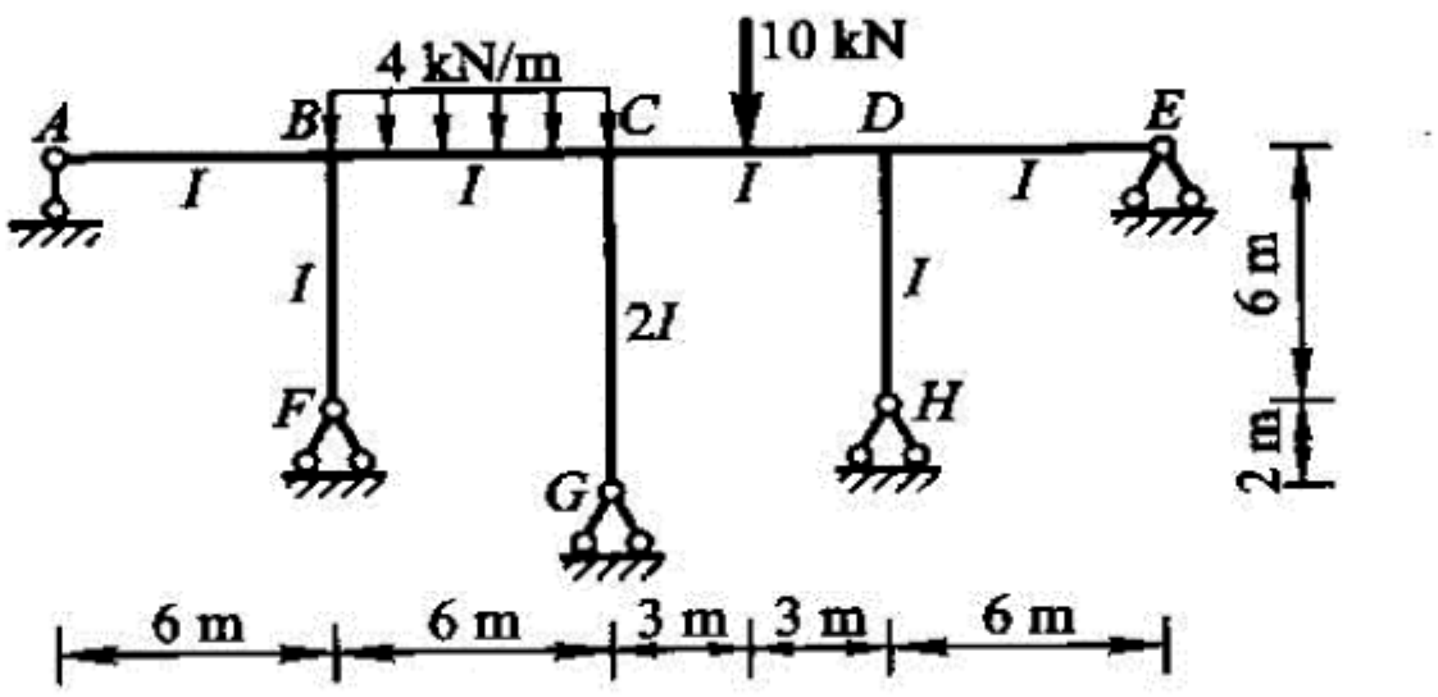


图 9-2-18（题 9-7）

答：计算出刚架杆端分配系数以及刚架不平衡力矩，进行力矩的分配与传递，将 B、D 结点不平衡力矩反号并乘以分配系数，即得各近端弯矩，再将其乘以传递系数，即得远端弯矩。具体的解算过程如图 9-2-19 所示。

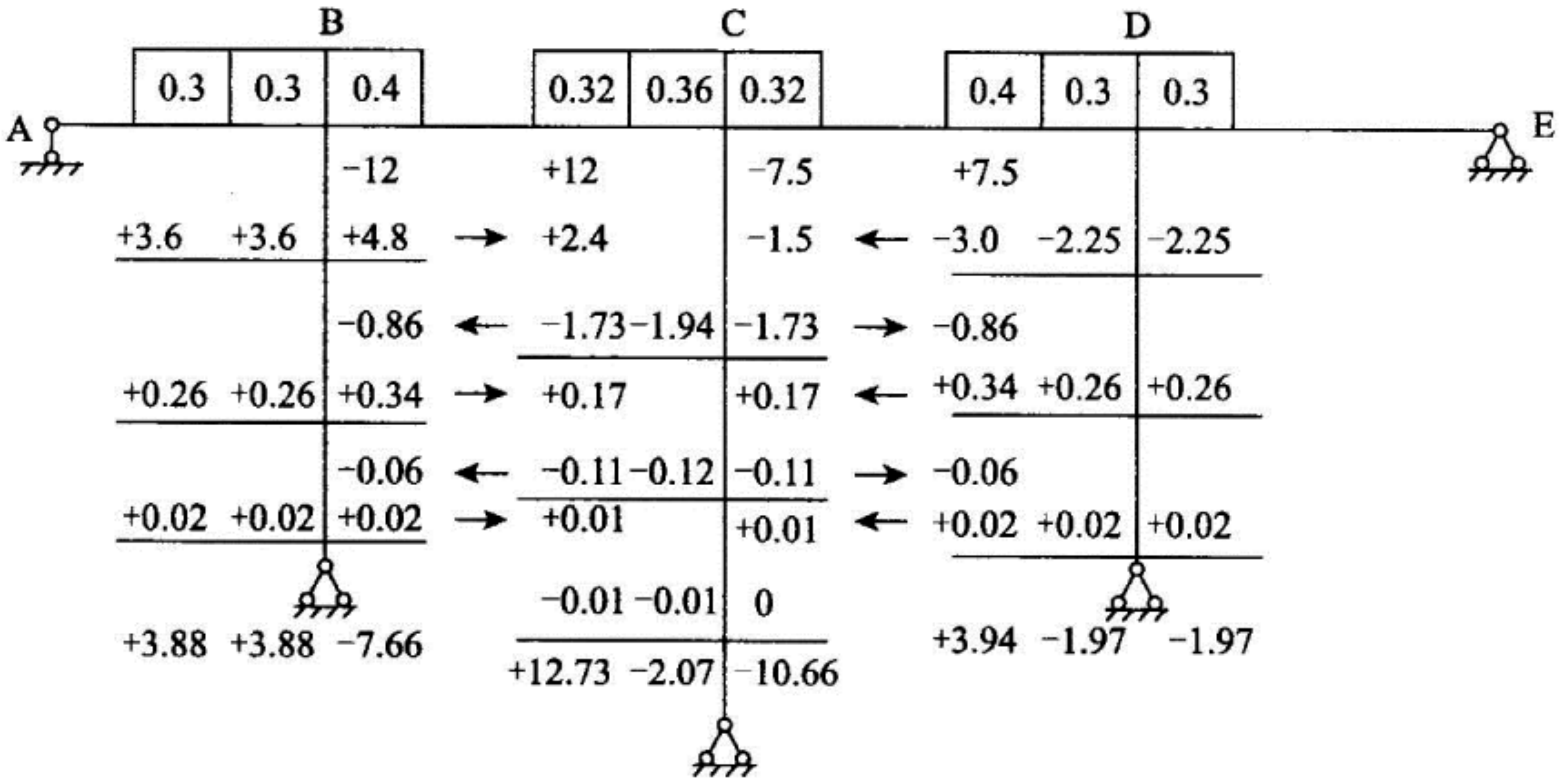


图 9-2-19

将上述算得的固端弯矩与分配弯矩叠加，即可得到最终弯矩 M 图，如图 9-2-20 所示。

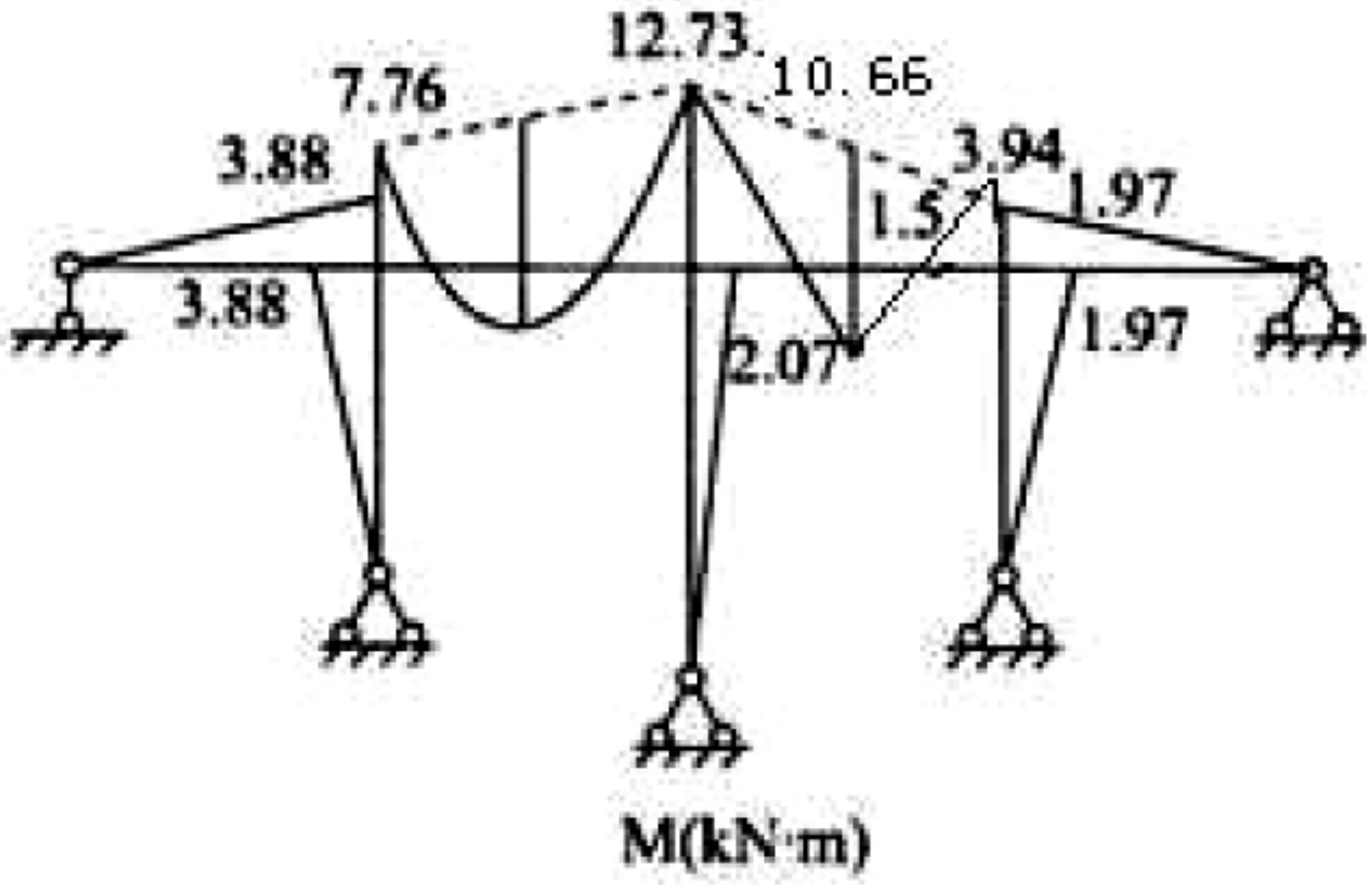


图 9-2-20

9-8 图示刚架支座 D 下沉了 $\Delta_D=0.08\text{m}$，支座 E 下沉了 $\Delta_E=0.05\text{m}$，并发生了顺时针方向的转角 $\varphi_E=0.01\text{rad}$。试计算由此引起的各杆端弯矩。已知各杆的 $EI=6\times10^4\text{kN}\cdot\text{m}^2$。

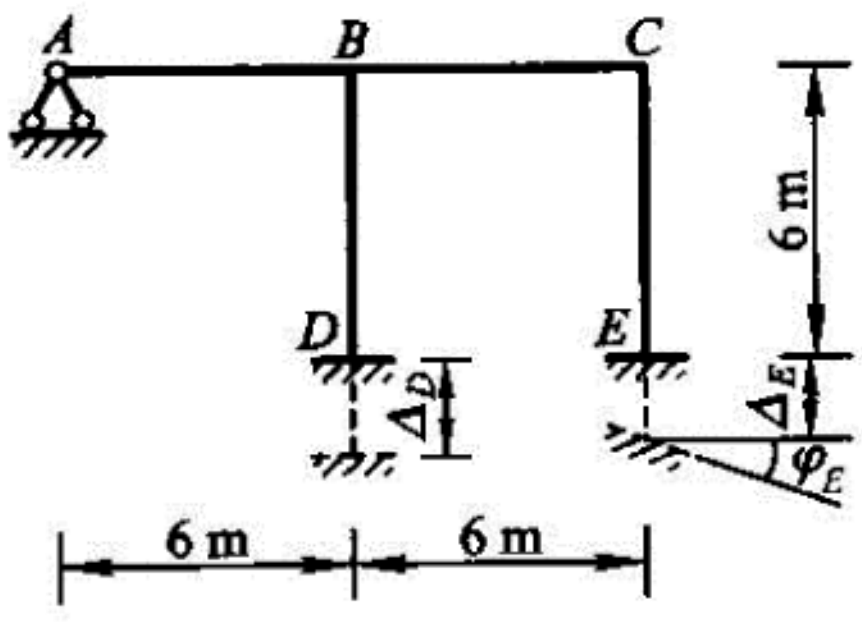


图 9-2-21（题 9-8）

解：由各杆端位移计算出各固端弯矩，计算出刚架分配系数及不平衡力矩，进行力矩的分配与传递，将 C 结点不平衡力矩反号并乘以分配系数即得各近端弯矩，再将其乘以传递系数即得远端弯矩。具体解算过程如图 9-2-22 所示。

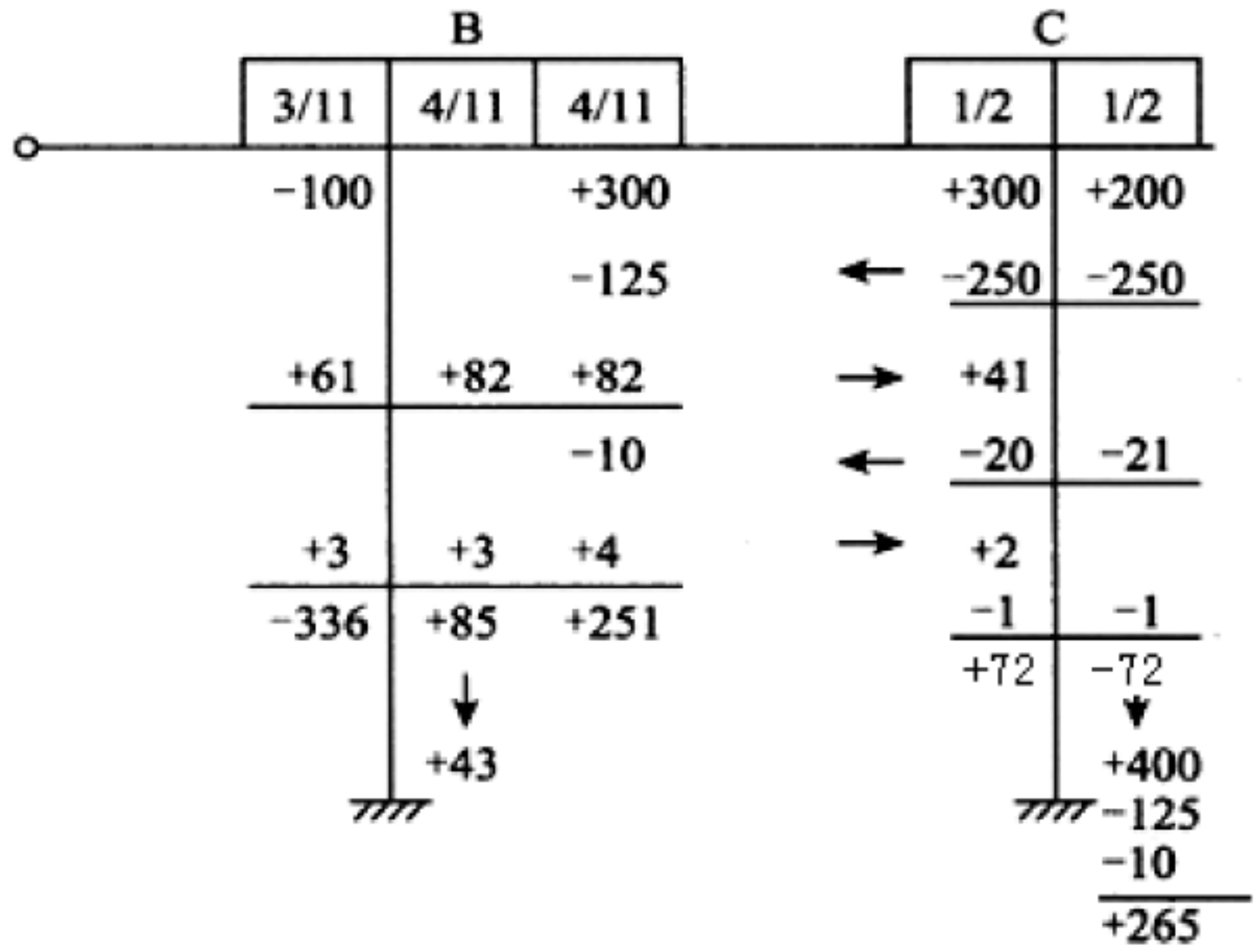


图 9-2-22

将上述求得的固端弯矩与分配弯矩叠加，即可得最终的弯矩 M 图，如图 9-2-23 所示。

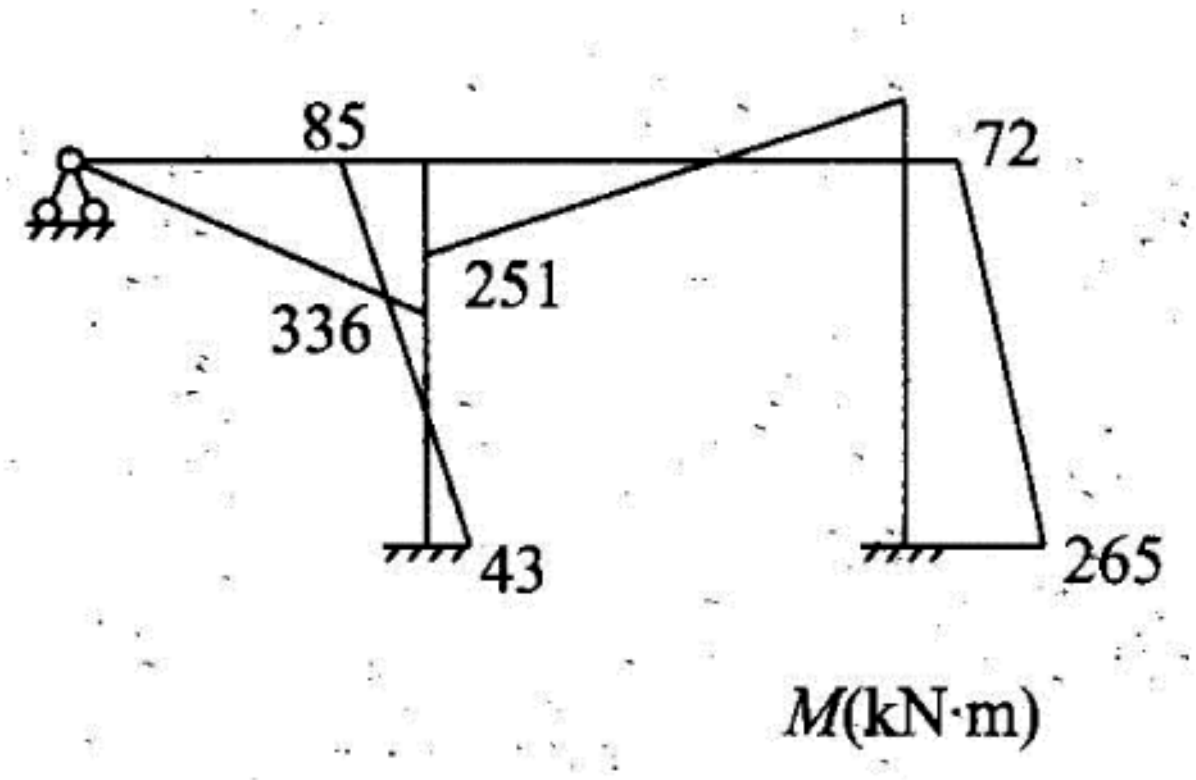


图 9-2-23

9-9　图示等截面连续梁 EI＝36000kN·m^2，若欲使梁中最大正、负弯矩的绝对值相等，应将 B、C 两支座同时升降若干?

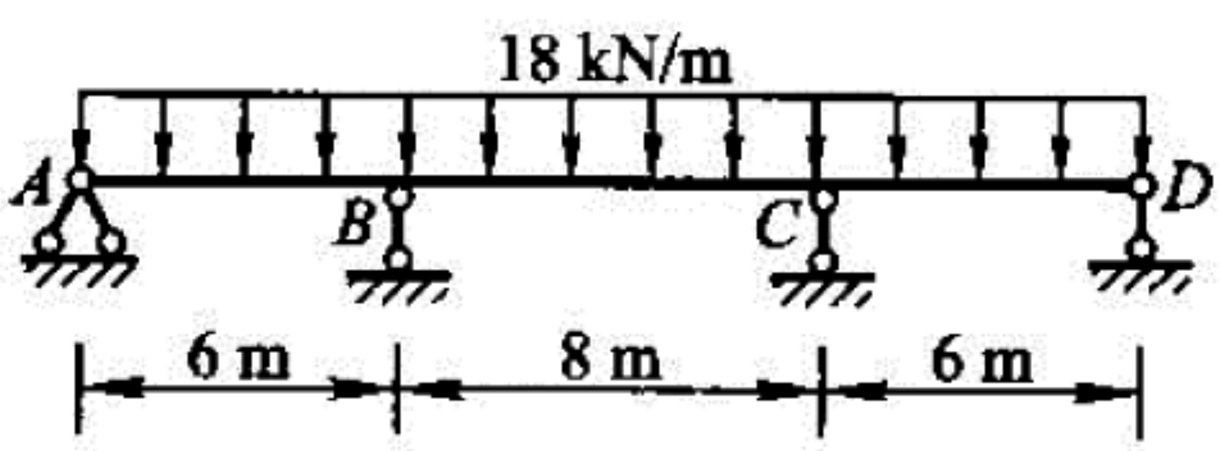


图 9-2-24（题 9-9）

解：最大负弯矩显然在 B、C 处。

若令 AD 跨中点 E 处弯矩与 B、C 相等，则有

$$M_E=\frac{144}{2}=72\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

此时的边跨中点的弯矩为 45kN·m，最大正弯矩为 45kN·m，最大正弯矩仅稍大于此，显然不会超过 72kN·m，故全梁最大正弯矩即在 E 处。弯矩图如图 9-2-25 所示，利用力矩分配法的计算过程如图 9-2-26 所示。

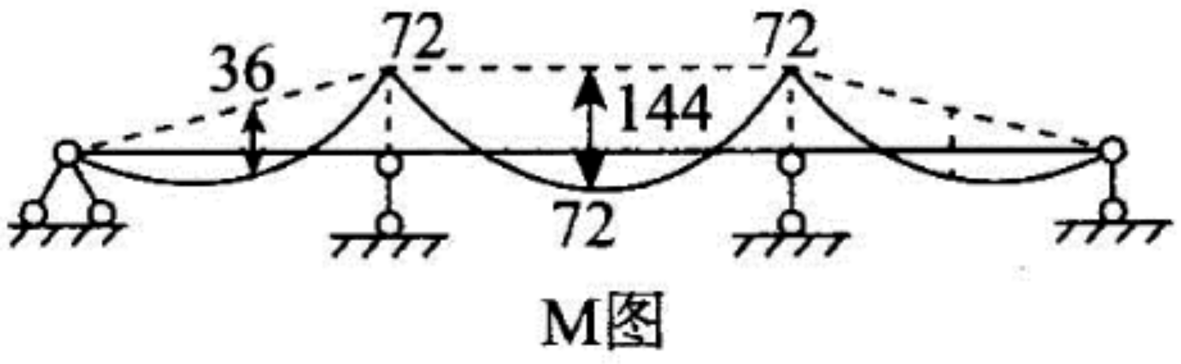
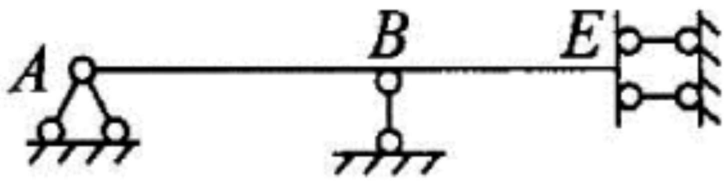


图 9-2-25



		2/3	1/3
荷载弯矩	M^F	+81	−96
	分配	+10	+5
	M_P	+91	−91
Δ=1时弯矩	M_Δ^F	$-\frac{3EI}{l^2}$	
	分配	$+\frac{2EI}{l^2}$	$+\frac{EI}{l^2}$
	M_Δ	$-\frac{EI}{l^2}$	$+\frac{EI}{l^2}$

图 9-2-26

由上述计算可得

$$M_{BA}=91-\frac{EI}{l^2}\Delta=72$$

解算得到支座 B、C 的沉降量如下

$$\Delta=\frac{l^2}{EI}(91-72)$$
$$=\frac{36}{36000}\times19=0.019\ \mathrm{m}\downarrow$$

9-10　试用无剪力分配法计算图示刚架，并绘制图。

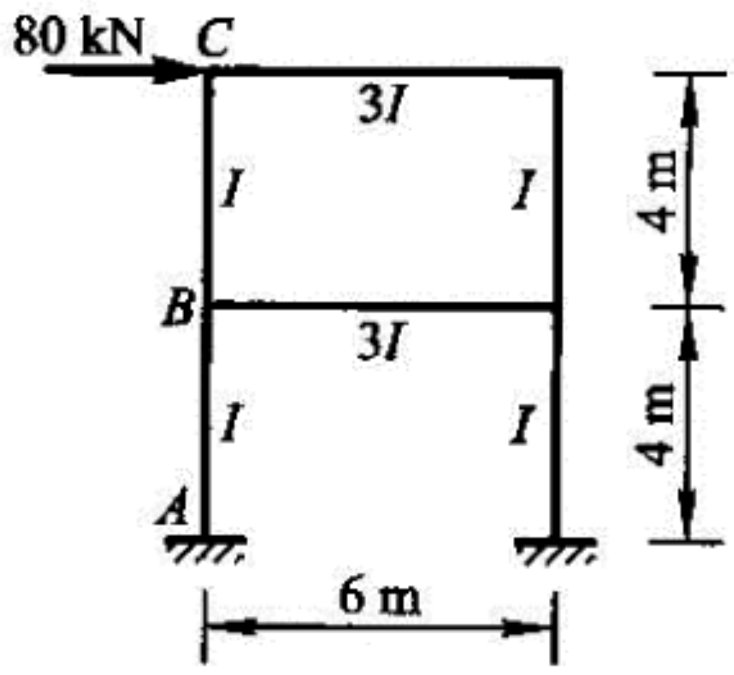


图 9-2-27（题 9-10）

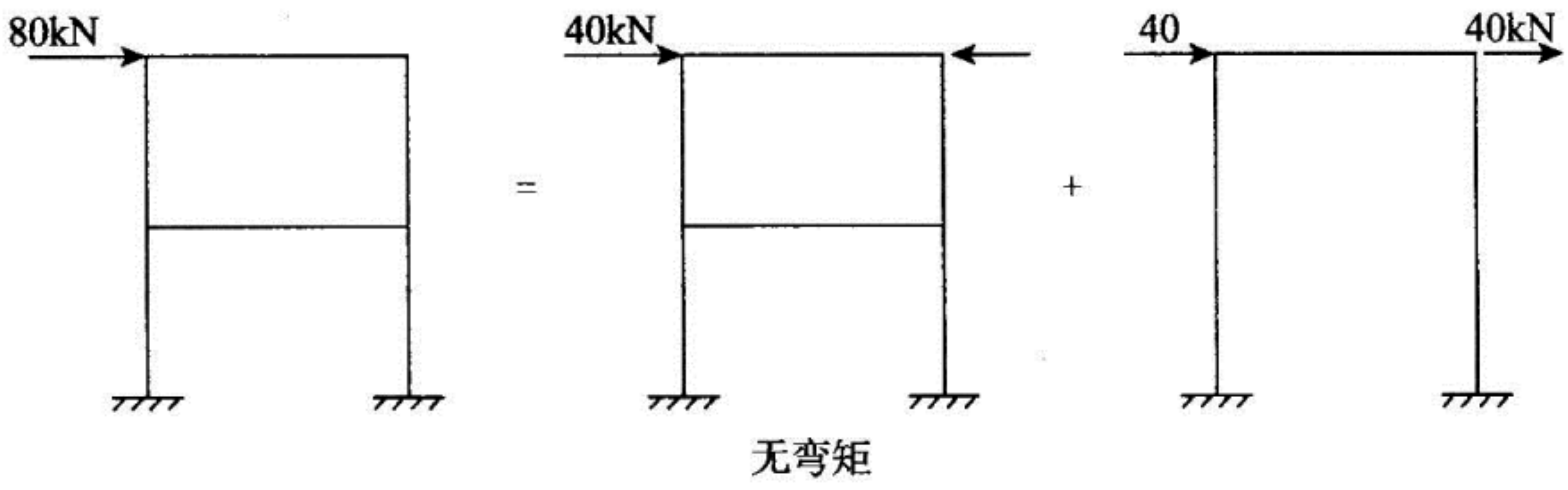


图 9-2-28

答：将图示荷载分解成正对称和反对称两组荷载，如图 9-2-28 所示，正对称荷载下无弯矩，只研究反对称荷载下的受力即可。

取一半结构进行分析，计算出刚架的杆端分配系数，计算分配系数时应注意各杆端的劲度系数等于其柱线刚度。再计算出各杆端弯矩，具体过程如图 9-2-29 所示。

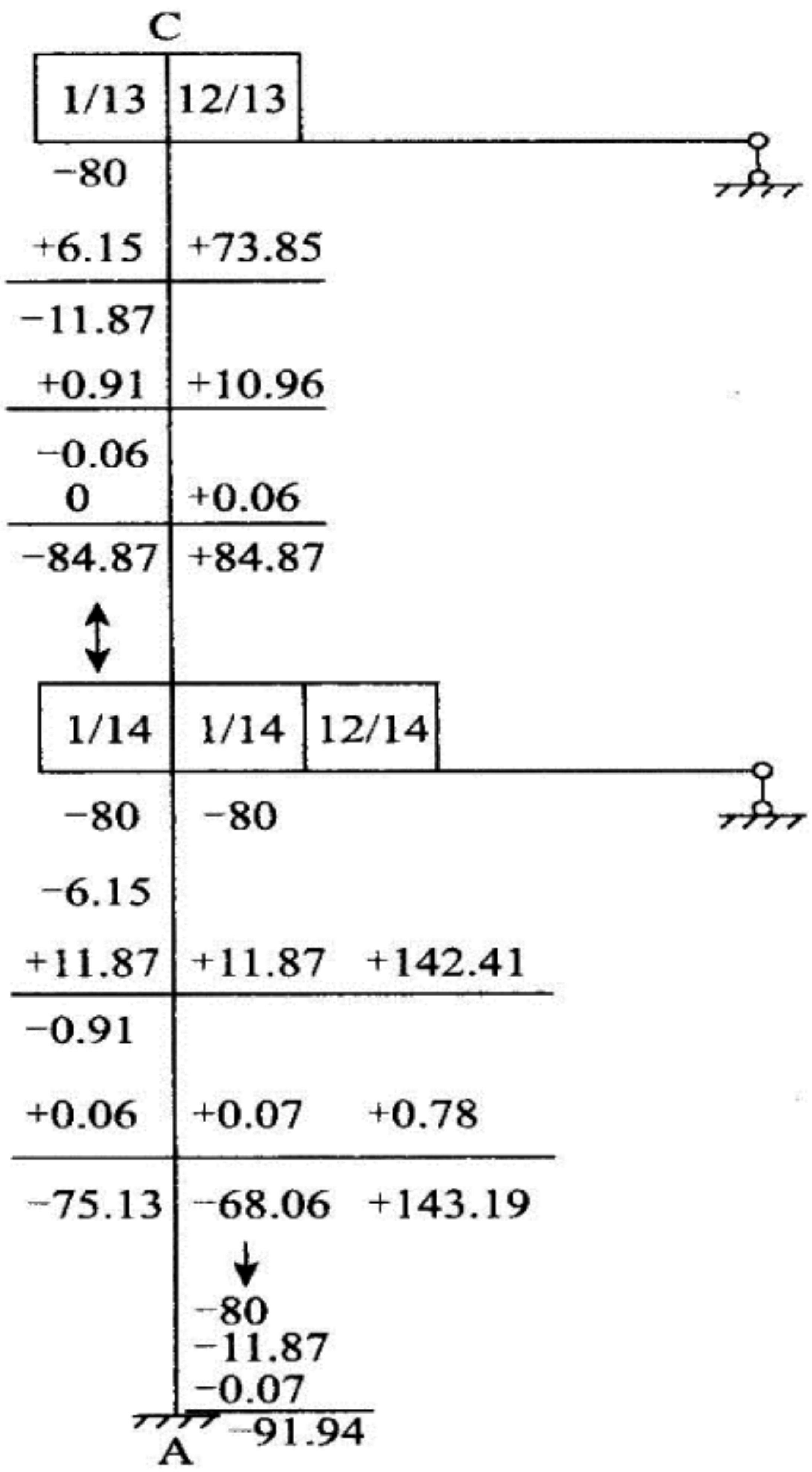


图 9-2-29

将上述算得的弯矩叠加得到最终弯矩 M 图，如图 9-2-30 所示。

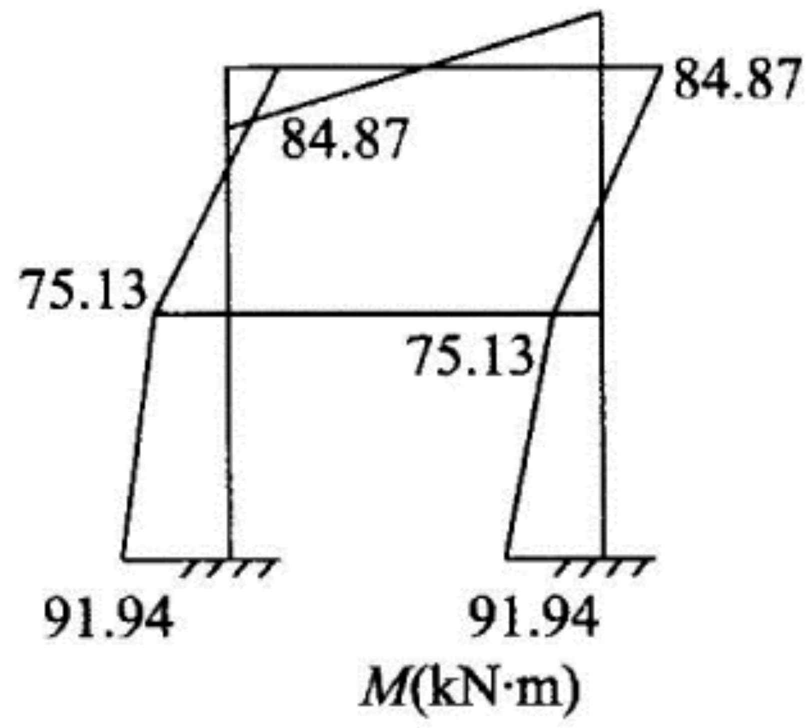


图 9-2-30

9-11　图示各结构哪些可以用无剪力分配法计算?对于图 f 若可用无剪力分配法计算则劲度系数 S_{AB} 应等于多少?

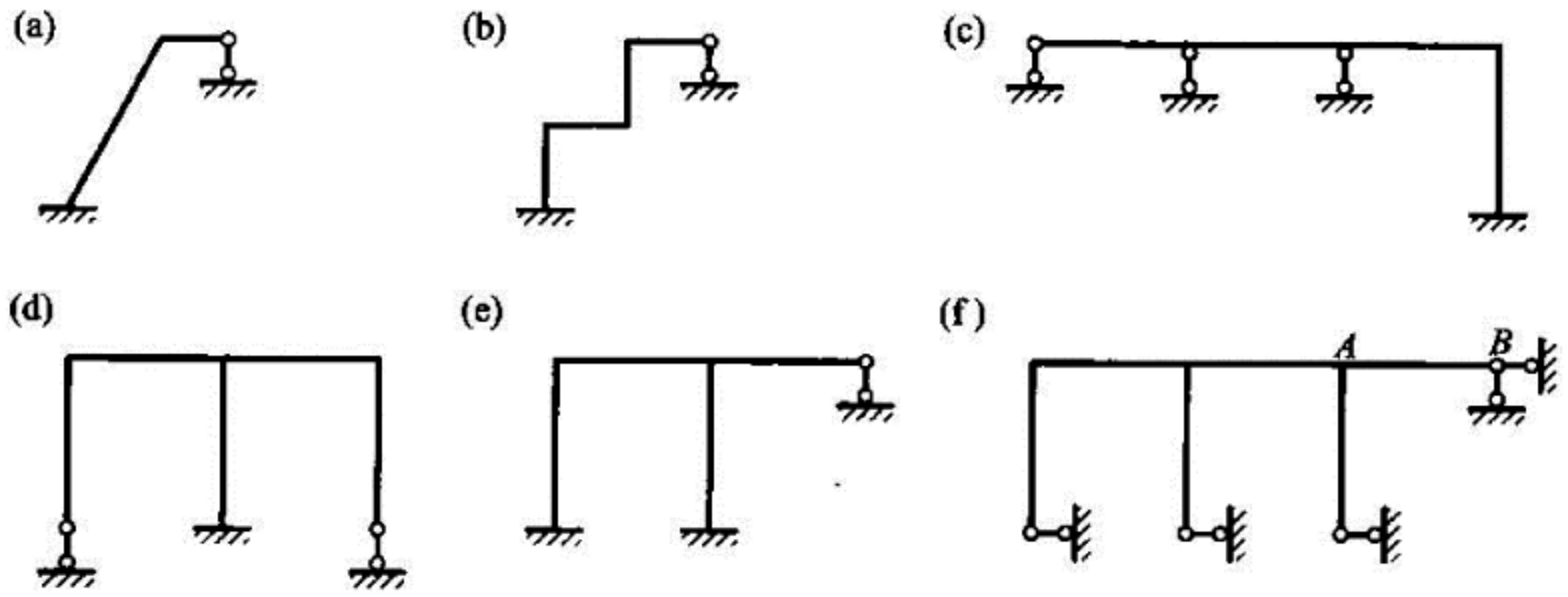


图 9-2-31（题 9-11）

答:（1）图中各结构可以用无剪力分配法计算的图有

由无剪力分配法定义和适用条件可知，图（c）、（d）、（f）可以用无剪力分配法计算，此三种图均为刚架的一部分杆件是无侧移杆，其余各杆为剪力静定杆。

（2）图 f 若可用无剪力分配法计算则劲度系数 S_{AB} 的大小

图（f）中 $S_{AB}=0$。求 AB 杆 A 端的转动刚度 S_{AB} 时，注意到 $Q_A=0$，由$\sum Y=0$，有 $Q_B=0$，而 B 端为铰支，于是全杆弯矩均为（有受力）0，故 $S_{AB}=0$，如图 9-2-32 所示。

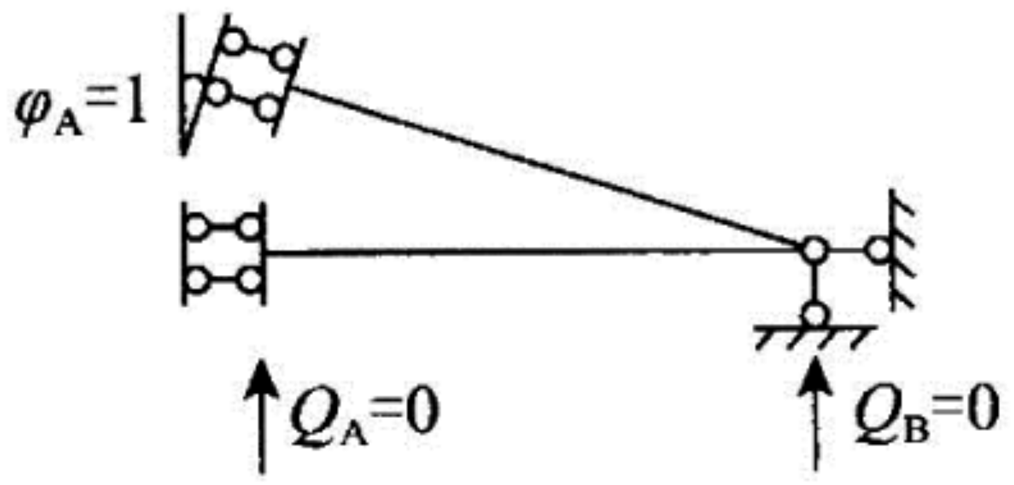


图 9-2-32

9-12　试计算图示空腹梁弯矩，并绘 M 图．EI＝常数。（提示：除利用对水平轴的对称性外，还可利用对竖直轴的对称性以进一步简化计算。）

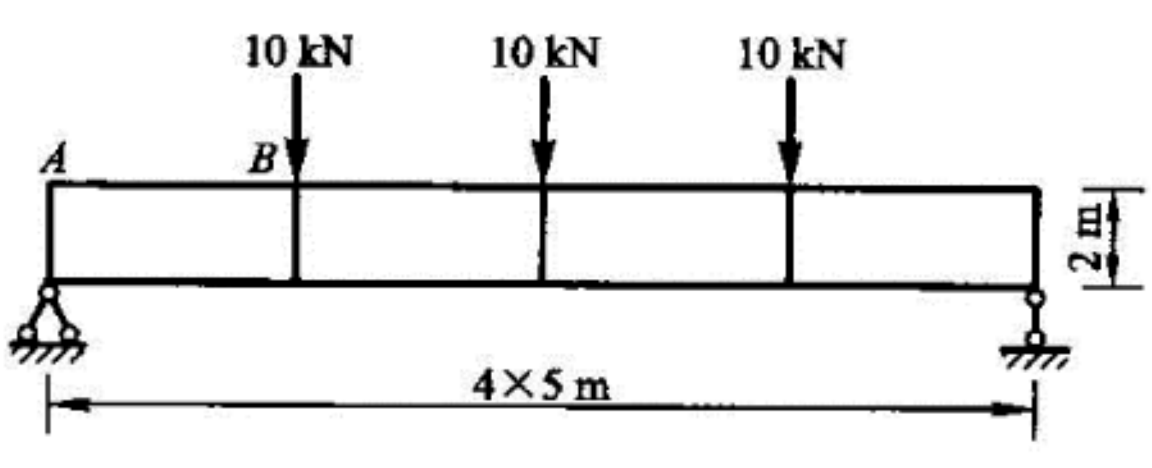


图 9-2-32（题 9-12）

解：本题图示为左右正对称，上下反对称，取 1 / 4 结构，如图 9-2-33 所示。

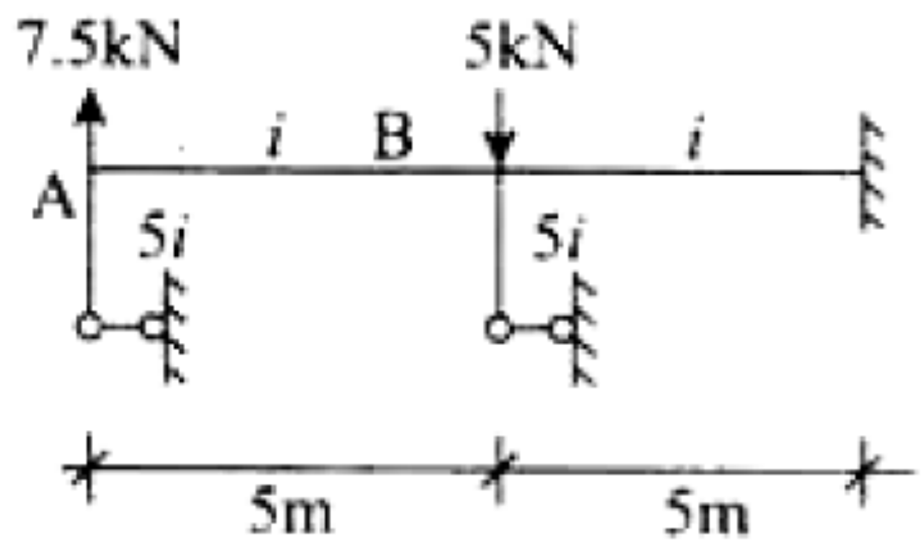


图 9-2-33

计算出杆端分配系数，再计算出杆端弯矩进行无剪力分配，如图 9-2-34 所示。

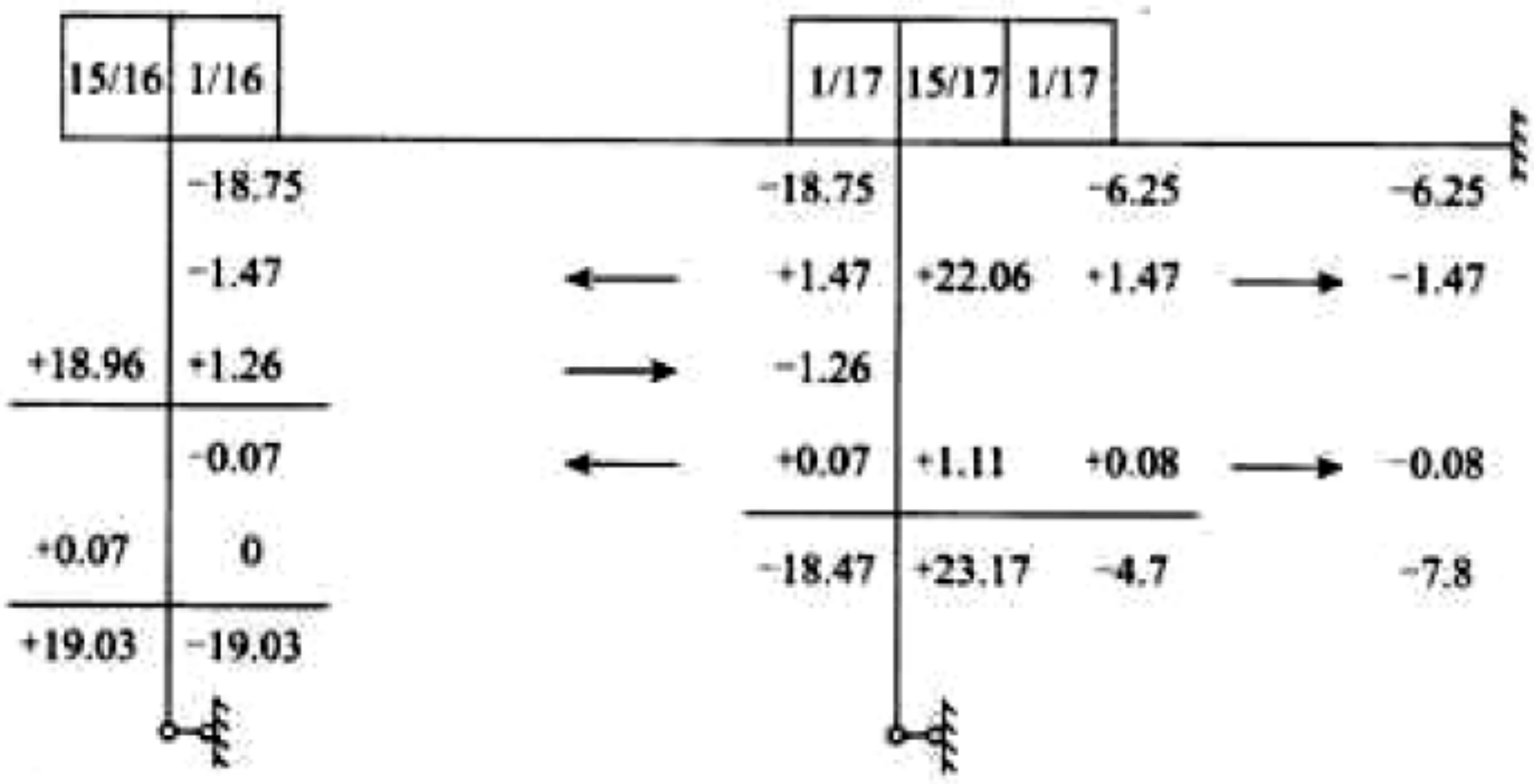


图 9-2-34

将上述计算的弯矩最终结果写出，利用对称性可得到最终弯矩图 M，如图 9-2-35 所示。

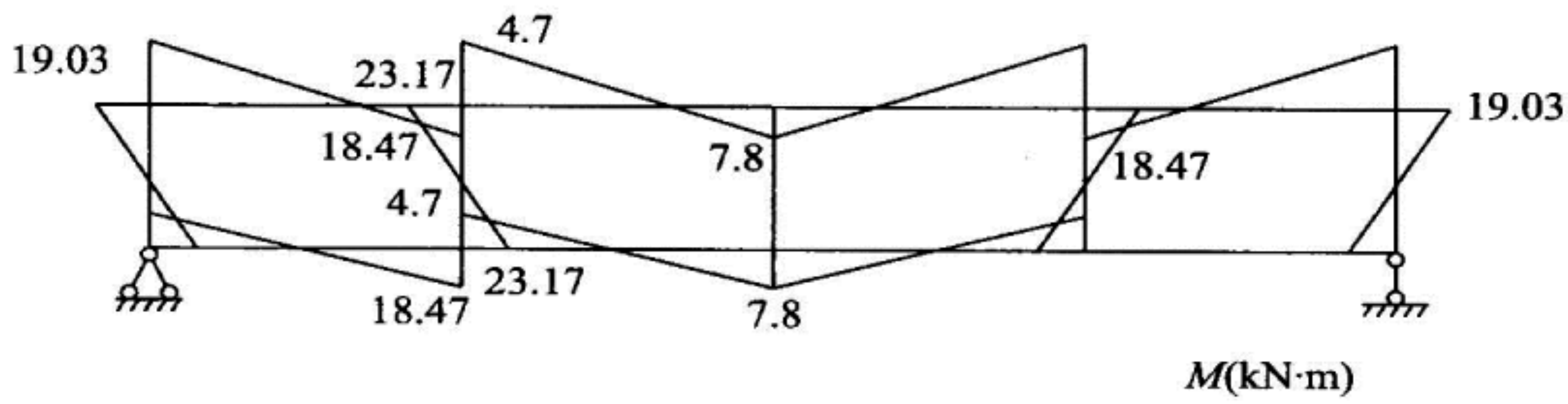


图 9-2-35

9-13　试计算图示空腹梁弯矩，并绘 M 图．EI＝常数。（提示：除利用对水平轴的对称性外，还可利用对竖直轴的对称性以进一步简化计算。）

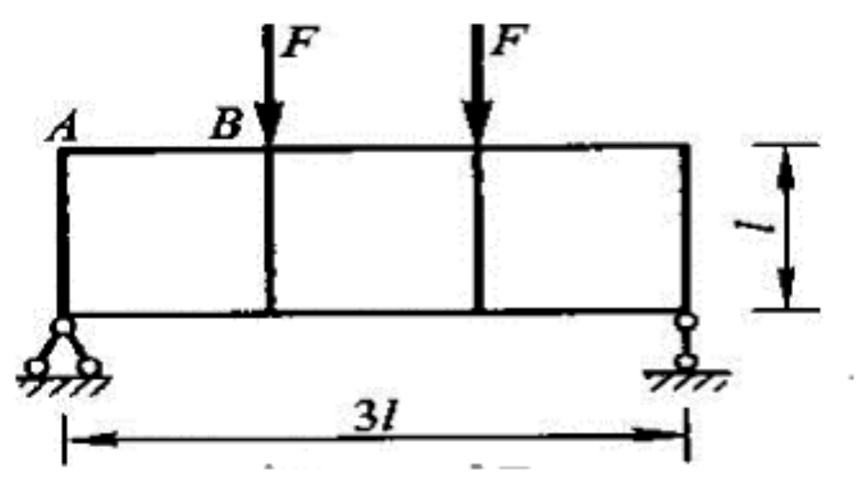


图 9-2-36（题 9-13）

解：本题左右正对称，上下反对称，取 1 / 4 结构，如图 9-2-37 所示。

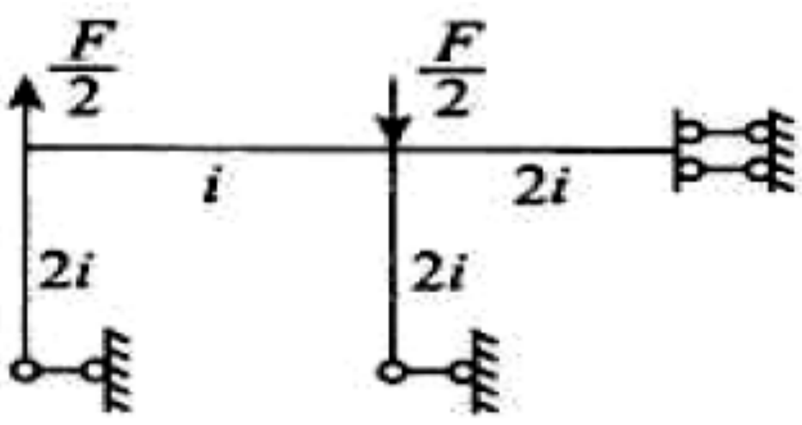


图 9-2-37

计算出各杆端的杆端分配系数以及固端弯矩，进行弯矩分配，如图 **9-2-38** 所示。

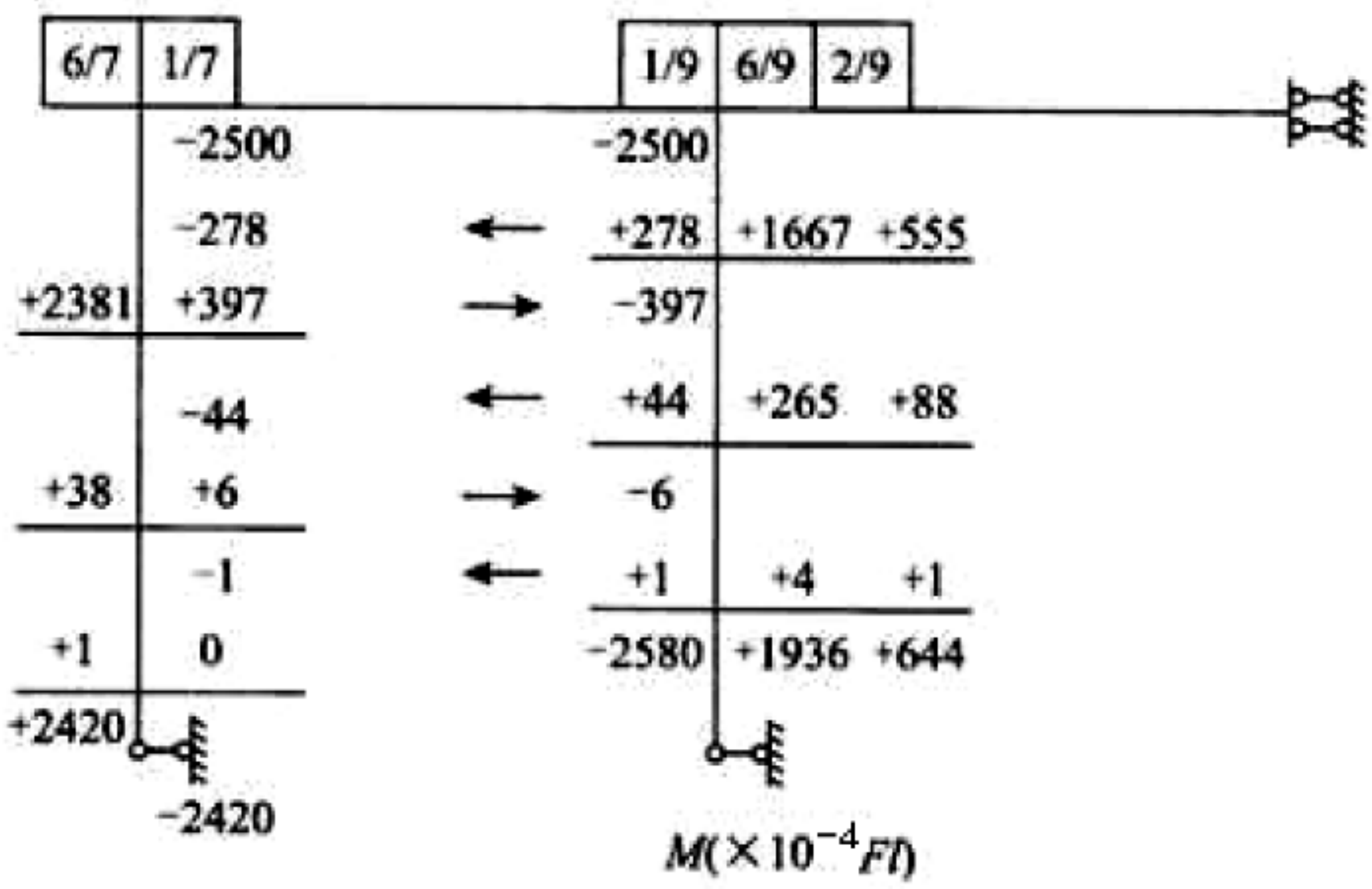


图 **9-2-38**

将上述计算的弯矩最终结果写出，利用对称性可得到最终弯矩图 **M**，如图 **9-2-39** 所示。

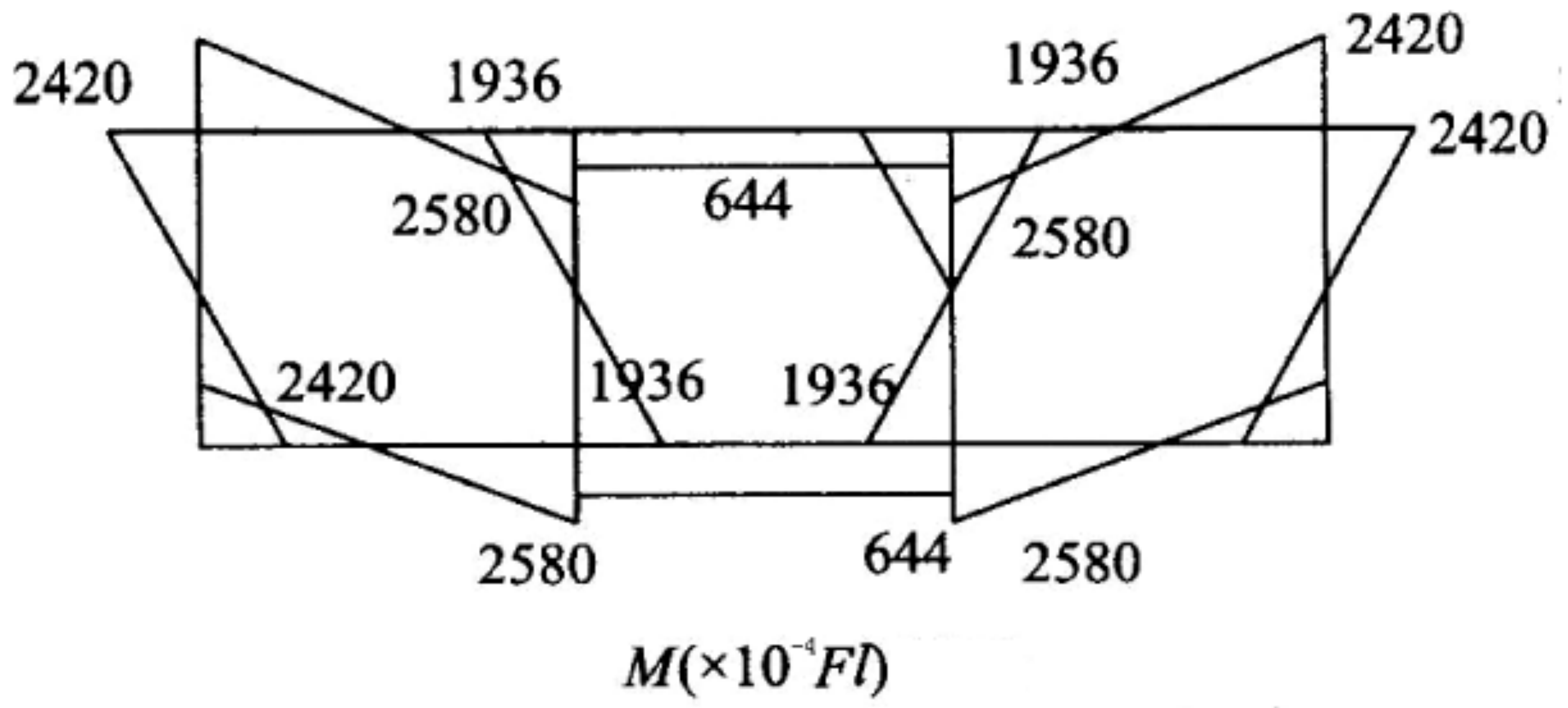


图 **9-2-39**

9-14　试计算图示空腹梁弯矩，并绘 **M** 图．**EI**＝常数。（提示：除利用对水平轴的对称性外，还可利用对竖直轴的对称性以进一步简化计算。）

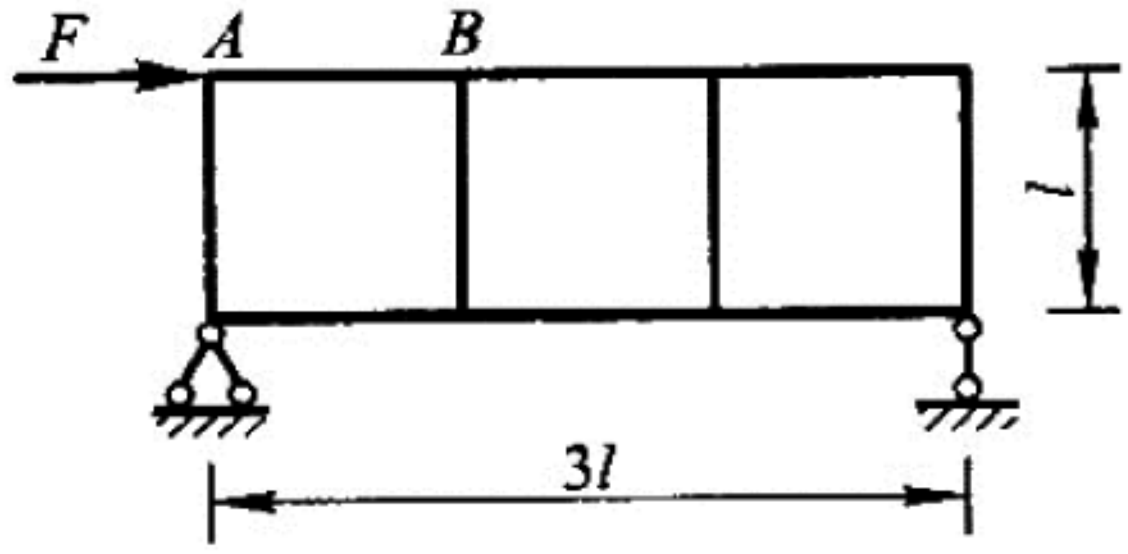


图 **9-2-39**（题 **9-14**）

解：本题上下、左右均为反对称结构，取 **1 / 4** 结构，如图 **9-2-40** 所示。

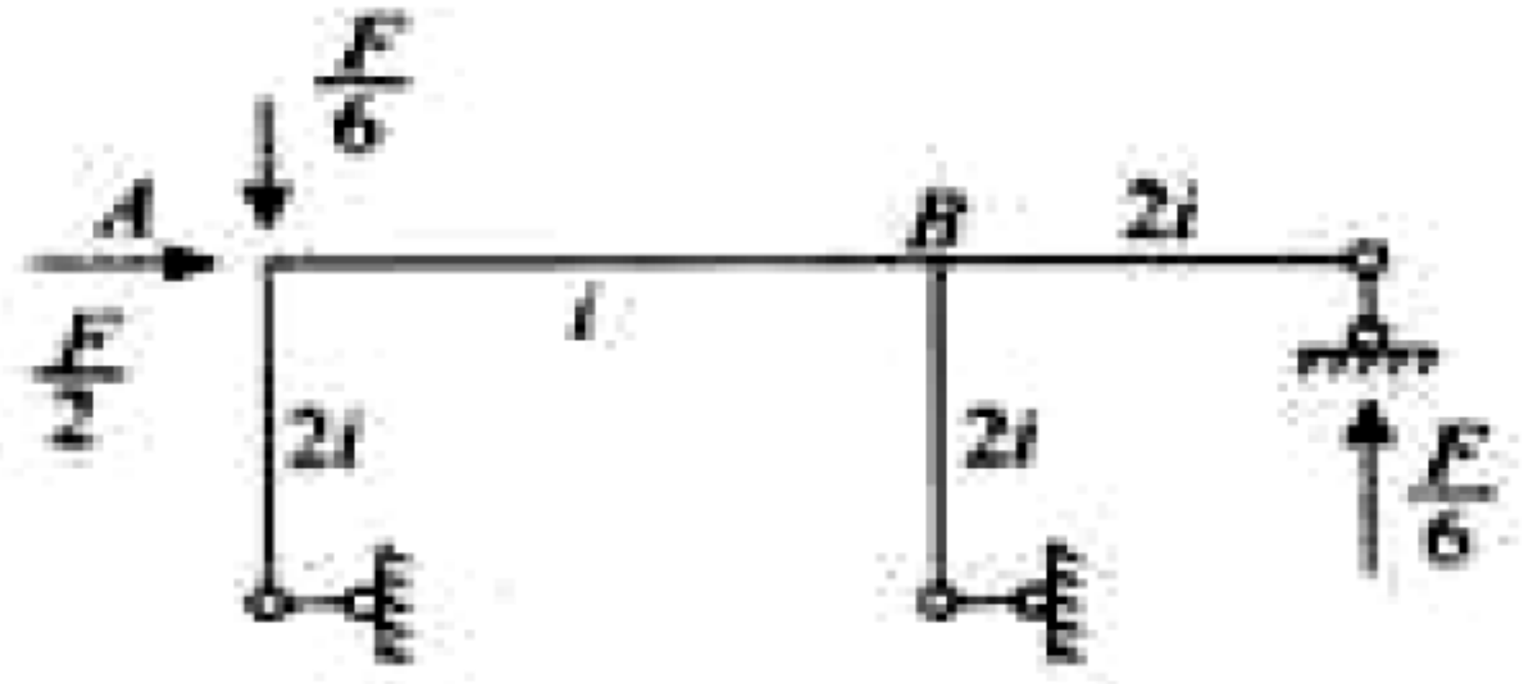


图 9-2-40

计算出杆端弯矩系数及固端弯矩并分配，如图 9-2-41 所示。

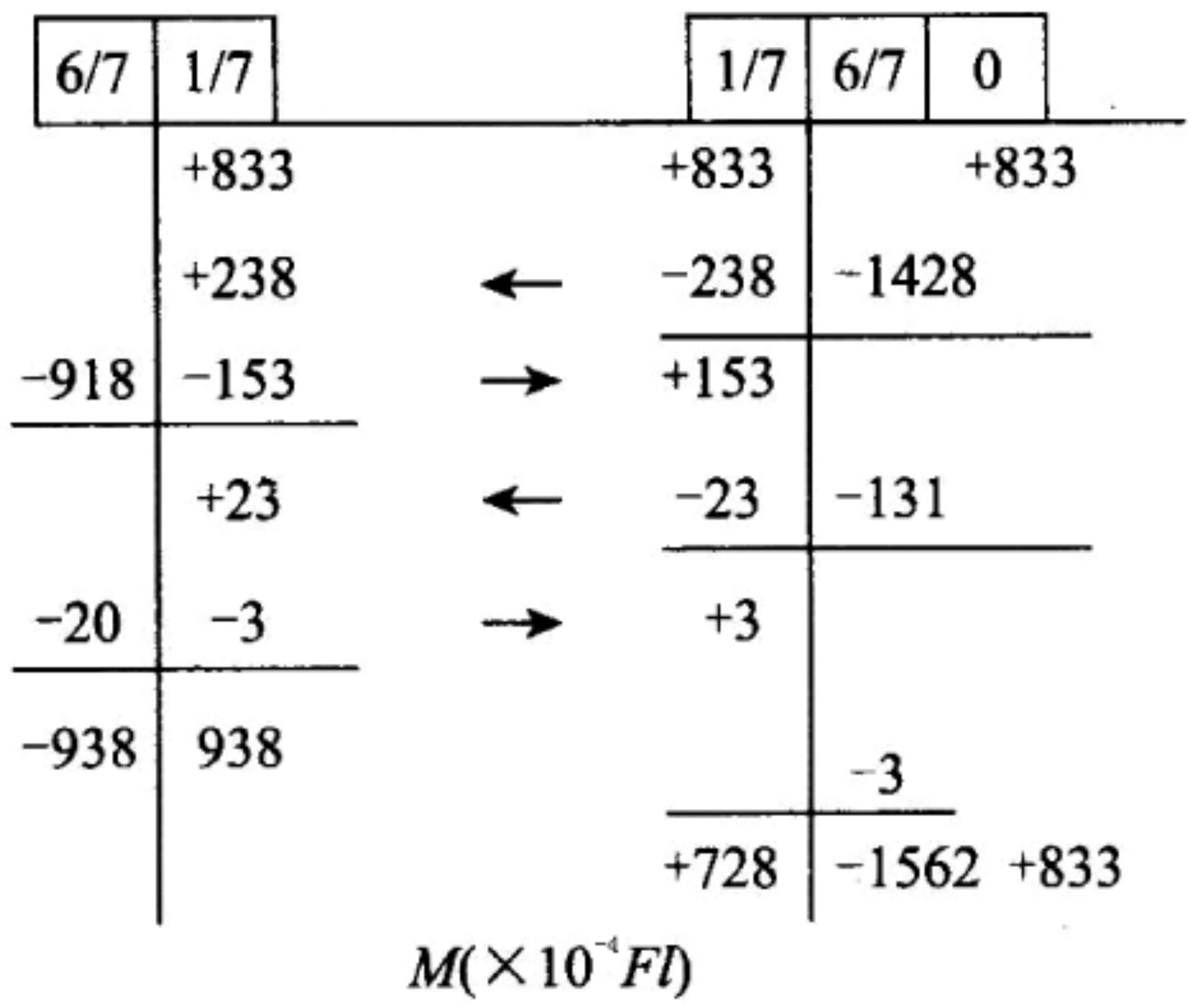


图 9-2-41

将上述计算的弯矩最终结果写出，利用对称性可得到最终弯矩图 M，如图 9-2-42 所示。

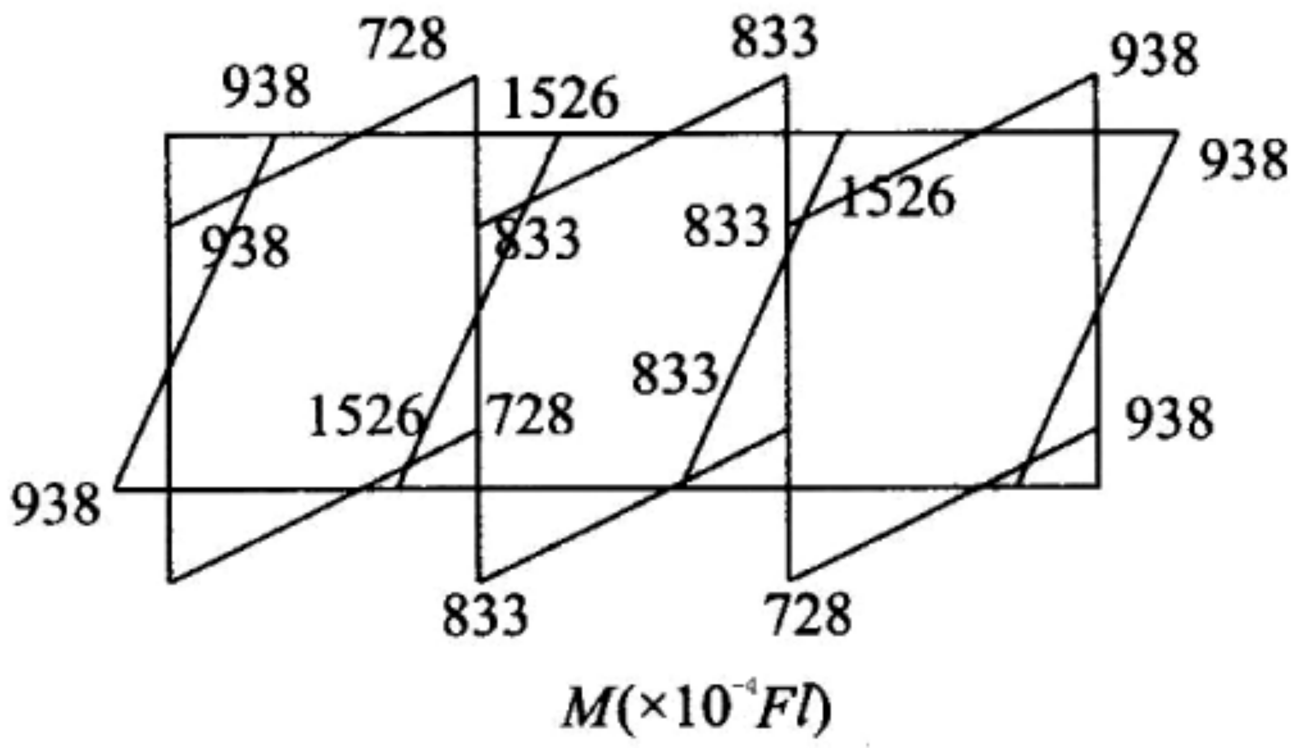


图 9-2-42

9-15　试用剪力分配法计算第八章习题 8-8 所示结构，如图 9-2-43 所示。

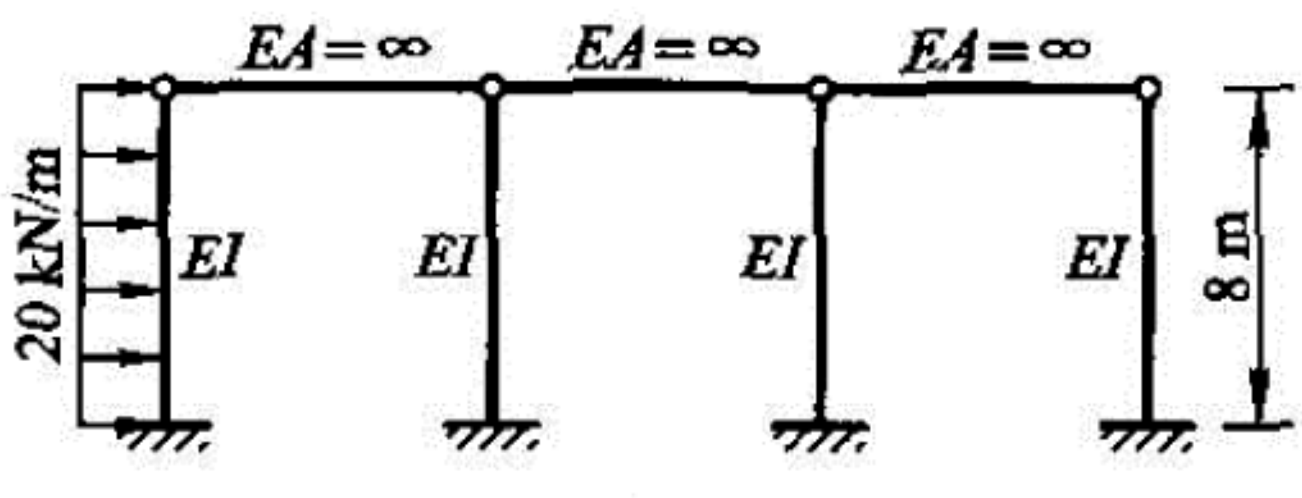


图 9-2-43

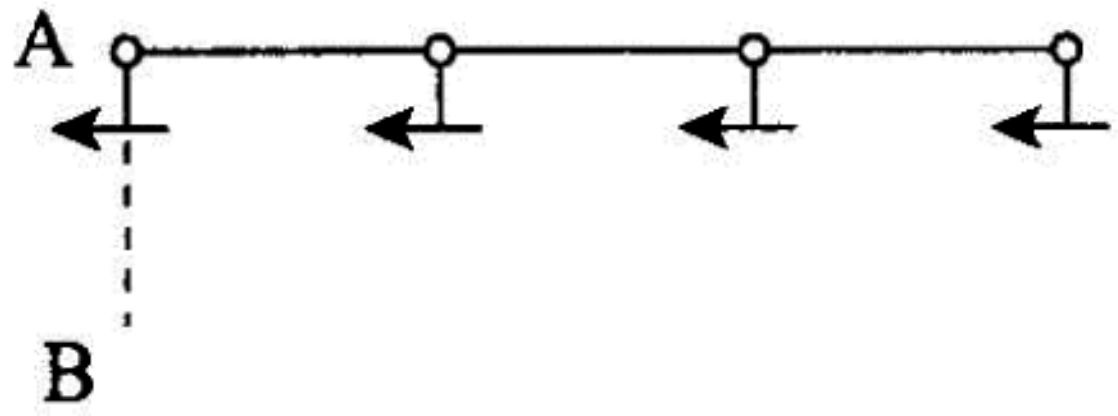


图 9-2-44

解：易知左侧第一根柱子底部剪力 F_{SAB} 的大小如下

$$F_{SAB}=\frac{3}{8}ql=\frac{3}{8}\times20\times8=60\ \text{kN}$$

各杆杆端剪力分配系数为

$$v_1=v_2=v_3=v_4=\frac{1}{4}$$

杆端剪力示意图如图 9-2-44 所示，其大小为

$$F_{S12}=v_1F=\frac{1}{4}\times60=15\ \text{kN}$$

可算得柱底部弯矩为

$$M_{12}=15\times8=120\text{kN·m}$$

易作出结构弯矩 M 图，如图 9-2-45 所示。

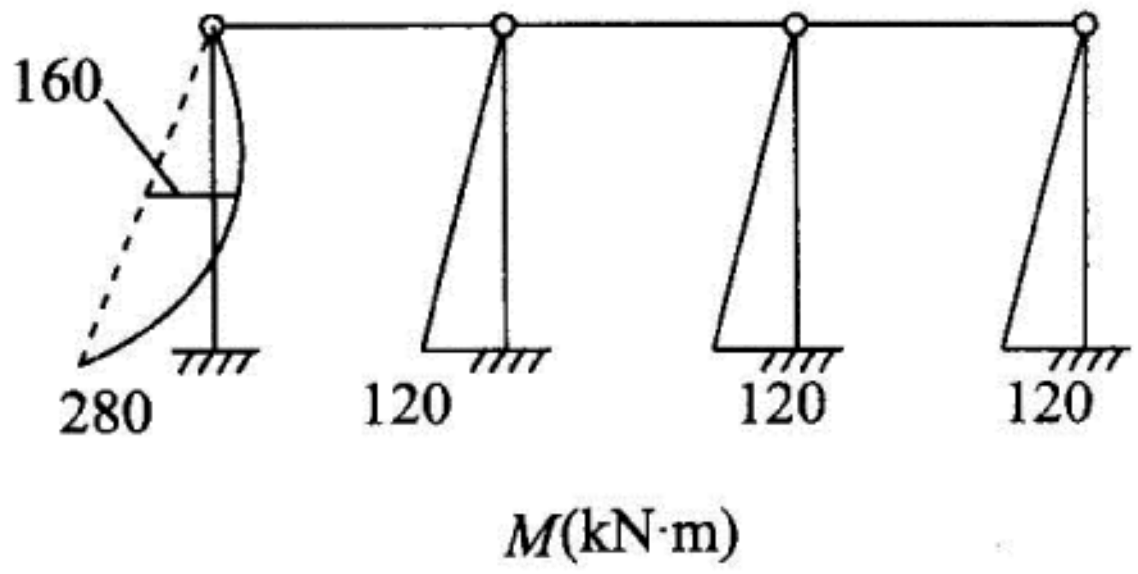


图 9-2-45

9-16　试用剪力分配法计算第八章习题 8-9 所示结构，如图 9-2-46 所示。

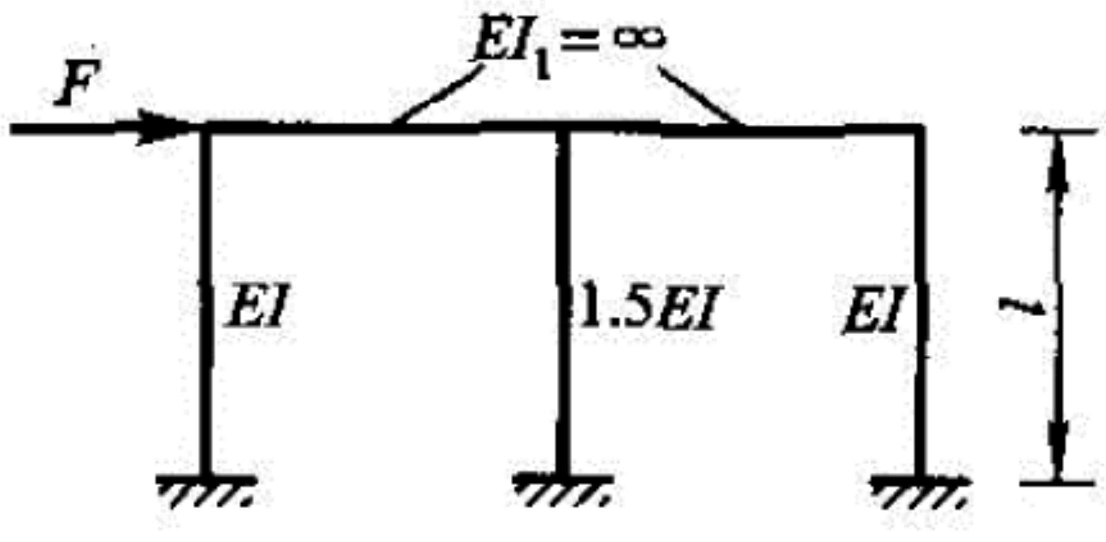


图 9-2-46

解：先计算出各柱的抗侧移刚度 D_i，再进一步计算出剪力分配系数 v_i，如下

$$D_1=D_3=\frac{12EI}{h^3},D_2=\frac{12E\cdot1.5I}{h^3}=\frac{18EI}{h^3}$$

$$v_1=v_3=\frac{12}{12+18+12}=\frac{2}{7},v_2=\frac{3}{7}$$

可计算出杆端力

$$F_{S1}=F_{S3}=\frac{2}{7}F,F_{S2}=\frac{9}{21}F=\frac{3}{7}F$$

易知反弯点在中点，可快速画出该结构的弯矩 M 图，如图 9-2-47 所示。

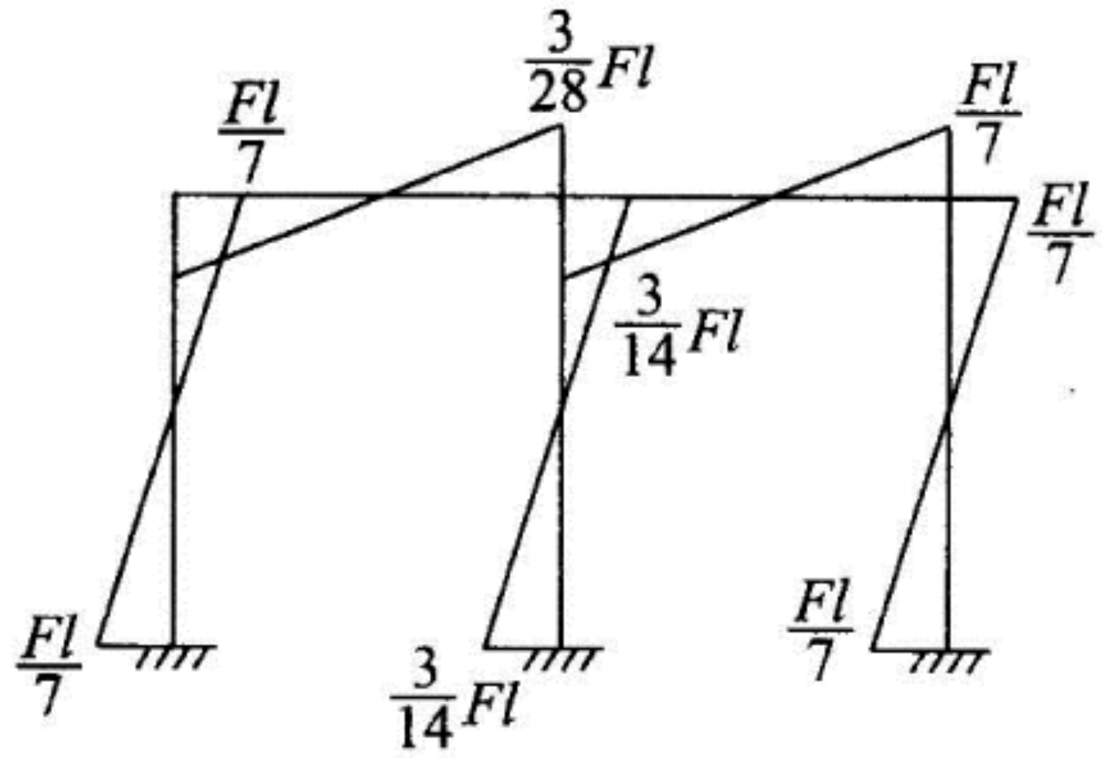


图 9-2-47

9-17 试用最简捷的方法（甚至心算）绘出图示各结构的弯矩图。除注明者外，各杆的 EI、l 均相同。

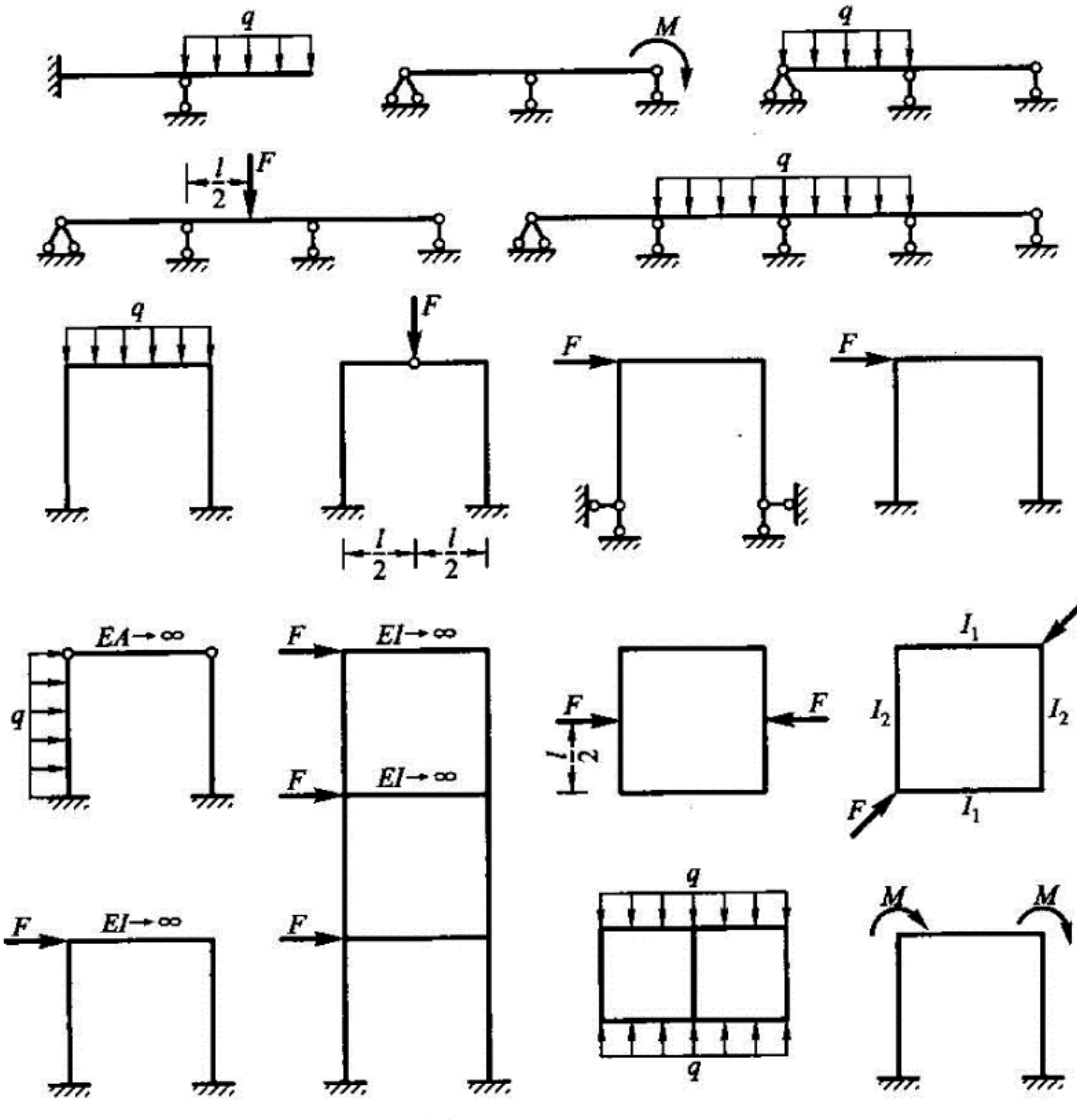


图 9-2-48（题 9-17）

解：以上各结构的弯矩 M 图，如图 9-2-49 所示。

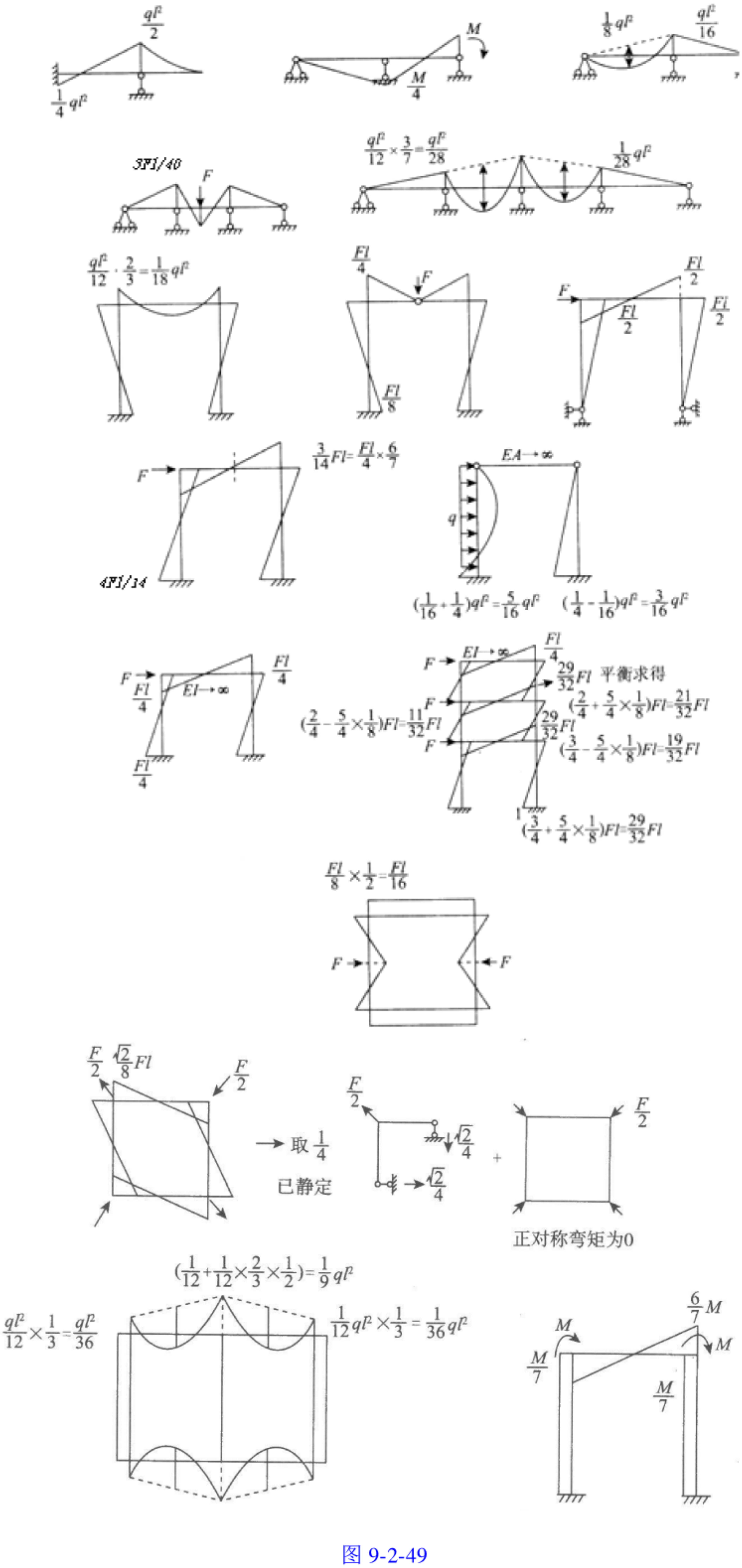


图 9-2-49

9.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 9-3-1 所示结构的杆端弯矩 M_{BA} =_______，杆端剪力 F_{QBA} =_______。[哈尔滨工业大学 2007 研]

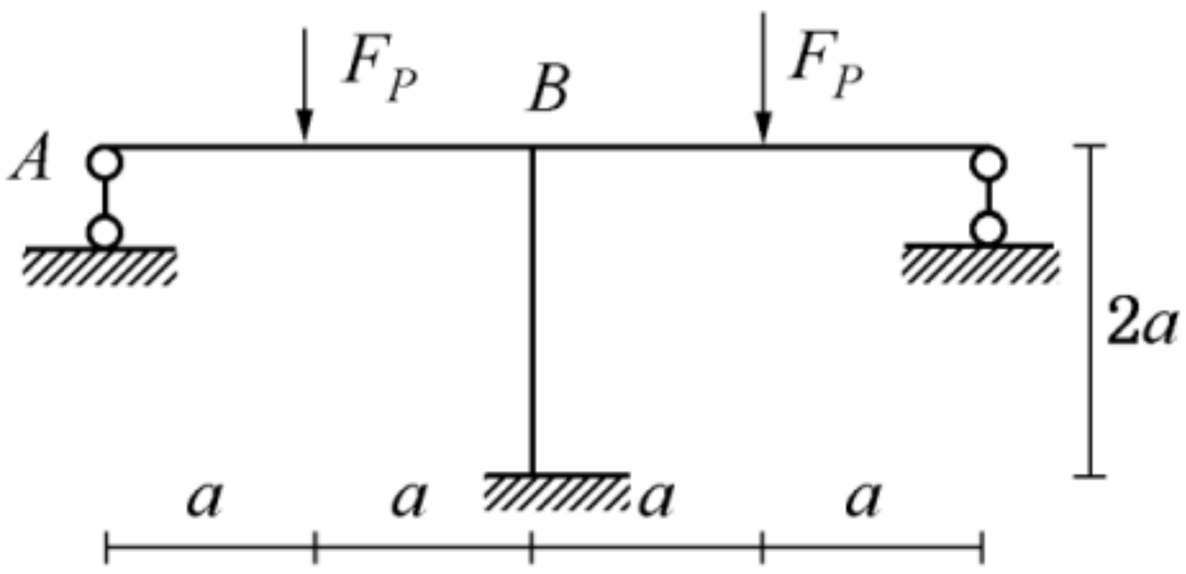


图 9-3-1

【答案】$\frac{3}{16}F_P \cdot 2a$；$-\frac{11}{16}F_P$

【解析】正对称的结构上作用正对称的荷载，取一半结构进行研究，作出对应的弯矩图，如图 9-3-2（a）所示，根据对称性的特点进一步作出整个结构的弯矩图 9-3-2（b）。可得到 $M_{BA}=\frac{3}{16}F_P \cdot 2a$，$F_{QBA}=-\frac{11}{16}F_P$。

2．图 9-3-3 所示结构各杆 EI=常数，q=20kN/m。采用力矩分配法计算（忽略轴向变形），则 AD 杆的分配 h 系数 μ_{AD} =_______，B 端弯矩 M_{BA}=_______kN・m。[浙江大学 2007 研]

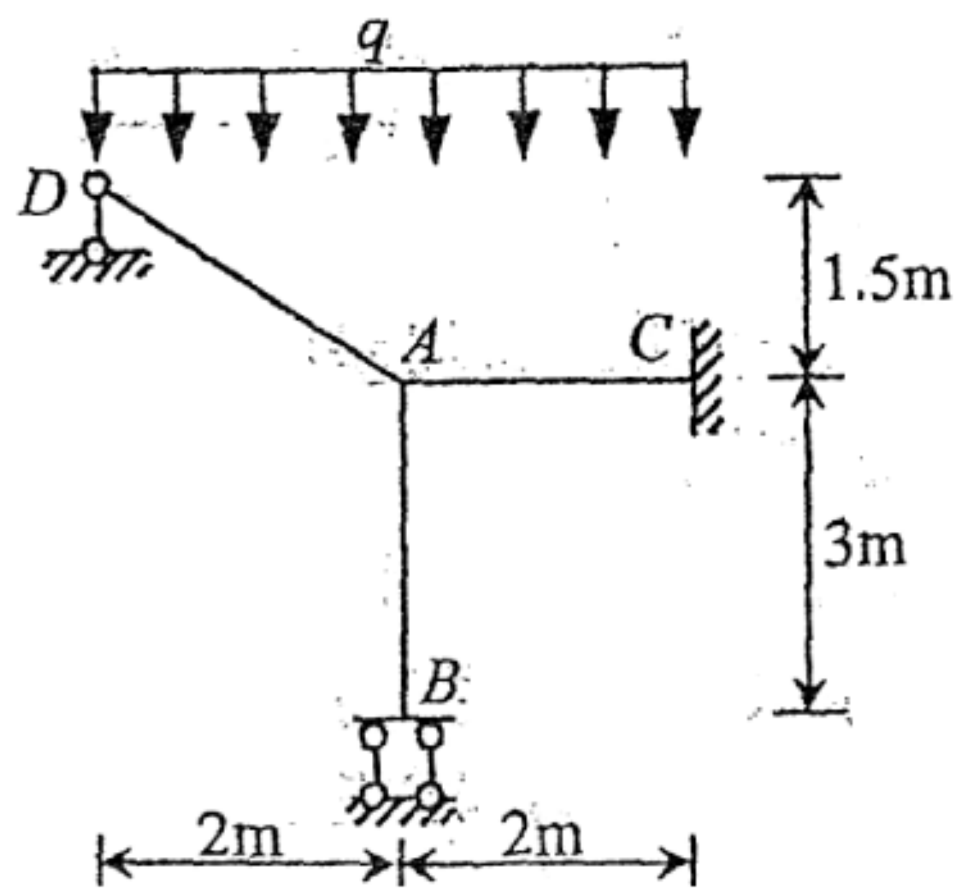


图 9-3-3

【答案】$\frac{18}{53}$；$\frac{50}{159}$

【解析】先计算分配系数，D 点固定铰支座，C 点固定支座，B 点滑动铰支座，各杆的线刚度 i 分别为：$i_{AD}=\frac{EI}{2.5}$，$i_{AC}=\frac{EI}{2}$，$i_{AB}=\frac{EI}{3}$；对于结点 A 各杆转动刚度为：$S_{AD}=\frac{EI}{2.5}\times 3=\frac{6}{5}EI$，$S_{AC}=\frac{EI}{2}\times 4=2EI$，$S_{AB}=\frac{EI}{3}\times 1=\frac{1}{3}EI$。所以 AD 杆的分配系数：$\mu_{AD}=\frac{6/5}{6/5+2+1/3}=\frac{18}{53}$。A 结点处的不平衡力矩计算结果为：$M=\frac{1}{8}ql^2-\frac{1}{12}ql^2=\frac{1}{8}\times 20\times 4-\frac{1}{12}\times 20\times 4=\frac{10}{3}$，故 $M_{AB}=\frac{10}{3}\times\frac{1/3}{6/5+2+1/3}=\frac{50}{159}$，即

$M_{BA}=-M_{AB}=-\frac{50}{159}$。

3．图 9-3-4 所示结构各杆线刚度 i=常数，若采用力矩分配法计算（忽略轴向变形），则 AD 杆的近端分配系数为_______。[西南交通大学 2006 研]

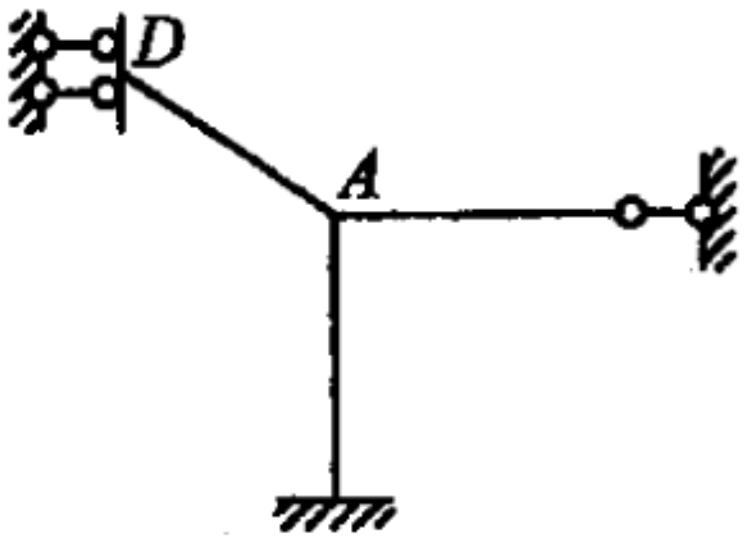


图 9-3-4

【答案】1/2

【解析】A 结点右边的水平杆不考虑弯矩分配，D 端由于是斜梁的端部，不考虑轴向变形，所以不能上下滑动，看作固定端。则 AD 杆的近端分配系数为：$\mu_{AD}=\dfrac{4i}{4i+4i}=\dfrac{1}{2}$。

4．图 9-3-5 所示刚架，各线刚度相同，用力矩分配法计算时，分配系数 $\mu_{12}=$_______，$\mu_{23}=$_______，$\mu_{24}=$_______。[中南大学 2005 研]

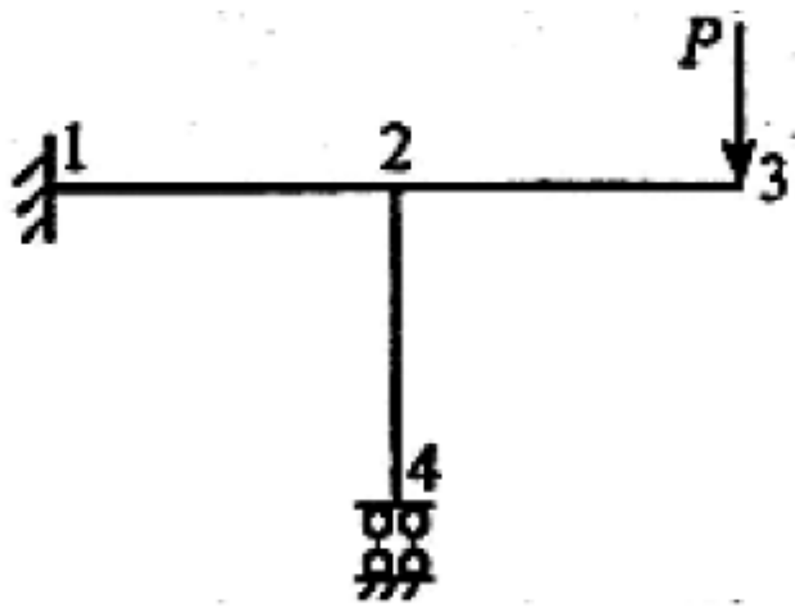


图 9-3-5

【答案】4/5；0；1/5

【解析】23 梁端为悬臂梁端，是静定的，可直接作出弯矩图，故不考虑其端部的弯矩分配，即 $\mu_{23}=0$；1 端是固定端，4 端是滑动支座。所以 $\mu_{12}=\dfrac{4i}{4i+i}=\dfrac{4}{5}$，$\mu_{24}=\dfrac{i}{4i+i}=\dfrac{1}{5}$。

二、选择题

1．用力矩分配法解图 9-3-6 所示结构内力时，若不考虑支座到自由结点的传递，则传递系数等于 0，-1，和 1/2 的杆件个数分别为（　　）。[国防科技大学 2006 研]

A.3,2,2　　B.1,2,4

C.2,1,4　　D.3,1,3

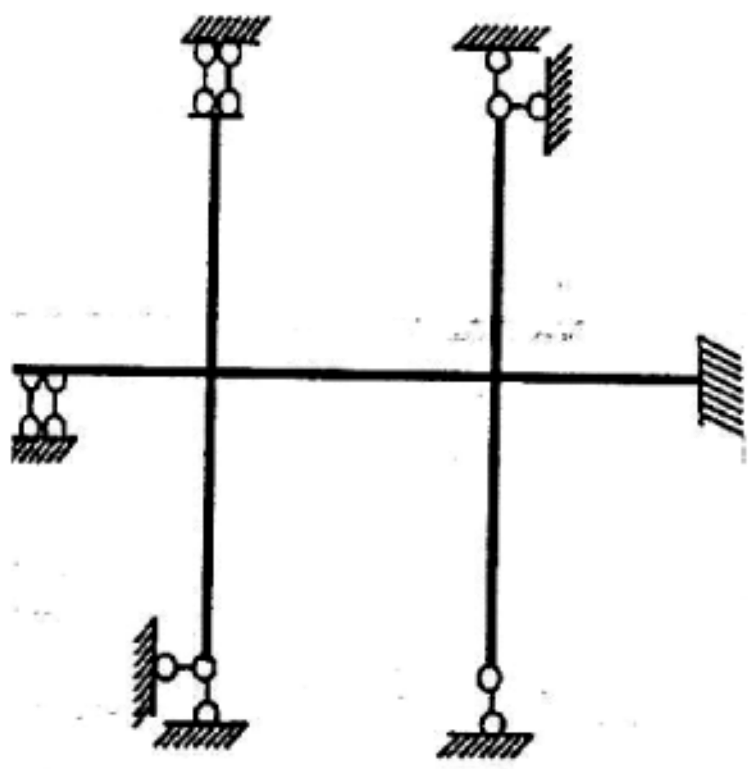


图 9-3-6

【答案】D

【解析】传递系数只取决与远端的支撑情况，远端为固定端传递系数为 1/2，远端为固定铰支座传递系数为 0，远端为滑动铰支座传递系数为-1。显然图中有三个杆端为固定铰支座；对于最左侧的滑动支座形式的约束，不考虑轴向变形实际上相当于固定支座；中间杆的杆端也是固定支座，再加上最右侧的固定支座，故一共有三个固定端；剩下一个为滑动支座。

2．下列说法正确的是（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．力法以多余未知力作为未知数，故力法方程表示的是力的平衡条件。

B．位移法是以结点位移作为基本未知数，故位移法方程表示的是几何条件。

C．力矩分配法是位移法得到的，故力矩分配法可以解有侧移的结构。

D．位移法可以求解静定结构，但力法不能解静定结构。

【答案】D

【解析】力法以多余未知力作为未知数，实质上力法方程表示的是位移协调条件（几何条件）；位移法是以结点位移作为基本未知数，实质上位移法方程表示的是力的平衡条件。力矩分配法的适用条件是解无侧移的结构；位移法既可以解决超静定结构也可以解决静定结构，力法只能用于求解超静定结构。

3．图 9-3-7 所示结构各杆线刚度相等，采用力矩分配法计算，则分配系数 $\mu_{AD}=$（　　）;

A．3/4

B．3/5

C．3/7

D．3/10

杆端 B 的弯矩 M_{BA}=（　　）。[浙江大学 2005 研]

A．3P*a*/64，上侧受拉

B．3P*a*/112，上侧受拉

C．3P*a*/80，下侧受拉

D．3P*a*/56，下侧受拉

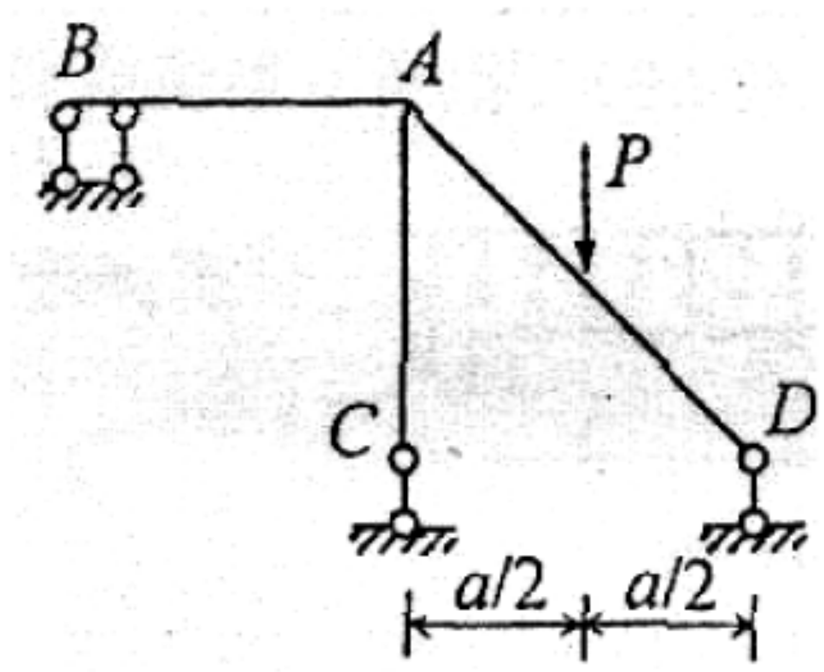


图 9-3-7

【答案】C；D

【解析】计算分配系数，设线刚度 *i*，B 端相当与固定端，D 端为固定铰支座，AC 端不会分配弯矩，故分配系数为：$\mu_{AD}=\dfrac{3i}{4i+3i}=\dfrac{3}{7}$；A 结点处的不平衡力矩为：$M=-\dfrac{3Pa}{16}$，则根据分配系数 $M_{AB}=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3Pa}{16}=\dfrac{3Pa}{28}$，由于 B 端相当于固定端，传递系数为 1/2，所以 $M_{BA}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3Pa}{28}=\dfrac{3Pa}{56}$（下侧受拉）。

三、计算题

1．用力矩分配法计算图 9-3-8 所示结构，并作 M 图。[宁波大学 2009 研]

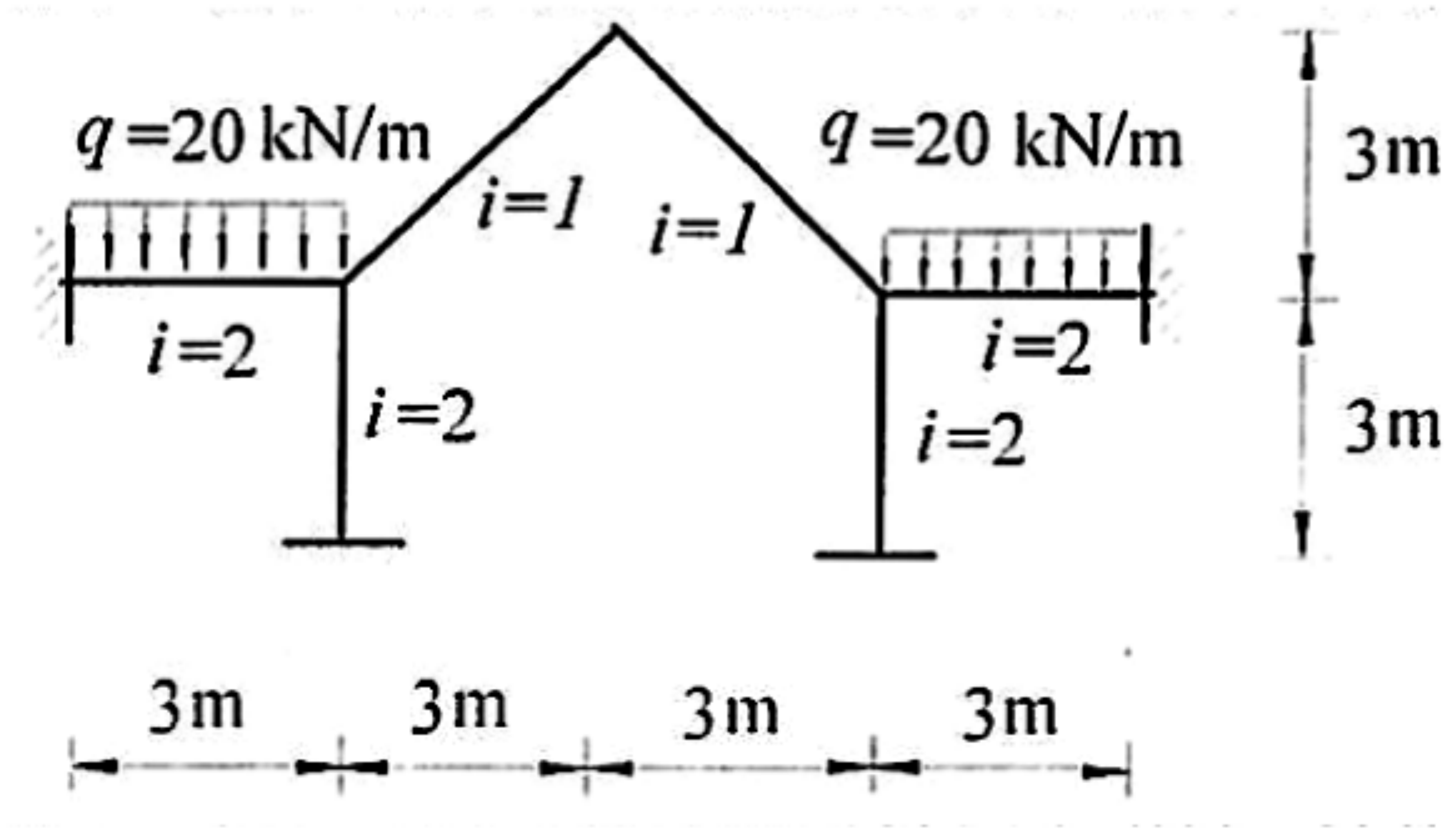


图 9-3-8

解：题图所示结构为对称结构，因此只需研究一半的结构。取右半部分研究，则刚节点处的分配系数为

$$\mu_{AB}=\frac{2}{5}\quad,\quad\mu_{AC}=\frac{1}{5}\quad,\quad\mu_{AD}=\frac{2}{5}$$

由力矩分配法，可画出弯矩图如下图 9-3-9 所示。

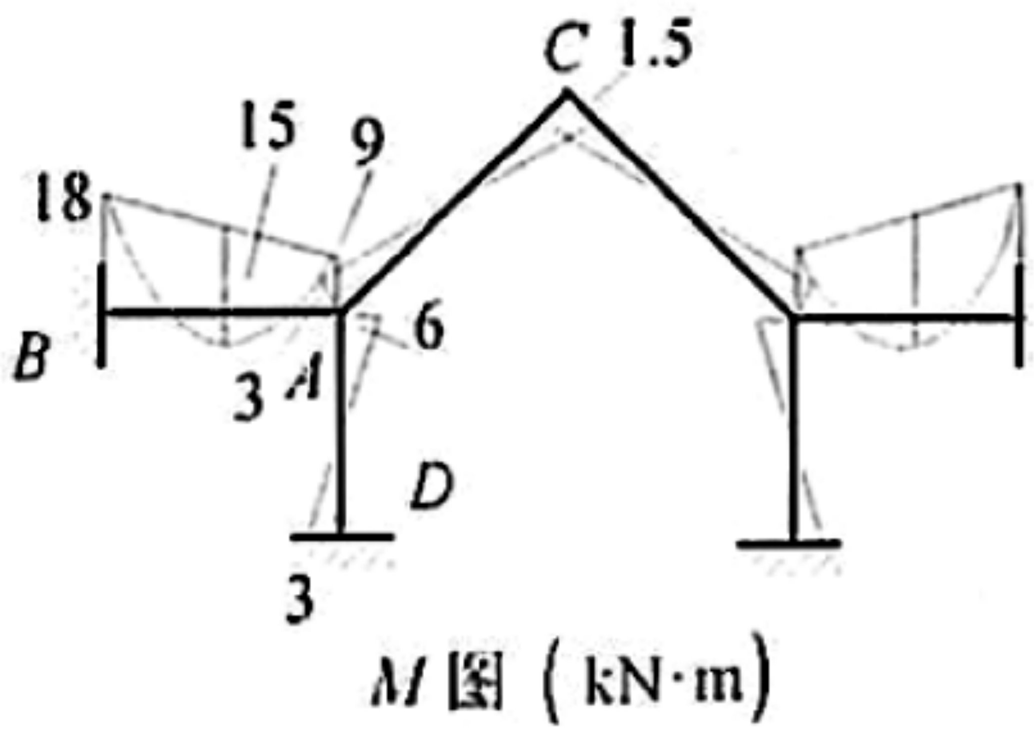


图 9-3-9

2．用弯矩分配法求作图 9-3-10 的 M 图（算两个循环）。[同济大学 2003 研]

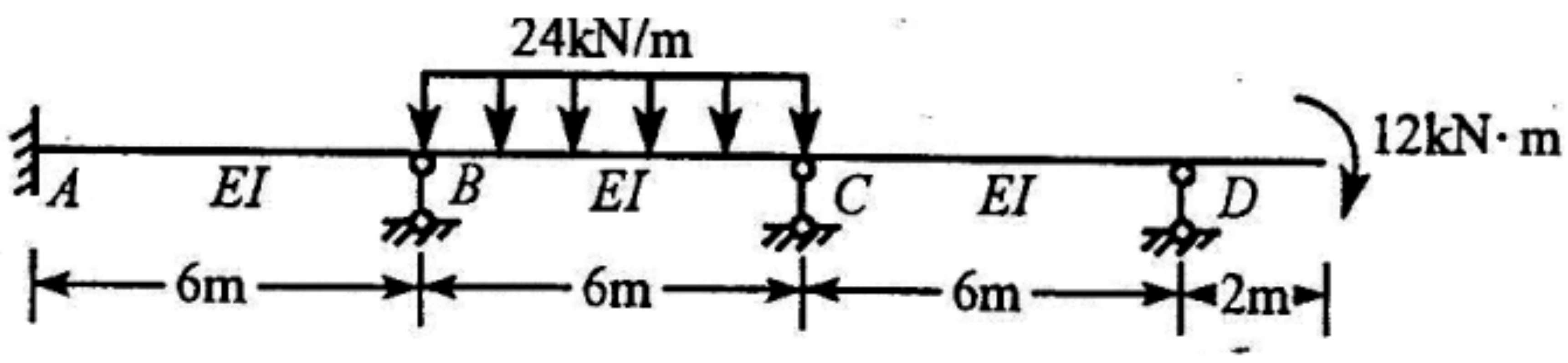


图 9-3-10

解：（1）设 $EI/2=1$，则对于单元 B 而言，有

$$S_{BA}=3，\ S_{BC}=3$$

则此时的弯矩分配系数为

$$\mu_{BA}=\mu_{BC}=0.5$$

对于节点 C 的单元体而言，有

$$S_{CB}=3，\ S_{CD}=4$$

所以分配系数为

$$\mu_{CB}=\frac{4}{4+3}=0.571，\ \mu_{CD}=0.429$$

（2）计算固端弯矩，可得

$$M_{CB}^{F}=-M_{BC}^{F}=\frac{1}{12}\times24\times6^{2}=72\text{kN•m}，\ M_{CD}^{F}=\frac{1}{12}\times12=6\text{kN•m}$$

（3）弯矩分配，计算过程见下表 9-3-1 所示。

表 9-3-1

μ		0.5	0.5	0.571	0.429		
M^F			-72	72	6	12	-12
M^μ, M^c			-22.27	-44.54	-33.46		
	23.57	47.13	47.14	23.57			
			-6.73	-13.46	-10.11		
	1.68	3.37	3.36				
M	25.25	50.50	-50.50	37.57	-37.57	12	-12

所以最终弯矩图如 9-3-11 所示。

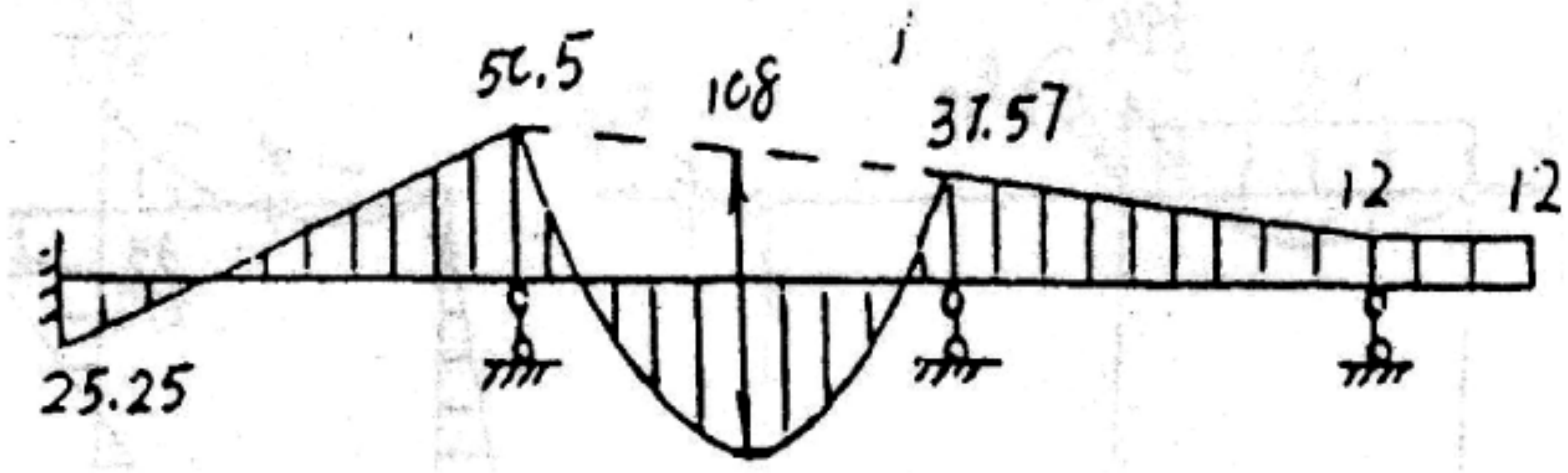


图 9-3-11

3．用力矩分配法计算图 9-3-12 所示结构，并作 M 图。已知：q=2.4kN/m，各杆的 EI 相同。（每结点分配两次）[西南交通大学 2008 研]

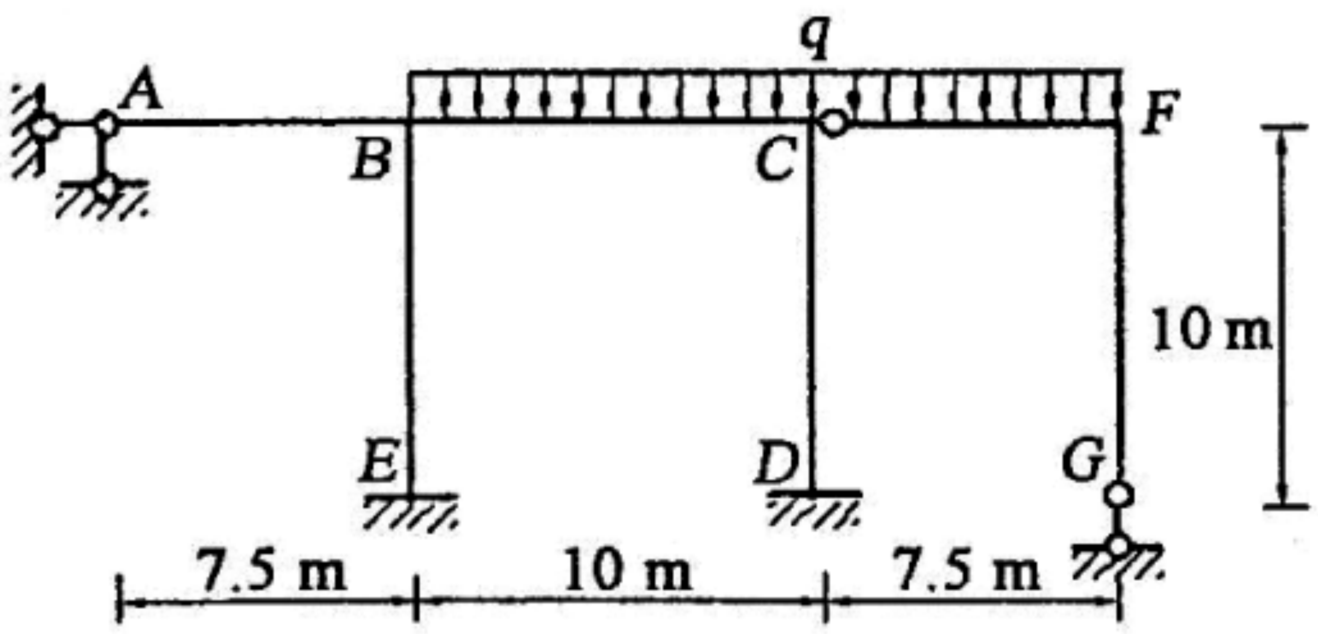


图 9-3-12

解：（1）计算分配系数。设 EI/2.5=1，则节点 *B* 的单元为 S_{BA}=4，S_{BE}=4，S_{BC}=4。所以分配系数为

$$\mu_{BC}=\mu_{BA}=\mu_{BE}=\frac{1}{3}$$

同理可得节点 *C* 的分配系数为

$$\mu_{CB}=\mu_{CD}=0.5$$

计算杆件固定端弯矩如下

$$-M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

然后绘制弯矩图如下图 9-3-13 所示。

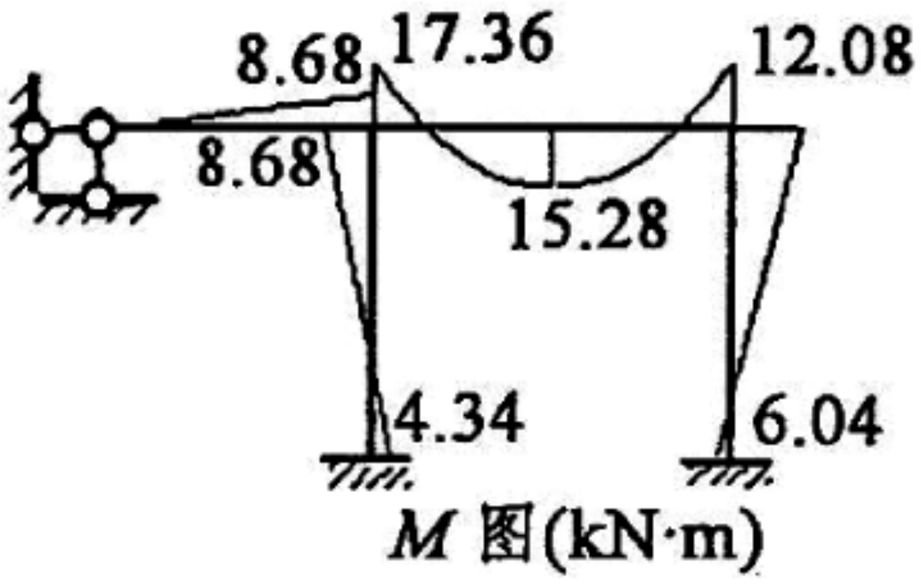


图 9-3-13

4．图 9-3-14 所示结构支座 1 下沉 15mm，已知 E=2.1×10^{11}Pa，I=4×$10^{-4}$$m^4$，用力矩分配法作图 9-3-14 所示

结构的弯矩图，写出分析过程。[东南大学 2005 研]

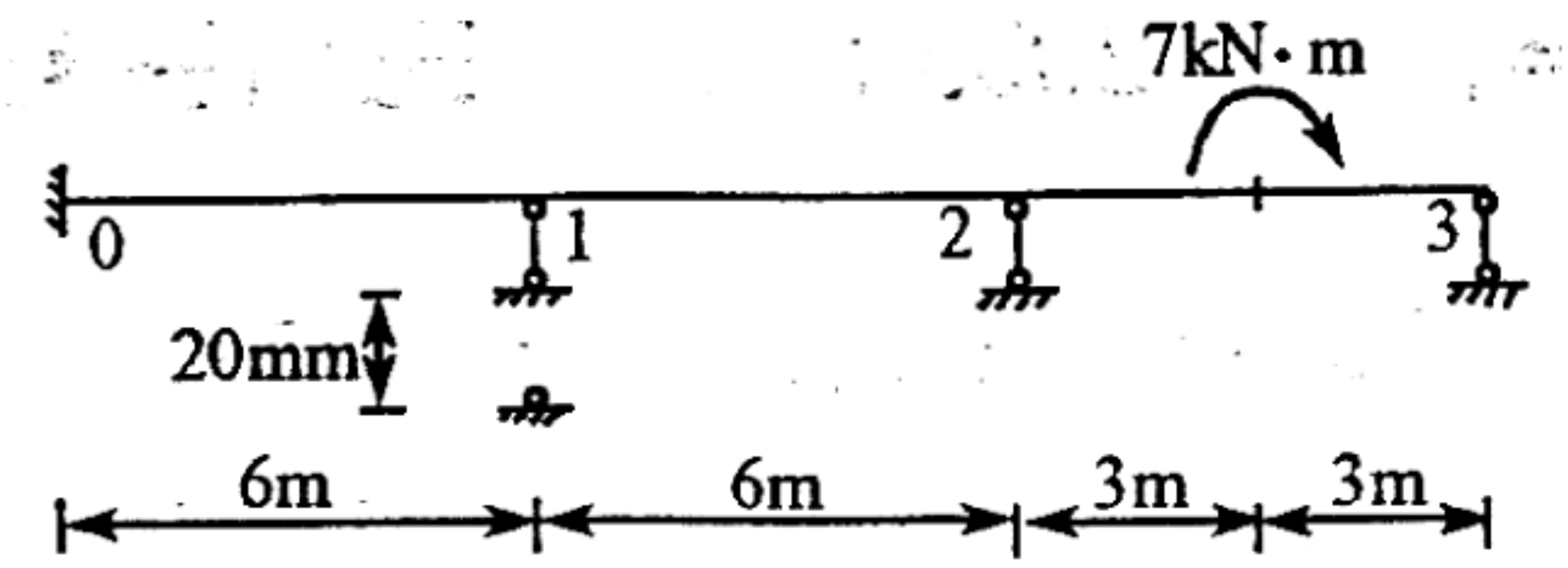


图 9-3-14

解：如图所示，首先计算两个节点的分配系数。

节点 1：

$$S_{10}=S_{12}=4i,\mu_{10}=\mu_{12}=\frac{4i}{8i}=0.5$$

节点 2：

$$S_{21}=4i,S_{23}=3i,\mu_{21}=\frac{4i}{7i}=\frac{4}{7},\mu_{23}=\frac{3i}{7i}=\frac{3}{7}$$

式中，$i=\frac{EI}{l}=\frac{2.1\times10^{11}\times10^{-3}\times4\times10^{4}}{6}=1.4\times14^{4}\text{kN}\bullet\text{m}$

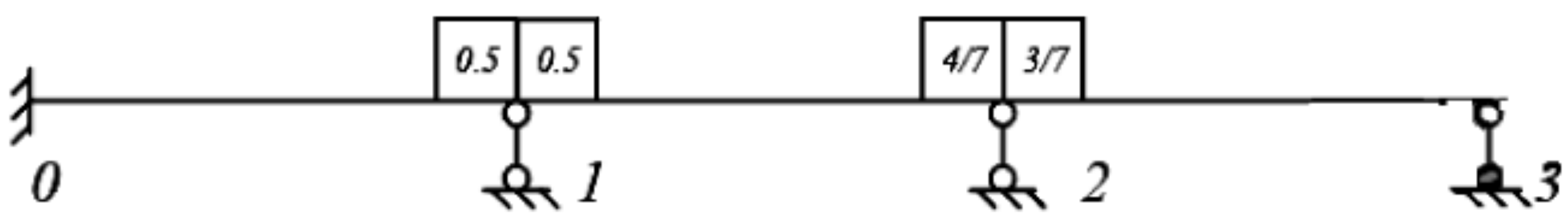
将两个节点分别固定，计算此时的固定弯矩，可得

$$M_{12}^{F}=\Delta\cdot6\cdot\frac{i}{l}=0.020\times6\times\frac{1.4\times10^{4}}{6}=280kN\cdot m$$

$$M_{21}^{F}=M_{12}^{F}=280kN\cdot m \qquad M_{23}^{F}=\frac{M}{8}=0.875kN\cdot m$$

开始力矩分配过程，如下表 9-3-2 所示。

表 9-3-2



I	放松1			280	280	
	放松2	-70 ←	-140	-140 →	-70	
II	放松1			-60.25 ←	-120.5	-90.375
	放松2	15.063 ←	30.125	30.125 →	15.063	
III	放松1			-4.304 ←	-8.607	-6.456
	放松2	1.076 ←	2.152	2.152 →	1.076	
IV	放松1			-0.308 ←	-0.615	-0.461
	放松2	0.077 ←	0.154	0.154 →	0.077	
V	放松1			-0.022 ←	-0.044	-0.033
	放松2	0.006 ←	0.011	0.011 →	0.006	
					-0.003	-0.003
杆端弯矩		-53.778	-107.558	107.558	97.328	-97.328

弯矩分配、传递和叠加过程

所以此时的弯矩图如下图 9-3-15 所示。

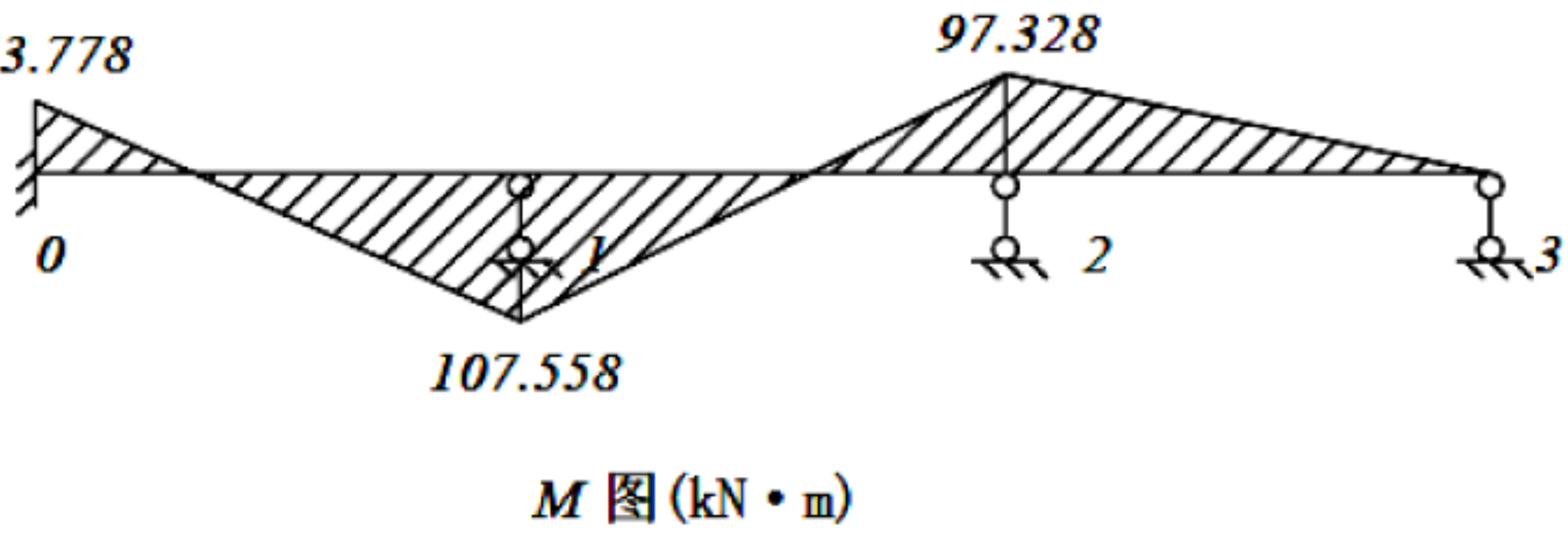


图 9-3-15

第 10 章　矩阵位移法

10.1　复习笔记

【知识框架】

- 矩阵位移法
  - 矩阵位移法的概述
    - 矩阵位移法的主要内容
      - 单元分析
      - 整体分析
    - 矩阵位移法与传统位移法的区别
      - 是否考虑轴向变形
      - 解决问题的复杂程度
      - 计算方式（手算和机算）
  - 单元刚度矩阵
    - 单元的局部坐标系
    - 杆端力分量和位移分量
    - 单元刚度方程
    - 一般单元刚度矩阵
    - 平面桁架的单元刚度方程
  - 单元刚度矩阵坐标转换
    - 相关定义：坐标变换、整体坐标系
    - 整体坐标系
      - 整体坐标系中的力列向量和位移列向量
      - 整体坐标系中力和位移的正负规定
    - 局部坐标系与整体坐标系中力和位移的坐标变换
    - 单元刚度矩阵的变换
    - 整体坐标系中的单元刚度方程
    - 平面桁架的坐标变换
  - 结构的原始刚度矩阵
    - 原始刚度矩阵的定义
    - 原始刚度矩阵的求解步骤
      - 单元和结点编号及单元刚度矩阵
      - 结点位移列向量
      - 结点外力列向量
      - 原始刚度方程
      - 原始刚度矩阵
  - 支撑条件的引入
    - 支撑约束条件
    - 引入约束条件
      - 结构刚度方程
      - 结构刚度矩阵
    - 求解未知位移
    - 求解单元的内力
  - 非结点荷载的处理
    - 非结点荷载转化为等效结点荷载
    - 结点荷载的组成部分：等效结点荷载和直接作用在结点的荷载
  - 矩阵位移法的计算步骤及几点补充说明
    - 矩阵位移法的计算步骤
    - 总刚的带宽与存储方式
    - 关于支撑条件的引入：置大数法、划零置一法
    - 先处理法与后处理法

【重点难点归纳】

一、矩阵位移法概述

1．矩阵位移法的主要内容

（1）单元分析

把结构先分解为有限个较小的单元，即进行离散化。离散化的目的是在较小的范围内分析单元的内力与位移之间的关系，建立单元刚度矩阵或单元柔度矩阵。

（2）整体分析

把各单元集合成原来的结构，要求各单元满足原结构的几何条件（包括支承条件、结点处的变形连续条件）和平衡条件，从而建立整个结构的刚度方程或柔度方程，以求解原结构的位移和内力。

2．矩阵位移法和传统位移法的区别

（1）矩阵位移法中一般考虑杆件轴向变形的影响，传统位移法忽略杆件的轴向变形；

（2）矩阵位移法一般在计算机上进行计算，可以解决大型复杂问题；传统位移法的计算手段一般是手算，只用来解决简单问题。

二、单元刚度矩阵

1．单元的局部坐标系

图 10-1-1 示一等截面直杆，它的始端和末端分别为 i 和 j。

（1）以 i 为原点；

（2）以从 i 向 J 的方向为 $\bar{x}$ 轴的正向；

（3）以 i 轴的正向逆时针转 90°为$\bar{y}$ 轴的正向。

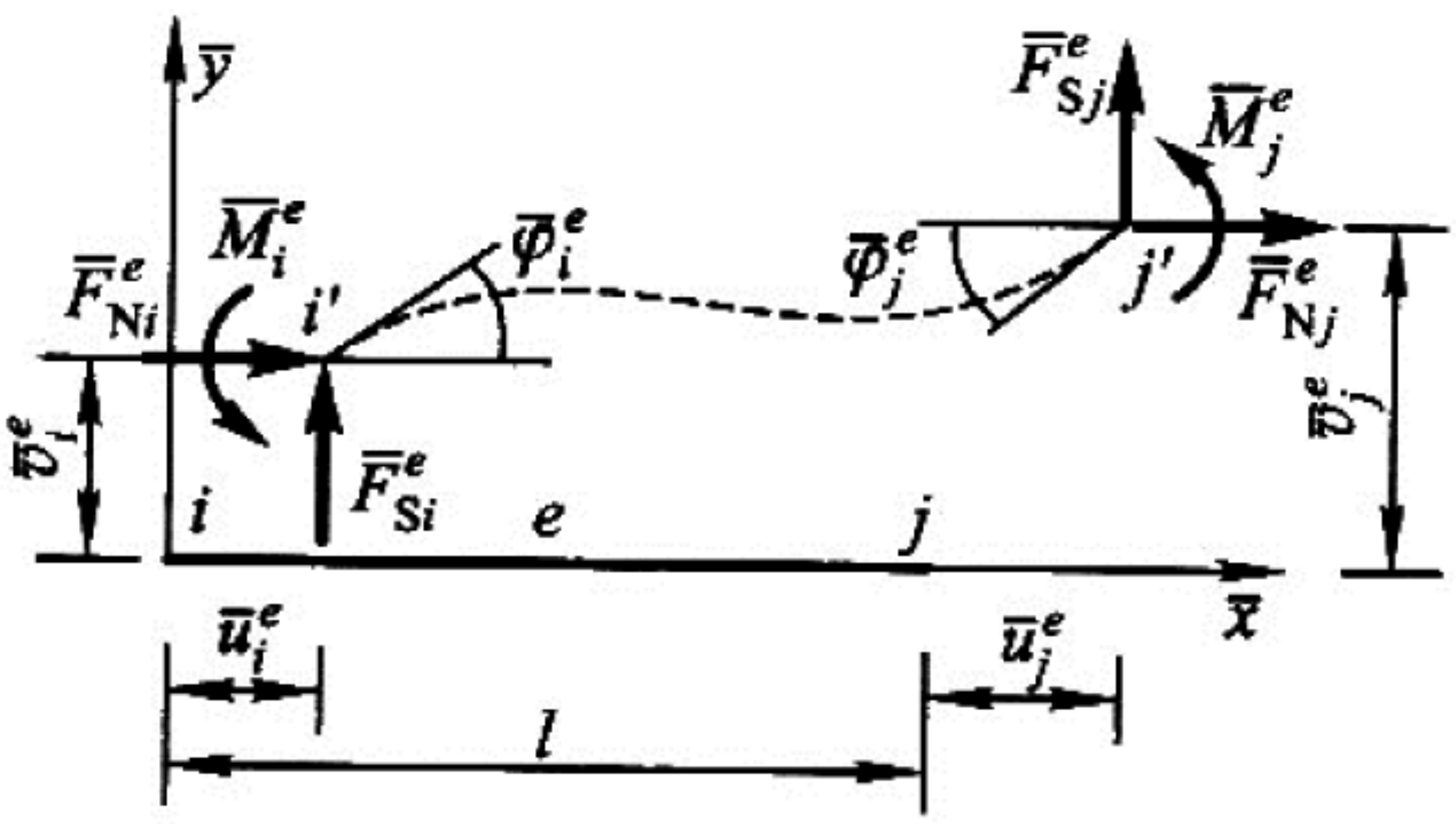


图 10-1-1

2．杆端力分量和位移分量

（1）杆端力分量

对于平面杆件，在一般情况下两端各有三个杆端力分量。

①i 端：轴力$\bar{F}^e_{Ni}$、剪力$\bar{F}^e_{Si}$和弯矩$\bar{M}^e_i$；

②j 端：轴力$\bar{F}^e_{Nj}$剪力$\bar{F}^e_{Sj}$和弯矩$\bar{M}^e_j$。

符号上面的横线表示它们是局部坐标系中的量值；上标 e 表示它们是属单元 e 的。

（2）杆端位移分量

①i 端：水平位移$\bar{u}^e_i$和$\bar{v}^e_i$，角位移$\bar{\varphi}^e_i$；

②j 端：水平位移$\bar{u}^e_j$和$\bar{v}^e_j$，角位移$\bar{\varphi}^e_j$。

（3）杆端力和杆端位移的正负

①杆端轴力$\bar{F}^e_N$以同$\bar{x}$轴正向指向为正；

②杆端剪力$\bar{F}^e_S$以同$\bar{y}$轴正向指向为正；

③杆端弯矩$\bar{M}^e$以逆时针方向为正；

④杆端位移的正负号规定与杆端力相同。

3．单元刚度方程

（1）力与位移的关系

根据叠加原理可写出

$$\bar{F}_{Ni}^e = \frac{EA}{l}\bar{u}_i^e - \frac{EA}{l}\bar{u}_j^e$$

$$\bar{F}_{Si}^e = \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i^e + \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_i^e - \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j^e + \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_j^e$$

$$\bar{M}_i^e = \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i^e + \frac{4EI}{l}\bar{\varphi}_i^e - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j^e + \frac{2EI}{l}\bar{\varphi}_j^e$$

$$\bar{F}_{Nj}^e = -\frac{EA}{l}\bar{u}_i^e + \frac{EA}{l}\bar{u}_j^e$$

$$\bar{F}_{Sj}^e = -\frac{12EI}{l^3}\bar{v}_i^e - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_i^e + \frac{12EI}{l^3}\bar{v}_j^e - \frac{6EI}{l^2}\bar{\varphi}_j^e$$

$$\bar{M}_j^e = \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_i^e + \frac{2EI}{l}\bar{\varphi}_i^e - \frac{6EI}{l^2}\bar{v}_j^e + \frac{4EI}{l}\bar{\varphi}_j^e$$

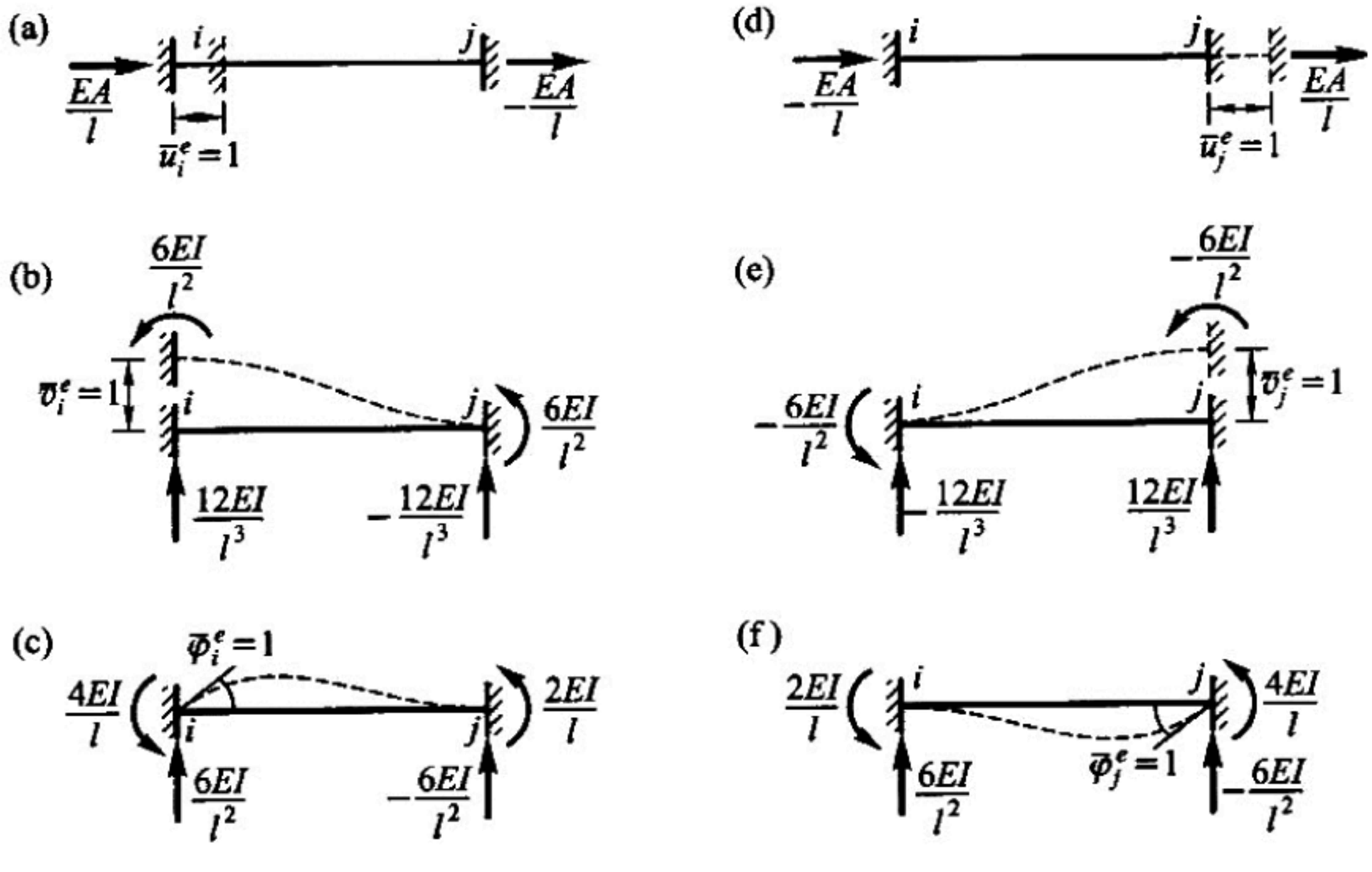


图 10-1-2

（2）单元刚度方程

将力与位移的关系式写成矩阵形式，可以的得到局部坐标系的单元刚度方程，即

$$
\begin{pmatrix} \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Si} \\ \bar{M}^e_i \\ \hdashline \bar{F}^e_{Nj} \\ \bar{F}^e_{Sj} \\ \bar{M}^e_j \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hdashline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array}\right] \begin{pmatrix} \bar{u}^e_i \\ \bar{v}^e_i \\ \bar{\varphi}^e_i \\ \hdashline \bar{u}^e_j \\ \bar{v}^e_j \\ \bar{\varphi}^e_j \end{pmatrix}
$$

可简写为

$$\bar{\boldsymbol{F}}^e = \bar{\boldsymbol{k}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}}^e$$

式中，

$$
\bar{\boldsymbol{F}}^e = \begin{pmatrix} \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Si} \\ \bar{M}^e_i \\ \hdashline \bar{F}^e_{Nj} \\ \bar{F}^e_{Sj} \\ \bar{M}^e_j \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^e = \begin{pmatrix} \bar{u}^e_i \\ \bar{v}^e_i \\ \bar{\varphi}^e_i \\ \hdashline \bar{u}^e_j \\ \bar{v}^e_j \\ \bar{\varphi}^e_j \end{pmatrix}
$$

分别为单元的杆端力列向量和杆端位移列向量；$\bar{\boldsymbol{k}}^e$为单元刚度矩阵。

4. 单元刚度矩阵

（1）单元刚度矩阵表达式

$$
\bar{\boldsymbol{k}}^e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \bar{u}^e_i & \bar{v}^e_i & \bar{\varphi}^e_i & \bar{u}^e_j & \bar{v}^e_j & \bar{\varphi}^e_j \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hdashline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Si} \\ \bar{M}^e_i \\ \bar{F}^e_{Nj} \\ \bar{F}^e_{Sj} \\ \bar{M}^e_j \end{array}
$$

单元刚度矩阵又称单刚。

（2）单元刚度矩阵相关说明

①$\bar{\boldsymbol{k}}^e$是方阵，矩阵的行数等于列数；

②杆端力列向量和杆端位移列向量的各个分量应从 i 到 j 按顺序一一对应排列。

（3）单元刚度矩阵元素的物理意义

当其所在列对应的杆端位移分量等于 1（其余杆端位移分量均为零）时，所引起的其所在行对应的杆端力分量的数值。

（4）单元刚度矩阵性质

①对称性

单元刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}^e$是一个对称矩阵，即位于主对角线两边对称位置的两个元素是相等的。

②奇异性

a. 单元刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}^e$是奇异矩阵。矩阵$\bar{\boldsymbol{k}}^e$相应的行列式等于零，其逆阵不存在。

b. 若给定了杆端位移$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$，可以单元刚度方程确定杆端力$\bar{\boldsymbol{F}}^e$，但给定了杆端力$\bar{\boldsymbol{F}}^e$却不能由单元刚度方程反求杆端位移$\bar{\boldsymbol{\delta}}^e$。

5. 平面桁架的单元刚度方程

（1）桁架受力分析

平面桁架中的杆件，其两端仅有轴力作用（图 10-1-3），剪力和弯矩均为零。

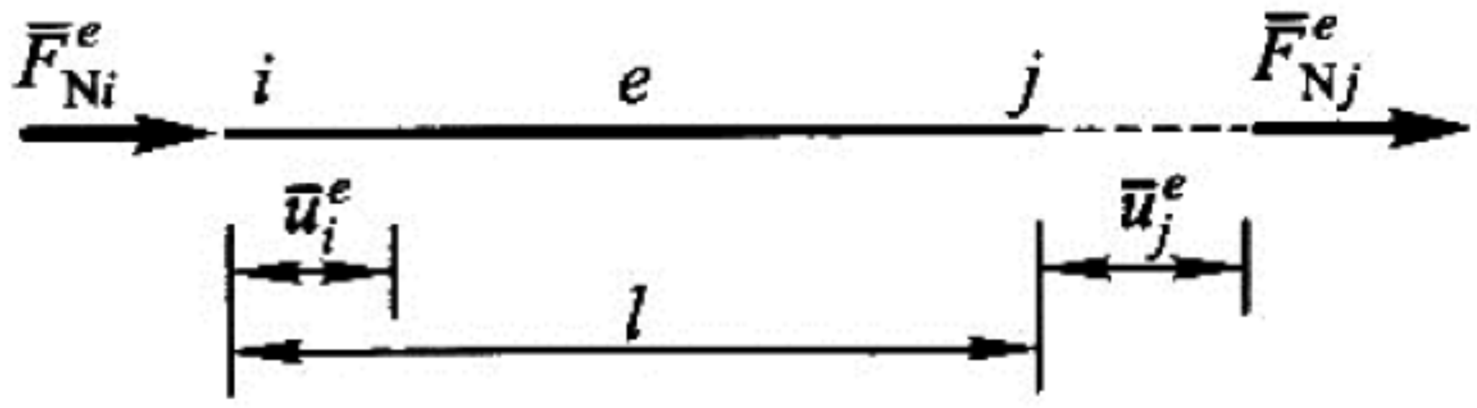


图 10-1-3

（2）桁架单元刚度方程

$$\begin{pmatrix} \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}^e_i \\ \bar{u}^e_j \end{pmatrix}$$

（3）桁架的单元刚度矩阵

$$\begin{matrix} & \bar{u}^e_i & \bar{u}^e_j & \\ \bar{\boldsymbol{k}}^e = & \left(\begin{matrix} \dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} -\dfrac{EA}{l} \\ \dfrac{EA}{l} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Nj} \end{matrix} \end{matrix}$$

为了以后便于进行坐标转换，写成 4×4 阶的矩阵

$$\begin{matrix} & \bar{u}^e_i & \bar{v}^e_i & \bar{u}^e_j & \bar{v}^e_j & \\ \bar{\boldsymbol{k}}^e = & \left(\begin{matrix} \dfrac{EA}{l} \\ 0 \\ -\dfrac{EA}{l} \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -\dfrac{EA}{l} \\ 0 \\ \dfrac{EA}{l} \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \bar{F}^e_{Ni} \\ \bar{F}^e_{Si} \\ \bar{F}^e_{Nj} \\ \bar{F}^e_{Sj} \end{matrix} \end{matrix}$$

三、单元刚度矩阵的坐标转换

1．定义

（1）坐标变换

坐标变换是指把按局部坐标系建立的单元刚度矩阵$\bar{k}^e$转换到整体坐标系上来，以建立整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e。

（2）整体坐标系

整体坐标系是指研究结构的几何条件和平衡条件时选定的一个统一坐标系。

2．整体坐标系

（1）整体坐标系中的力列向量和位移列向量

在整体坐标系 xOy 中，以 $\boldsymbol{F}^e$和$\boldsymbol{\delta}^e$来表示杆端力列向量和杆端位移列向量，即

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \\ \text{--------} \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_i^e \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}^e=\begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ \text{--------} \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_i^e \end{pmatrix}$$

（2）整体坐标系中力和位移的正负规定

①力和线位移以与结构坐标系指向一致者为正。

②力偶和角位移以逆时针方向为正。

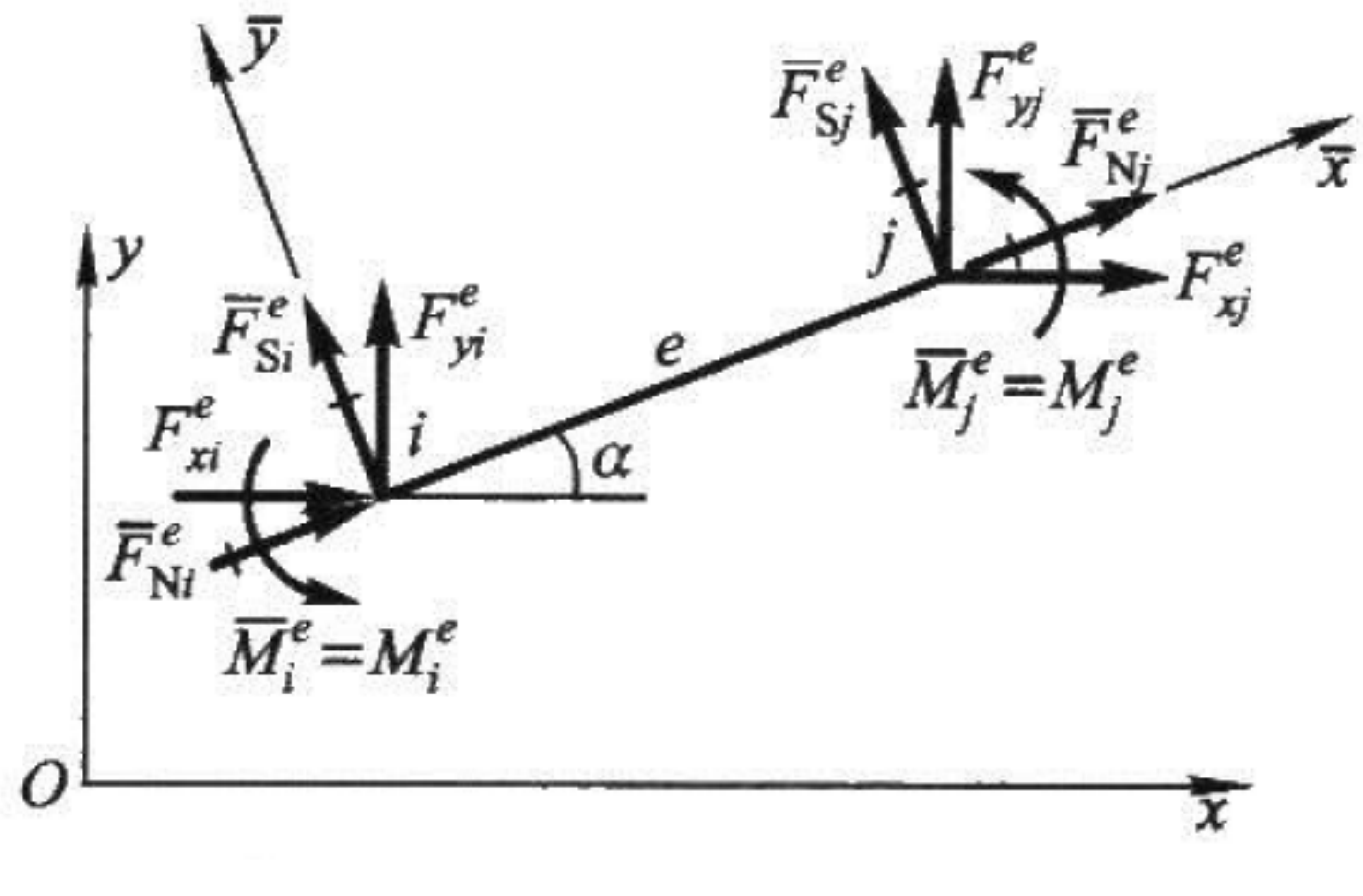


图 10-1-4

3．两种坐标系中力与位移的坐标变换

（1）力的变换

①弯矩的变换

在两种坐标系中，弯矩都作用在同一平面上，是垂直于坐标平面的力偶矢量，故不受平面内坐标变换的影响，即

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_i^e &= M_i^e \\ \bar{M}_j^e &= M_j^e \end{aligned}\right\}$$

②轴力和剪力的变换

设两种坐标系之间的夹角为 α，它是从 x 轴沿逆时针方向转至 i 轴来度量的，由投影关系可得

$$\left.\begin{aligned}\overline{F}^e_{Ni} &= F^e_{xi}\cos\alpha + F^e_{yi}\sin\alpha\\ \overline{F}^e_{Si} &= -F^e_{xi}\sin\alpha + F^e_{yi}\cos\alpha\\ \overline{F}^e_{Nj} &= F^e_{xj}\cos\alpha + F^e_{yj}\sin\alpha\\ \overline{F}^e_{Sj} &= -F^e_{xj}\sin\alpha + F^e_{yj}\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

③力变换关系的矩阵表达式

$$\begin{Bmatrix}\overline{F}^e_{Ni}\\ \overline{F}^e_{Si}\\ \overline{M}^e_i\\ \hdashline \overline{F}^e_{Nj}\\ \overline{F}^e_{Sj}\\ \overline{M}^e_j\end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{Bmatrix}F^e_{xi}\\ F^e_{yi}\\ M^e_i\\ \hdashline F^e_{xj}\\ F^e_{yj}\\ M^e_j\end{Bmatrix}$$

或简写为

$$\overline{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e$$

式中，T 为坐标转换矩阵。

④坐标转换矩阵

a．矩阵表达式

$$\boldsymbol{T} = \left[\begin{array}{ccc:ccc}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & \boldsymbol{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ & \boldsymbol{0} & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ & & & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

b．性质

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

（2）位移的变换

杆端位移之间的转换

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

4．单元刚度矩阵的变换

（1）变换表达式

$$\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}$$

式中，k^e 为整体坐标系中的单元刚度矩阵。

（2）推导过程

①将 $\overline{\boldsymbol{\delta}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$ 和 $\overline{\boldsymbol{F}}^e = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e$ 代入 $\overline{\boldsymbol{F}}^e = \overline{\boldsymbol{k}}^e\overline{\boldsymbol{\delta}}^e$，得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^e = \overline{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

②两边同时左乘 T^{-1} 得

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{T}^{-1}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

③又因为 $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

④所以

$$\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}$$

5．整体坐标系中的单元刚度方程

（1）单元刚度方程表达式

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{k}}^e\boldsymbol{T}\boldsymbol{\delta}^e$$

或写为

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}^e\boldsymbol{\delta}^e$$

（2）单元刚度方程的分块表示

将单元刚度方程按单元的始末端结点 i、j 进行分块，而写成如下形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_i^e \\ \boldsymbol{F}_j^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{ii}^e & \boldsymbol{k}_{ij}^e \\ \boldsymbol{k}_{ji}^e & \boldsymbol{k}_{jj}^e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_i^e \\ \boldsymbol{\delta}_j^e \end{pmatrix}$$

式中

$$\boldsymbol{F}_i^e = \begin{pmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_j^e = \begin{pmatrix} F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_i^e = \begin{pmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_j^e = \begin{pmatrix} u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{pmatrix}$$

分别为始端 i 和末端 j 的杆端力和杆端位移列向量；

$\boldsymbol{k}_{ii}^e$、$\boldsymbol{k}_{ij}^e$、$\boldsymbol{k}_{ji}^e$、$\boldsymbol{k}_{jj}^e$ 为单元刚度矩阵 k 的四个子块，每个子块都是 3×3 阶方阵，即

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{ii}^e & \boldsymbol{k}_{ij}^e \\ \boldsymbol{k}_{ji}^e & \boldsymbol{k}_{jj}^e \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \end{matrix}$$

由式单元刚度方程又可知

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_i^e &= \boldsymbol{k}_{ii}^e\boldsymbol{\delta}_i^e + \boldsymbol{k}_{ij}^e\boldsymbol{\delta}_j^e \\ \boldsymbol{F}_j^e &= \boldsymbol{k}_{ji}^e\boldsymbol{\delta}_i^e + \boldsymbol{k}_{jj}^e\boldsymbol{\delta}_j^e \end{aligned}\right\}$$

（3）整体坐标系的单元刚度矩阵

①表达式

$$\boldsymbol{k}^e = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{ii}^e & \boldsymbol{k}_{ij}^e \\ \boldsymbol{k}_{ji}^e & \boldsymbol{k}_{jj}^e \end{pmatrix}$$

②性质

a．对称性；

b．奇异性（仍为自由单元，未考虑杆端约束条件）。

6．平面桁架的坐标变换

（1）整体坐标系中的杆端力和杆端位移列向量

对于平面桁架杆件，两端只承受轴力（图 10-1-5）为

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_i^e\\ \hdashline \boldsymbol{F}_j^e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{xi}^e\\ F_{yi}^e\\ \hdashline F_{xj}^e\\ F_{yj}^e\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}^e=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\delta}_i^e\\ \hdashline \boldsymbol{\delta}_j^e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_i^e\\ v_i^e\\ \hdashline u_j^e\\ v_j^e\end{pmatrix}$$

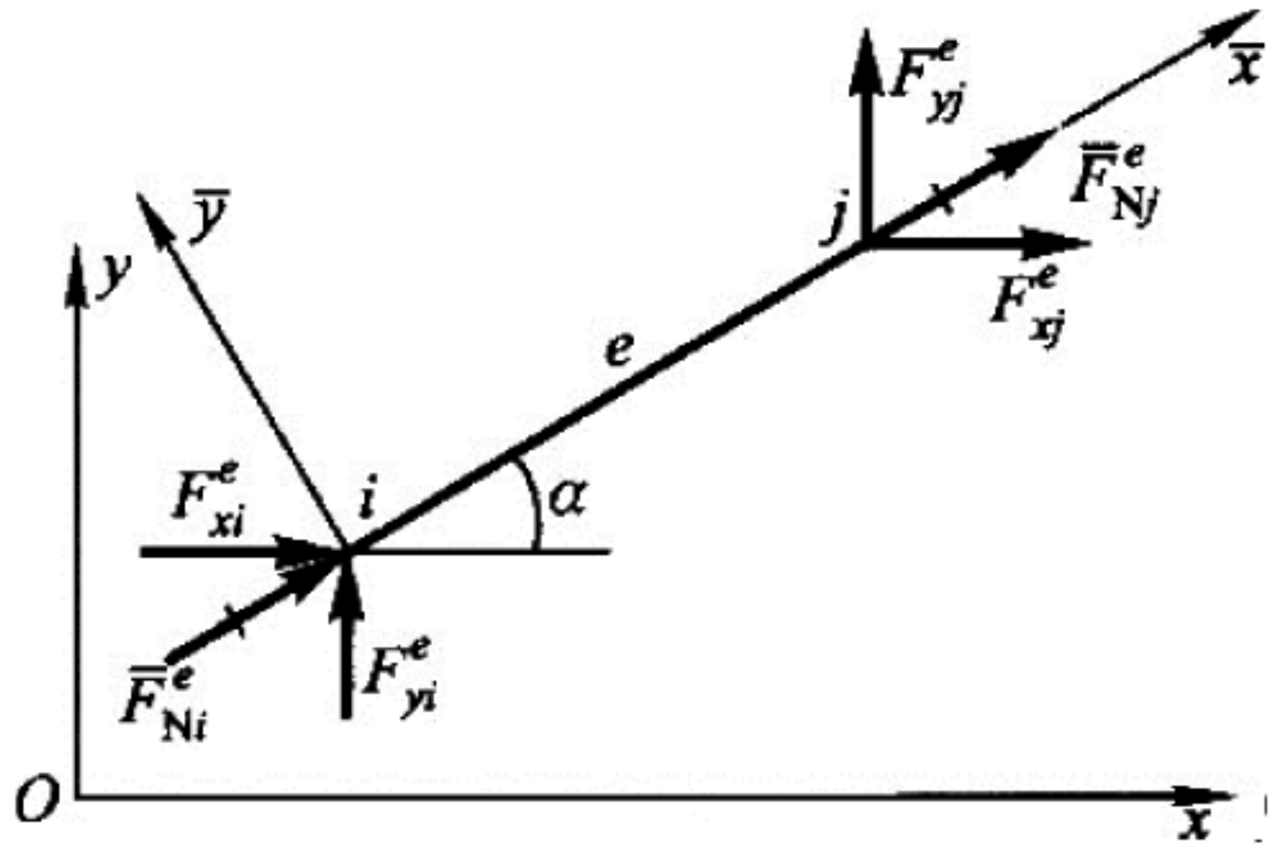


图 10-1-5

（2）坐标转换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{cc:cc}\cos\alpha & \sin\alpha & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\boldsymbol{0}} & \cos\alpha & \sin\alpha\\ & & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{array}\right)$$

（3）单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}^e=\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{k}_{ii}^e & \boldsymbol{k}_{ij}^e\\ \hdashline \boldsymbol{k}_{ji}^e & \boldsymbol{k}_{jj}^e\end{array}\right)=\frac{EA}{l}\left(\begin{array}{cc:cc}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha\\ \hdashline -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{array}\right)$$

四、结构的原始刚度矩阵

1．定义

原始刚度方程是指尚未进行支承条件处理的表示所有结点外力与结点位移之间的关系的平衡方程。

2．求解步骤

下面以图 10-1-6（a）所示刚架，选取整体坐标系和各单元的局部坐标系如图 10-1-6（b）所示。

（1）单元和结点编号及单元刚度矩阵

①单元和结点编号

a．用①，②，…表示单元号；

b．用 1，2，…表示结点号，这里支座也视为结点。

各单元的始、末两端 i,j 的结点号码将如表 10-1-1 所示，

表 10-1-1　各单元始束端的结点号码

单　元	始末端结点号 i	始末端结点号 j
①	2	3
②	1	2
③	4	3

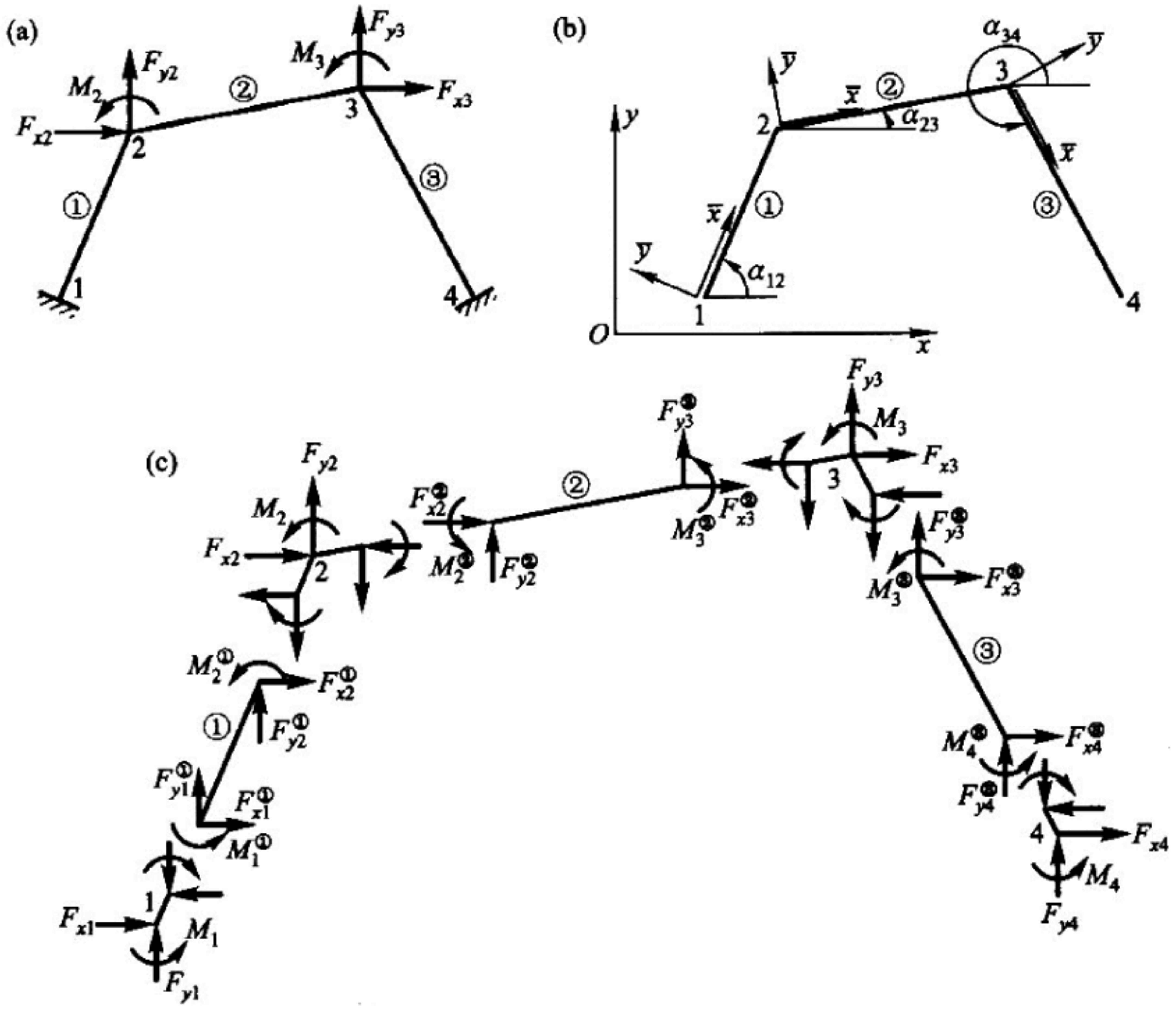


图 10-1-6

②各单元刚度矩阵的四个子块

$$
k^{①}=\begin{pmatrix} k_{11}^{①} & k_{12}^{①} \\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①} \end{pmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix},\quad
k^{②}=\begin{pmatrix} k_{22}^{②} & k_{23}^{②} \\ k_{32}^{②} & k_{33}^{②} \end{pmatrix}\begin{matrix}2\\3\end{matrix},\quad
k^{③}=\begin{pmatrix} k_{33}^{③} & k_{34}^{③} \\ k_{43}^{③} & k_{44}^{③} \end{pmatrix}\begin{matrix}3\\4\end{matrix}
$$

（列号依次为：$k^{①}$ 为 1、2；$k^{②}$ 为 2、3；$k^{③}$ 为 3、4）

（2）结点位移列向量

此刚架有四个刚结点，共有 12 个结点位移分量，我们按一定顺序将它们排成一列阵，则结构的结点位移列向量为

$$
\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1\\ \boldsymbol{\Delta}_2\\ \boldsymbol{\Delta}_3\\ \boldsymbol{\Delta}_4\end{pmatrix}
$$

式中，

$$\boldsymbol{\Delta}_1=\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\\varphi_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}_2=\begin{pmatrix}u_2\\v_2\\\varphi_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}_3=\begin{pmatrix}u_3\\v_3\\\varphi_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}_4=\begin{pmatrix}u_4\\v_4\\\varphi_4\end{pmatrix}$$

Δ_i为结点 i 的位移列向量；u_i、v_i和φ_i分别为结点 i 沿结构坐标系 x、y 轴的线位移和角位移。

（3）结点外力列向量

①矩阵表达式

设刚架上只有结点荷载作用，与结点位移列向量相对应的结点外力（包括荷载和反力）列向量为

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1\\\boldsymbol{F}_2\\\boldsymbol{F}_3\\\boldsymbol{F}_4\end{pmatrix}$$

式中，

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}F_{x1}\\F_{y1}\\M_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}F_{x2}\\F_{y2}\\M_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}F_{x3}\\F_{y3}\\M_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}F_{x4}\\F_{y4}\\M_4\end{pmatrix}$$

F_i为结点 i 的外力列向量；F_{xi}、F_{yi}和M_i分别为作用于结点 i 的沿 x、y 方向的外力和外力偶，它们的正负号规定与相应的结点位移相同。

②结点外力求法

a．在非支座结点 2、3 处

结点外力 F_2、F_3就是结点荷载，它们通常是给定的。

b．在支座 1、4 处

第一，当无给定结点荷载作用时，结点外力 F_1、F_4就是支座反力；

第二，当支座处还有给定结点荷载作用时，则 F_1、F_4应为结点荷载与支座反力的代数和。

（4）原始刚度方程

①结构处的平衡条件

以结点 2 为例，由平衡条件$\sum F_x=0$、$\sum F_y=0$和$\sum M=0$可得

$$\left.\begin{aligned}F_{x2}&=F_{x2}^{①}+F_{x2}^{②}\\F_{y2}&=F_{y2}^{①}+F_{y2}^{②}\\M_2&=M_2^{①}+M_2^{②}\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix}F_{x2}\\F_{y2}\\M_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{x2}^{①}\\F_{y2}^{①}\\M_2^{①}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{x2}^{②}\\F_{y2}^{②}\\M_2^{②}\end{pmatrix}$$

上式左边即为结点 2 的荷载列向量 F_2，右边二列阵则分别为单元①和单元②在 2 端的杆端力列向量 $F^{①}_2$和 $F^{②}_2$，故上式可简写为

$$\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_2^{①}+\boldsymbol{F}_2^{②}\qquad\text{(b)}$$

上述杆端力列向量可用杆端位移列向量来表示

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2^{①} &= \boldsymbol{k}_{21}^{①}\boldsymbol{\delta}_1^{①} + \boldsymbol{k}_{22}^{①}\boldsymbol{\delta}_2^{①} \\ \boldsymbol{F}_2^{②} &= \boldsymbol{k}_{22}^{②}\boldsymbol{\delta}_2^{②} + \boldsymbol{k}_{23}^{②}\boldsymbol{\delta}_3^{②} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

②结点处的变形连续条件

再根据结点处的变形连续条件，应该有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_2^{①} &= \boldsymbol{\delta}_2^{②} = \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \boldsymbol{\delta}_1^{①} &= \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_3^{②} &= \boldsymbol{\Delta}_3 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

③平衡方程

a．结点 2

将式（c）和（d）代入式（b），则得到以结点位移表示的结点 2 的平衡方程

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{k}_{21}^{①}\boldsymbol{\Delta}_1 + (\boldsymbol{k}_{22}^{①} + \boldsymbol{k}_{22}^{②})\boldsymbol{\Delta}_2 + \boldsymbol{k}_{23}^{②}\boldsymbol{\Delta}_3$$

b．所有结点

同理，对于结点 1、3、4 都可以列出类似的方程。把四个结点的方程汇集在一起，就有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \boldsymbol{k}_{11}^{①}\boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{k}_{12}^{①}\boldsymbol{\Delta}_2 \\ \boldsymbol{F}_2 &= \boldsymbol{k}_{21}^{①}\boldsymbol{\Delta}_1 + (\boldsymbol{k}_{22}^{①} + \boldsymbol{k}_{22}^{②})\boldsymbol{\Delta}_2 + \boldsymbol{k}_{23}^{②}\boldsymbol{\Delta}_3 \\ \boldsymbol{F}_3 &= \boldsymbol{k}_{32}^{②}\boldsymbol{\Delta}_2 + (\boldsymbol{k}_{33}^{②} + \boldsymbol{k}_{33}^{③})\boldsymbol{\Delta}_3 + \boldsymbol{k}_{34}^{③}\boldsymbol{\Delta}_4 \\ \boldsymbol{F}_4 &= \boldsymbol{k}_{43}^{③}\boldsymbol{\Delta}_3 + \boldsymbol{k}_{44}^{③}\boldsymbol{\Delta}_4 \end{aligned}\right\}$$

④原始刚度方程

将平衡方程写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{F}_4 = \begin{pmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{11}^{①} & \boldsymbol{k}_{12}^{①} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{k}_{21}^{①} & \boldsymbol{k}_{22}^{①} + \boldsymbol{k}_{22}^{②} & \boldsymbol{k}_{23}^{②} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{32}^{②} & \boldsymbol{k}_{33}^{②} + \boldsymbol{k}_{33}^{③} & \boldsymbol{k}_{34}^{③} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_{43}^{③} & \boldsymbol{k}_{44}^{③} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{\Delta}_3 = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \\ \hdashline \boldsymbol{\Delta}_4 = \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

上式可简写为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}$$

（5）原始刚度矩阵

①表达式

$$K=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34}\\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}^{①} & k_{12}^{①} & 0 & 0\\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①}+k_{22}^{②} & k_{23}^{②} & 0\\ 0 & k_{32}^{②} & k_{33}^{②}+k_{33}^{③} & k_{34}^{③}\\ 0 & 0 & k_{43}^{③} & k_{44}^{③}\end{pmatrix}$$

结构的原始刚度矩阵也称结构的总刚度矩阵，简称总刚。

它的每个子块都是 3×3 阶方阵，故 K 为 12×12 阶方阵。

②原始刚度矩阵中元素的物理意义

当其所在列对应的结点位移分量等于 1（其余结点位移分量均为零）时，其所在行对应的结点外力分量所应有的数值。

③性质

a．对称性；

b．奇异性。

④结构原始刚度矩阵的组成规律

把每个单元刚度矩阵的四个子块按其两个下标号码逐一送到结构原始刚度矩阵中相应的行和列的位置上去，就可得到结构原始刚度矩阵。

某单刚子块 k^e_{ij} 就应被送到总刚（以子块形式表示的）中第 i 行 j 列的位置上去。

④直接刚度法

直接刚度法是指利用坐标转换后的单刚子块对号入座而直接形成总刚的方法。

⑤总刚中子块的分布规律

将主对角线上的子块称为主子块，其余子块称为副子块；同交于一个结点的各杆件称为该结点的相关单元；而两个结点之间有杆件直接相联者称为相关结点。

（1）总刚中的主子块 K_{ij} 是由结点 i 的各相关单元的主子块叠加求得，即$K_{ii}=\sum k^e_{ii}$。

（2）总刚中的副子块 K_{im} 当 i、m 为相关结点时即为联结它们的单元的相应副子块，即 $K_{im}=k^e_{im}$；当 i、m 为非相关结点时即为零子块。

五、支承条件的引入

1．支承约束条件

（1）原始刚度方程中的未知量

建立图 10-1-6 所示刚架的原始刚度方程

$$\begin{matrix}\text{未知}\\ \text{已知}\\ \text{已知}\\ \text{未知}\end{matrix}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}^{①} & k_{12}^{①} & 0 & 0\\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①}+k_{22}^{②} & k_{23}^{②} & 0\\ 0 & k_{32}^{②} & k_{33}^{②}+k_{33}^{③} & k_{34}^{③}\\ 0 & 0 & k_{43}^{③} & k_{44}^{③}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\\ \Delta_4\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{已知}\\ \text{未知}\\ \text{未知}\\ \text{已知}\end{matrix}$$

在上式中，F_2、F_3 是已知的结点荷载，与之相应的 Δ_2、Δ_3，是待求的未知结点位移；F_1、F_4 是未知的支座反力，与之相应的 Δ_1、Δ_4 则是已知的结点位移。

（2）约束条件

由于结点 1、4 均为固定端，故支承约束条件为

$$\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

2．引入约束条件

（1）结构刚度方程

将约束条件代入原始刚度方程，可以得到引入支承条件后的结构刚度方程

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ \hdashline F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22}^{①} + k_{22}^{②} & k_{23}^{②} \\ \hdashline k_{32}^{②} & k_{33}^{②} + k_{33}^{③} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ \hdashline \Delta_3 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \hdashline F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{12}^{①} & 0 \\ \hdashline 0 & k_{43}^{③} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ \hdashline \Delta_3 \end{pmatrix}$$

简写为

$$F = K\Delta$$

（2）结构的刚度矩阵

结构的刚度矩阵是指从结构的原始刚度矩阵中删去与已知为零的结点位移对应的行和列而得到的矩阵，也称称缩减的总刚，用符号 K 表示。

3．求解未知位移

（1）当原结构内部为几何不变体系时，引入支承条件，用结构刚度方程求解任意刚体位移，此时结构刚度矩阵为非奇异矩阵。

（2）当原结构内部为几何可变体系时，不能求出任意刚体位移，此时结构刚度矩阵为奇异矩阵。

4．求单元的内力

单元两端的结点位移用 Δ^e 表示。

（1）整体坐标系中的杆端力

$$F^e = k^e \Delta^e$$

（2）局部坐标系中的杆端力

$$\overline{F}^e = TF^e = Tk^e \Delta^e$$

（3）局部坐标系中的杆端结点位移

$$\overline{\Delta}^e = T\Delta^e$$

六、非结点荷载的处理

1．非结点载荷转化为等效结点载荷

如图 10-1-7（a）所示刚架，可以分两步按叠加法来处理。

（1）与位移法一样，加上附加链杆和刚臂阻止所有结点的线位移和角位移，此时各单元有固端杆端力（简称固端力），附加链杆和刚臂上有附加反力和反力偶。由结点平衡可知，这些附加反力和反力偶的数值等于汇交于该结点的各固端力的代数和（图 10-1-7（b））。

（2）取消附加链杆和刚臂，将上述附加反力和反力偶反号后作为荷载加于结点上（图 10-1-7（c）），这些荷载称为原非结点荷载的等效结点荷载。

“等效”是指结构在非结点载荷或等效结点载荷作用下的结点位移是相等的。

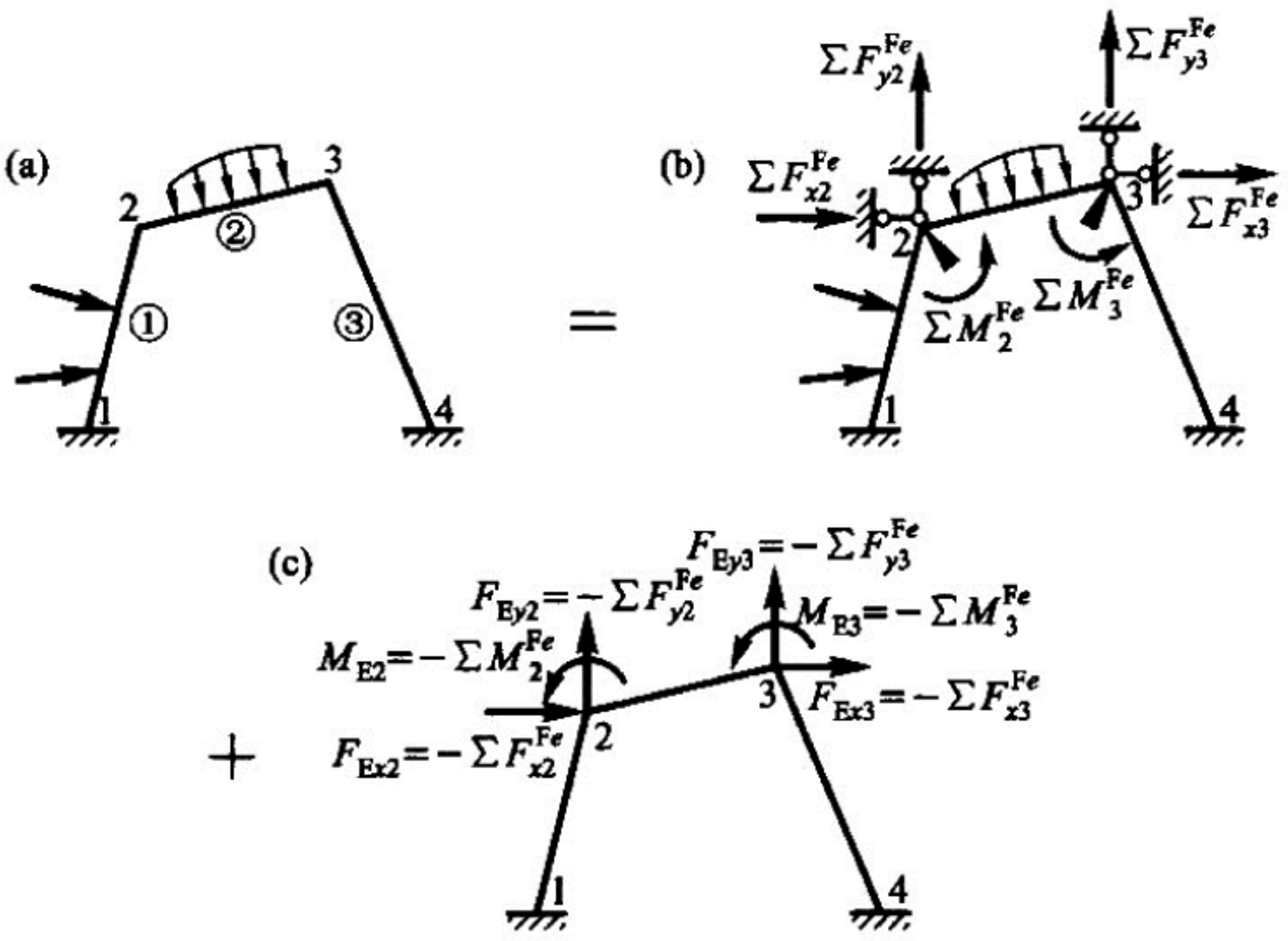


图 10-1-7

2．结点载荷的组成部分

①等效结点载荷

等效为结点的载荷是指非结点载荷作用单元时结点的固端力的反方向力。

②直接作用在结点的载荷

七、矩阵位移法的计算步骤及几点补充说明

1．矩阵位移法的计算步骤

（1）对结点和单元进行编号，选定整体坐标系和局部坐标系。

（2）计算各杆的单元刚度矩阵。

（3）形成结构原始刚度矩阵。

（4）计算固端力、等效结点荷载及综合结点荷载。

（5）引入支承条件，修改结构原始刚度方程。

（6）解算结构刚度方程，求出结点位移。

（7）计算各单元杆端力。

2．总刚的带宽与存储方式

（1）稀疏矩阵

稀疏矩阵是指具有大量零元素的矩阵。

（2）带状矩阵

带状矩阵是指非零元素通常集中在主对角线附近的斜带形区域内的矩阵。

（3）行（列）带宽

①定义

行（列）带宽是指在带状矩阵中，某行（列）从主对角线元素起至该行（列）最外一个非零元素止所包含的元素个数。

②计算公式

某行（列）带宽＝该行（列）结点位移分量号－最小相关结点位移分量号＋1

（4）矩阵的最大带宽

①定义

矩阵的最大带宽是指所有各行（列）带宽中的最大值。

②计算公式

a．通用公式

最大带宽＝相关结点位移分量号的最大差值＋1

b．当平面刚架所有结点均为刚结点，且结点编号与位移分量编号之间具有前述简单对应关系时

最大带宽＝（相关结点编号的最大差值＋1）×3

（5）存储方式

①满阵存储

在电算中，可以将总刚的全部元素都存储起来。

②等带宽存储

为了节省存储单元，对于对称带状矩阵，可以只存储其下半带（或上半带）在最大带宽范围内的元素。

③对于对称带状矩阵，每行（列）均只存储其下半带（或上半带）在该行（列）带宽内的元素。

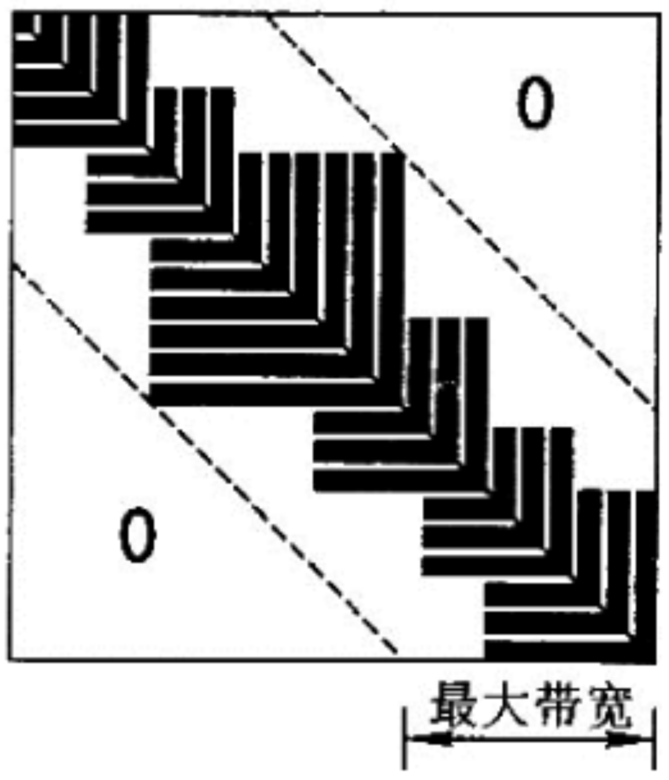


图 10-1-8

3．关于支承条件的引入

电算时支承条件的引入有以下两种方法

（1）置大数法

设结构的原始刚度方程（按元素表示的）为

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2j} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & K_{jj} & \cdots & K_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nj} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

设某一结点位移分量 δ_j 等于已知值 C_j（包括 C_j 等于零），则将总刚中的主元素 K_{jj} 换为一个充分大的数 N，同时将外力列向量中的对应分量 F_i 换为 NC_i。

第 j 个方程成为 $NC_j = K_{j1}\delta_1 + K_{j2}\delta_2 + \cdots + N\delta_j + \cdots + K_{jn}\delta_n$ 与包含 N 的两项相比，式中其余各项都充分地小，故上式可以解出 $\delta_i = C_j$。

（2）划零置一法

设 $\delta_j = C_j$（包括 C＝0），将总刚中的主元素 K_{jj} 换为 l，j 行和 j 列的其他元素均改为零；同时将外力列向量中的 F_j 改为 C_j，其余分量 F_j 改为 $F_i - K_{ij}c_j$。这样，修改后的方程组成为

$$\begin{pmatrix} F_1 - K_{1j}C_j \\ F_2 - K_{2j}C_j \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ F_n - K_{ni}C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & 0 & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

其中第 j 个方程为 $C_i=0\cdot\delta_1+0\cdot\delta_2+\cdots+1\cdot\delta_i+\cdots+0\cdot\delta_n$，即为给定的支承条件$\delta_j=C_j$。

4．先处理法与后处理法

（1）后处理法

把包括支座在内的全部结点位移分量都先看作是未知量而依次编号，每一单刚的所有元素都对号入座以形成总刚，然后再处理支承条件。

前面介绍的矩阵位移法就是后处理法，这种方法的优点是程序简单，适应性广，但这样形成的总刚阶数较高，占用存储量大。

（2）先处理法

先考虑支承条件，将已知的结点位移分量编号均用 0 表示，如图 10-1-9 所示（括号内依次为结点水平、竖向位移和角位移的编号），单刚中凡与 0 对应的行和列的元素均不送入总刚，这样便可直接形成缩减的总刚。

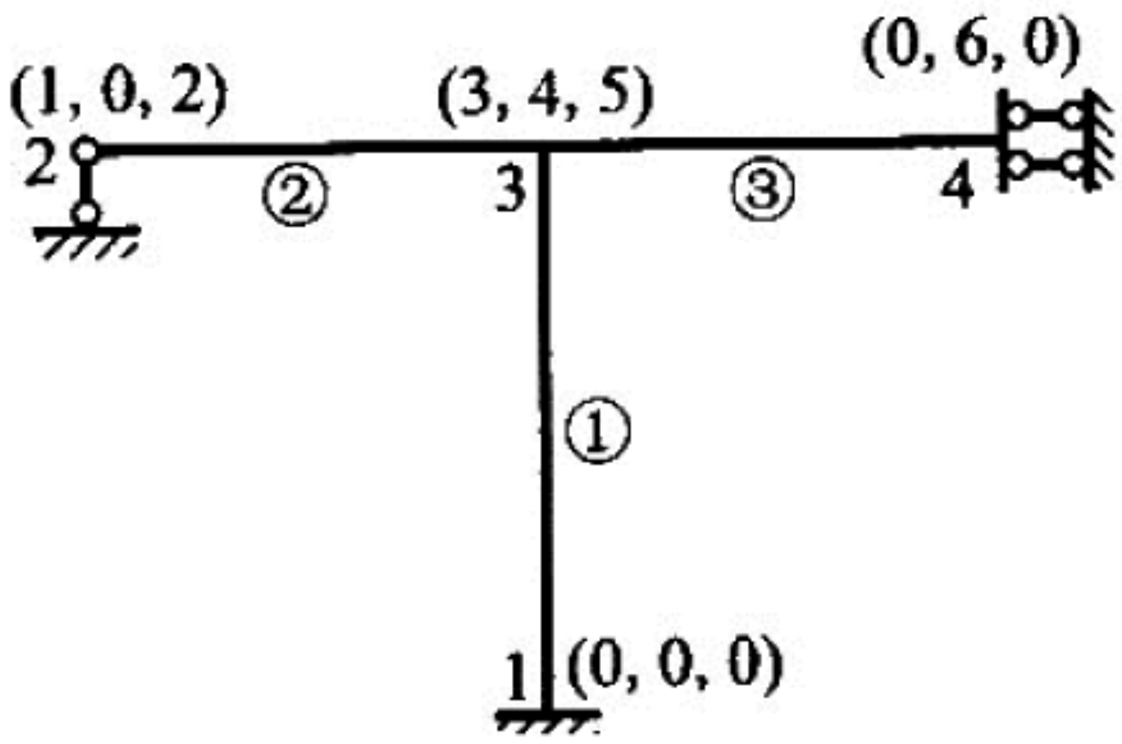


图 10-1-9

10.2　课后习题详解

复习思考题

1．矩阵位移法的基本思路是什么？

答：矩阵位移法的基本思路：

（1）单元分析

单元分析是指将结构先分解为有限个较小的单元，即离散化，在较小的范围内分析单元的内力与位移之间的关系，建立单元刚度矩阵或单元柔度矩阵。

（2）整体分析

整体分析将将单元分析中的各单元集合成原来的结构，要求各单元满足原结构的几何条件（包括支承条件、结点处的变形连续条件）和平衡条件，建立整个结构的刚度方程或柔度方程，以求解原结构的内力和位移。

（3）支承条件

引入支承条件，修改结构原始刚度方程。

（4）求解

解算结构刚度方程，求出结点位移，计算各单元杆端力。

2．试述矩阵位移法与传统位移法的异同。

答：矩阵位移法与传统位移法的异同点：

（1）相同点

传统位移法的基本原理，是以在小变形的基础的结构体系中，内力是可以叠加的，位移也是可以叠加的，而矩阵位移法是按传统位移法的基本原理运用矩阵计算内力和位移的方法。因此矩阵位移法和传统位移法的基本原理在实质上是一致的。

（2）不同点

①矩阵位移法中一般考虑杆件轴向变形的影响，传统位移法忽略杆件的轴向变形；

②矩阵位移法一般在计算机上进行计算，可以解决大型复杂问题；传统位移法的计算手段一般是手算，只用

来解决简单问题。

3．矩阵位移法中，杆端力、杆端位移和结点力、结点位移的正负号是如何规定的？

答：杆端力沿局部坐标系的$\bar{x}$、$\bar{y}$的正方向为正，杆端弯矩逆时针为正；杆端位移的正负同杆端力和弯矩。结点力沿整体坐标系 x、y 的正方向为正，结点力偶逆时针为正；结点位移的正负同结点力和力偶。

4．为何用矩阵位移法分析时，要建立两种坐标系？

答：因为单元刚度矩阵是建立在杆件的局部坐标系上的，但对于整体结构，各单元的局部坐标系可能不尽相同，在研究结构的几何条件和平衡条件时，需要选定一个统一的坐标系即为整体坐标系，另外按局部坐标系建立的单元刚度矩阵可以通过坐标转换到整体坐标系中，从而得到整体坐标系中的单元刚度矩阵。故建立两种坐标系使矩阵位移法的思路更清晰，物理意义更明确，且不会影响计算结果。

5．什么叫单元刚度矩阵？其每一元素的物理意义是什么？

答：（1）单元刚度矩阵是指杆端位移列向量到杆端力列向量的过渡矩阵。

（2）元素的物理意义：当其所在列对应的杆端位移分量等于 1（其余杆端位移分量均为零）时，所引起的其所在行对应的杆端力分量的数值。

6．结构的总刚度方程的物理意义是什么？总刚度矩阵的形成有何规律？其每一元素的物理意义是什么？

答：（1）结构总刚方程的物理意义：尚未进行支承条件处理的表示所有结点外力与结点位移之间的关系的平衡方程。

（2）总刚矩阵的形成规律：把每个单元刚度矩阵的四个子块按其两个下标号码逐一送到结构原始刚度矩阵中相应的行和列的位置上去，就可得到结构原始刚度矩阵，即各单刚子块“对号入座”。

(3）每一元素的物理意义：当其所在列对应的结点位移分量等于 1（其余结点位移分量均为零）时，其所在行对应的结点外力分量所应有的数值。

7．能否用结构的原始刚度方程求解结点位移？

答：不能用结构的原始刚度方程求解结点位移。原因如下：

因为原始刚度方程尚未考虑支撑条件，结构还可以有任意的刚体位移，因而原始刚度矩阵是奇异的，其逆矩阵不存在，故不能用原始刚度方程求解结点位移。

8．矩阵位移法计算中，引入支承条件的目的是什么？

答：矩阵位移法计算中，引入支撑条件的目的是得到结构的刚度方程，即位移法的典型方程，从而可以求解出未知的结点位移和结构未知的内力。

9．什么叫等效结点荷载？如何求得？等效是指什么效果相等？

答：（1）等效结点荷载是指非结点载荷作用单元时结点的固端力的反方向力。

（2）等效结点荷载的求解步骤：

①与位移法一样，加上附加链杆和刚臂阻止所有结点的线位移和角位移，此时各单元有固端杆端力（简称固端力），附加链杆和刚臂上有附加反力和反力偶。由结点平衡可知，这些附加反力和反力偶的数值等于汇交于该结点的各固端力的代数和；

②取消附加链杆和刚臂，将上述附加反力和反力偶反号后作为荷载加于结点上，这些荷载就是原非结点荷载的等效结点荷载。

（3）等效是指结构在非结点载荷和等效结点载荷作用下的结点位移是相等的。

10．能否用矩阵位移法（以及传统位移法）计算静定结构？它与计算超静定结构有何不同？

答：（1）能用矩阵位移法（以及传统位移法）计算静定结构。

（2）与计算超静定结构时的不同点：

矩阵位移法在计算超静定结构时对于是否考虑受弯杆的轴向变形对计算结果的误差有一定的影响，而在计算静定结构时则不需要考虑这种情况带来的结果的波动。

习题

10-1　图 10-2-1 的单元若 j 端为铰结（即 $\overline{M}_j^e=0$），试写出其单元刚度矩阵。

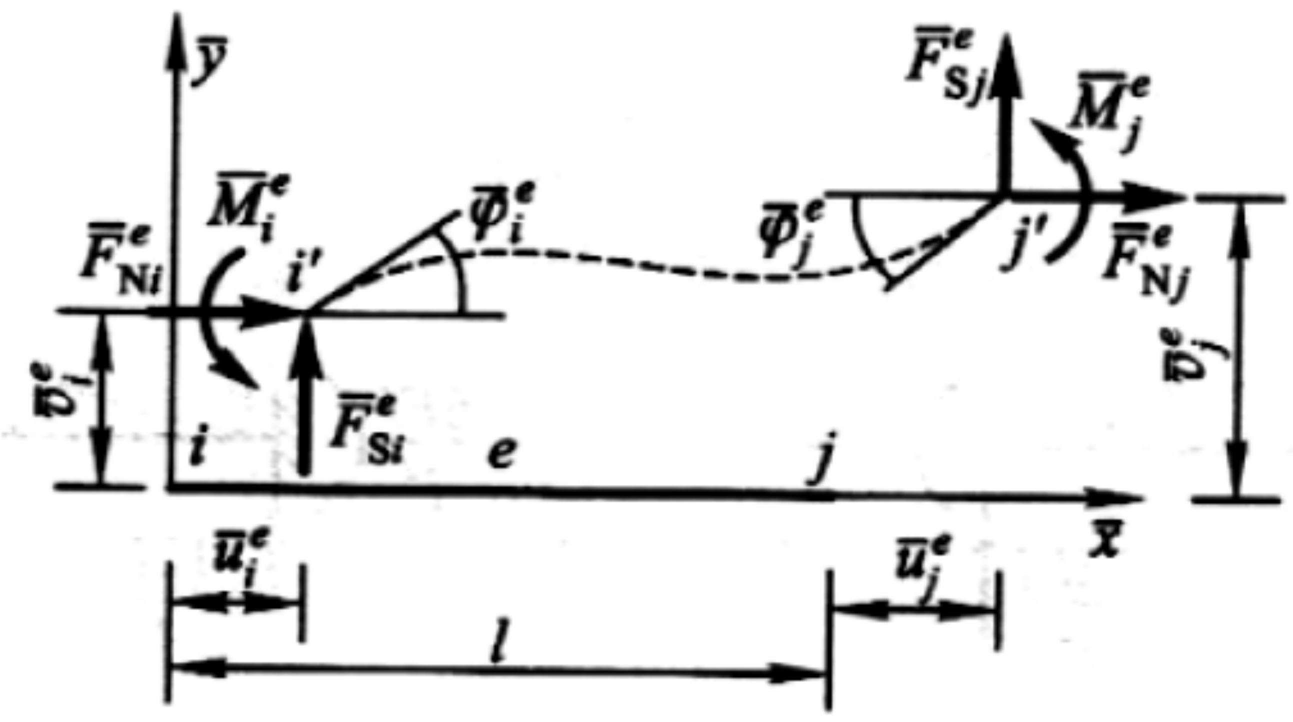


图 10-2-1（题 10-1）

解：将 j 端改为铰接，则$\overline{M_j}^e=0$，则第六行第六列元素均为零，则可以忽略它们，故列出 5×5 的单元刚度矩阵如下

$$
\begin{array}{c}
\quad \overline{v_i}^e \quad \overline{v_i}^e \quad \overline{u_i}^e \quad \overline{u_j}^e \quad \overline{u_j}^e \\
\overline{K^e}=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\
0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\
0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{-3EI}{l^2} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\
0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
F_{\overline{Ni}}{}^e \\ F_{\overline{si}}{}^e \\ \overline{M_i}^e \\ \overline{F_{Nj}}^e \\ \overline{F_{sj}}^e
\end{array}
\end{array}
$$

也可以将其写成 6×6 阶的矩阵，其中对应于 $\overline{M}_j{}^e$ 的第六行和对应于 $\overline{\varphi}_j{}^e$ 的第六列均为零元素。

10-2　试对图示刚架的结点和单元进行编号，并以子块形式写出结构的原始刚度矩阵。

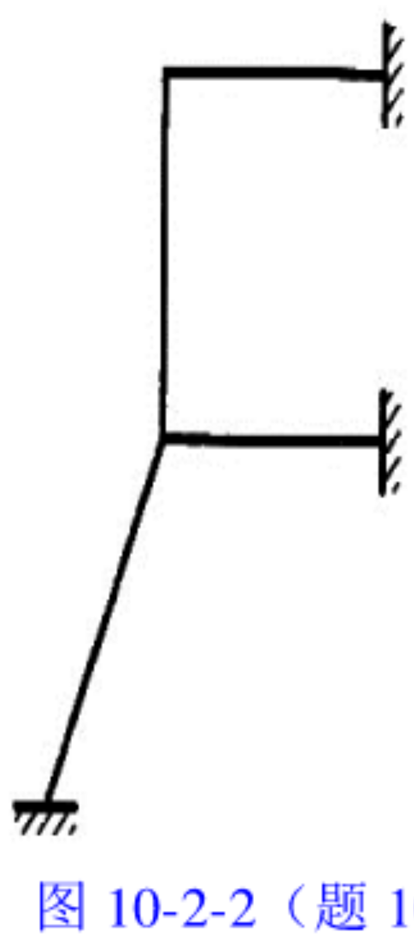


图 10-2-2（题 10-2）

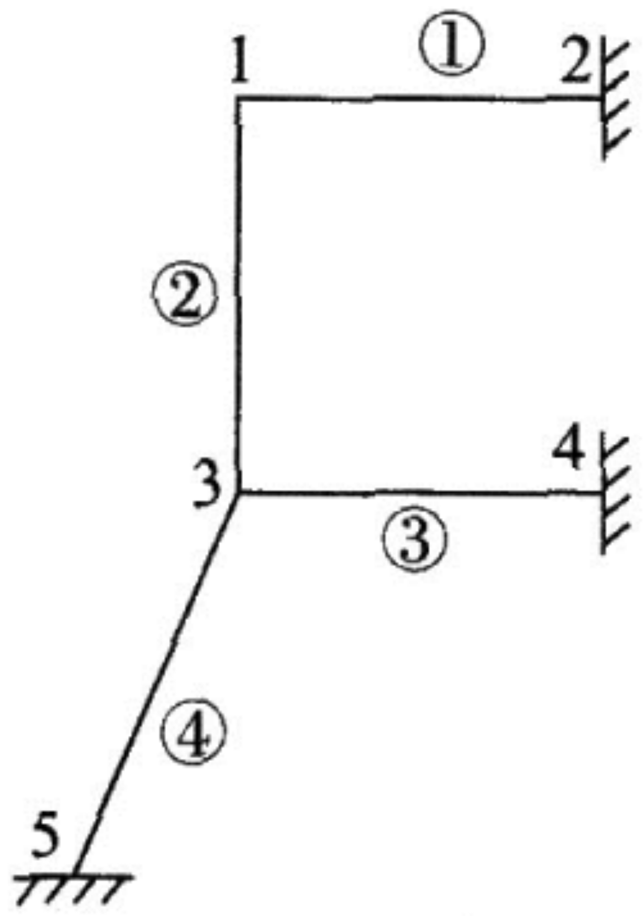


图 10-2-3

解：结构的原始刚度矩阵随结点、单元编号不同而异，例如对于图 10-2-3 所示编号，可写出原始刚度矩阵如下

$$K=\begin{bmatrix} k_{11}^{①}+k_{11}^{②} & k_{12}^{①} & k_{13}^{②} & 0 & 0 \\ k_{21}^{①} & k_{22}^{①} & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{②} & 0 & k_{33}^{②}+k_{34}^{③}+k_{33}^{④} & k_{34}^{③} & k_{35}^{④} \\ 0 & 0 & k_{43}^{③} & k_{44}^{③} & 0 \\ 0 & 0 & k_{53}^{④} & 0 & k_{55}^{④} \end{bmatrix}$$

10-3　试以子块形式写出图 10-2-4 示刚架对应的原始总刚度矩阵中的下列子块$\boldsymbol{K}_{55}$，$\boldsymbol{K}_{58}$，$\boldsymbol{K}_{53}$，$\boldsymbol{K}_{12}$。

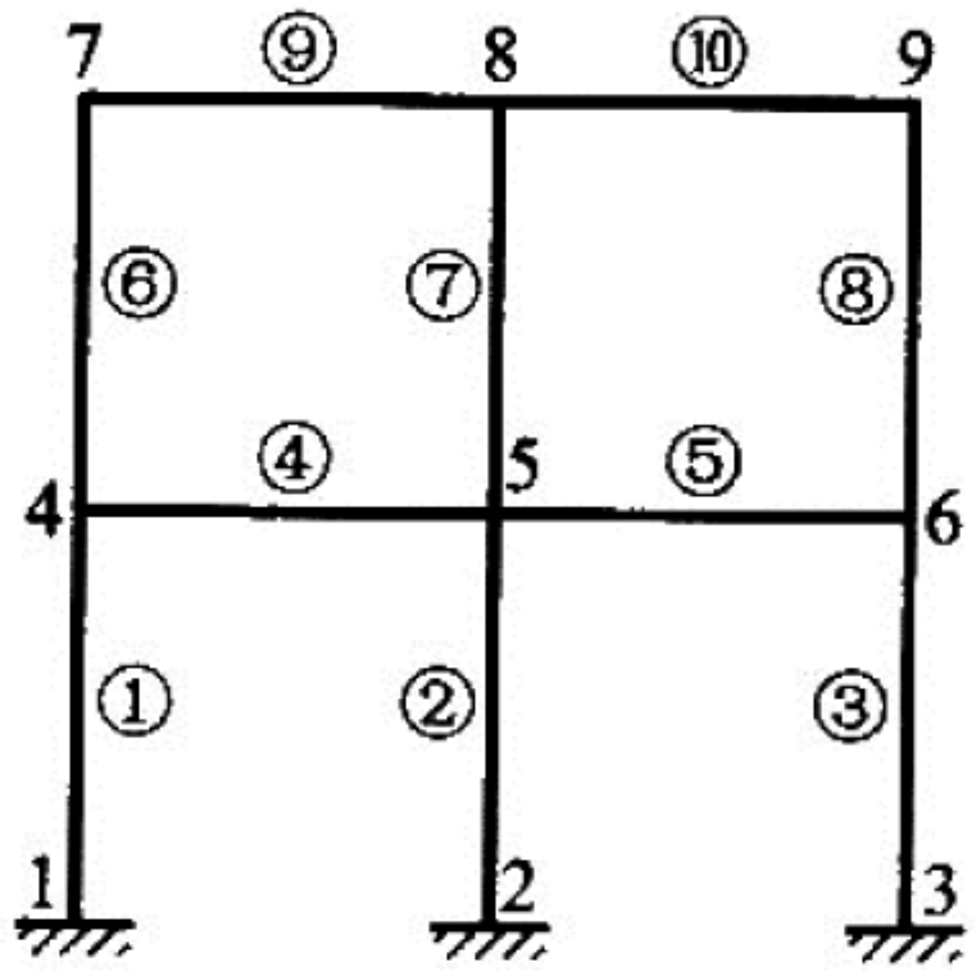


图 10-2-4（题 10-3）

答：K_{55} 为主子块，$K_{55}=\sum K_{ii}^{e}=K_{55}^{②}+K_{55}^{④}+K_{55}^{⑤}+K_{55}^{⑦}$；

K_{58} 为副子块，5，8 为相关结点，故 $K_{58}=K_{58}^{⑦}$；

K_{12}，1，2 为不相关结点，故 $K_{12}=0$；

K_{53}，5，3 也为不相关结点，故 $K_{53}=0$。

10-4　图 10-2-5 所示刚架各杆 E、I、A 相同，且 $A=\frac{1\,000I}{l^2}$ 试用矩阵位移法求其内力，并与忽略轴向变形影响的结果（可用力矩分配法计算）进行比较。（提示：为了计算方便，可暂设 E=I=l=q=1，待求出结点线位移、角位移、杆端轴力和剪力、弯矩后，再分别乘上 $\frac{ql^4}{EI}$、$\frac{ql^3}{EI}$、ql、ql^2 即可。）

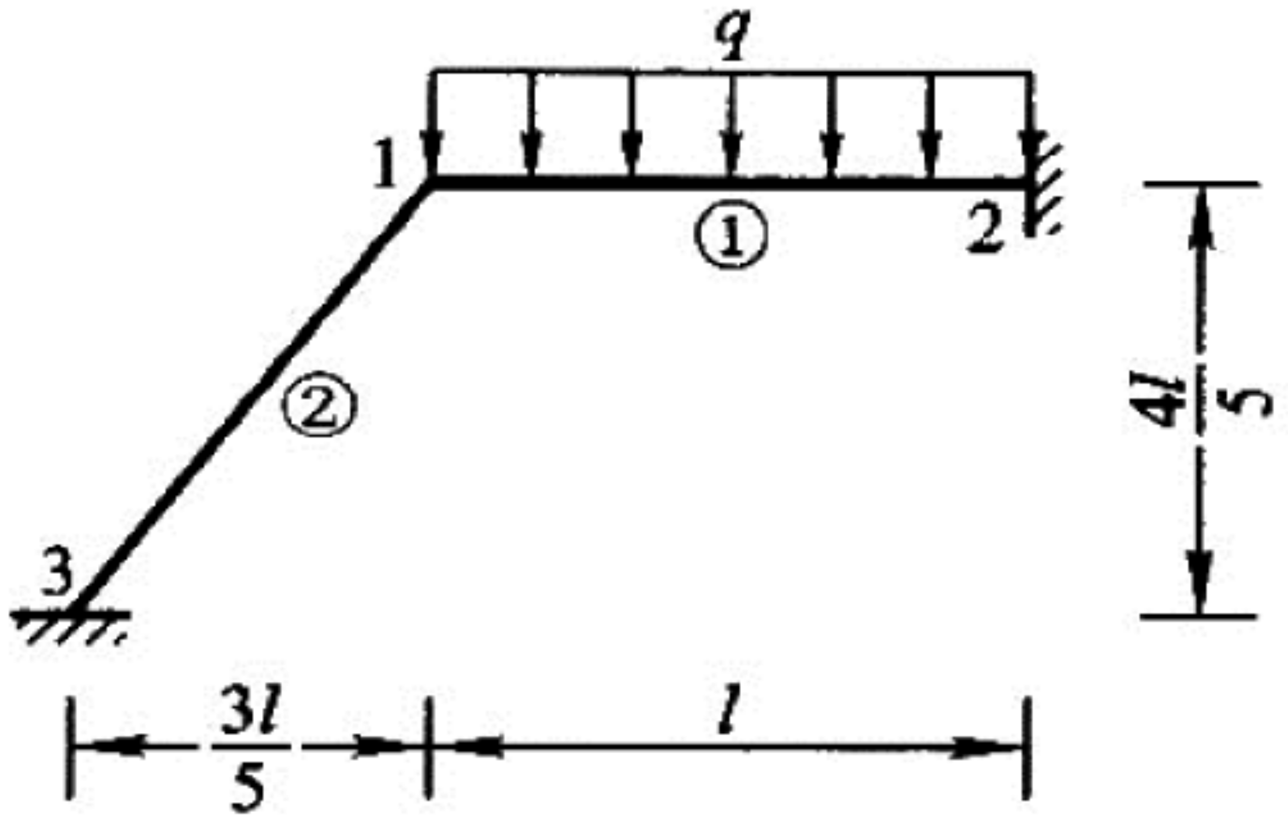


图 10-2-5（题 10-4）

解：对于单元①：α =0

$$K^{①}=\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \end{matrix}$$

（列分块：1、2）

单元 ②：$\cos\alpha=-0.6$，$\sin\alpha=-0.8$

$$K^{②}=\begin{bmatrix} 367.68 & 474.24 & 4.8 & -367.68 & -474.24 & 4.8 \\ 474.24 & 644.32 & -3.6 & -474.24 & -644.32 & -3.6 \\ 4.8 & -3.6 & 4 & -4.8 & 3.6 & 2 \\ -367.68 & -474.24 & -4.8 & 367.68 & 474.24 & -4.8 \\ -474.24 & -644.32 & 3.6 & 474.24 & 644.32 & 3.6 \\ 4.8 & -3.6 & 2 & -4.8 & 3.6 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix}$$

（列分块：1、3）

原始总刚度矩阵 K 如下

$$K=\begin{bmatrix} 1367.68 & 474.24 & 4.8 & -1000 & 0 & 0 & -367.58 & -474.24 & 4.8 \\ 474.24 & 656.32 & 2.4 & 0 & -12 & 6 & -474.24 & -644.32 & -3.6 \\ 4.8 & 2.4 & 8 & 0 & -6 & 2 & -4.8 & 3.6 & 2 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -367.68 & -474.24 & -4.8 & 0 & 0 & 0 & 367.68 & 474.24 & -4.8 \\ -474.24 & -644.32 & 3.6 & 0 & 0 & 0 & 474.24 & 644.32 & 3.6 \\ 4.8 & -3.6 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4.8 & 3.6 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix}$$

（列分块：1、2、3）

固端力如下

$$\overline{F}_F^{\textcircled{1}}=\begin{Bmatrix}\overline{F}_{F1}^{\textcircled{1}}\\ \overline{F}_{F2}^{\textcircled{1}}\end{Bmatrix}=\left\{\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{12}\\ \hline 0\\ \frac{1}{2}\\ -1/12\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\ \\ \\ \\ 2\\ \\ \end{array},F_F^{\textcircled{1}}=\begin{Bmatrix}F_{F1}^{\textcircled{1}}\\ F_{F2}^{\textcircled{2}}\end{Bmatrix}=\left\{\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{12}\\ \hline 0\\ \frac{1}{2}\\ -1/12\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\ \\ \\ \\ 2\\ \\ \end{array}$$

$$\overline{F}_F^{\textcircled{2}}=\begin{Bmatrix}\overline{F}_{F1}^{\textcircled{2}}\\ \overline{F}_{F3}^{\textcircled{2}}\end{Bmatrix}\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\},F_F^{\textcircled{2}}=\begin{Bmatrix}\overline{F}_{F1}^{\textcircled{2}}\\ F_{F2}^{\textcircled{2}}\end{Bmatrix}=\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\ \\ \\ \\ 2\\ \\ \end{array}$$

结点 1 上的综合结点荷载如下

$$P_{p1}=P_{D1}+P_{E1}=P_{D1}-\sum F_{F1}^{\textcircled{1}}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{12}\end{Bmatrix}$$

支承条件如下

$$u_2=0,v_2=0,\varphi_2=0,u_3=0,v_3=0,\alpha_3=0$$

删去对应的列和行后，得整体刚度方程并求解出未知位移如下

$$\begin{Bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1367.68 & 474.24 & 4.8\\ 474.24 & 656.32 & 2.4\\ 4.8 & 2.4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ \varphi_1\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ \varphi_1\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{Bmatrix}0.38342(\times ql^4/(EI))\\ -1.00104(\times ql^4/(EI))\\ -10.34641(\times ql^3/(EI))\end{Bmatrix}$$

进一步计算出未知力如下

$$\overline{F}^{①}=\left\{\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{12}\\ \hline 0\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{12}\end{array}\right\}+\left[\begin{array}{ccc:ccc}1000&0&0&-1000&0&0\\0&12&6&0&-12&6\\0&6&4&0&-6&2\\ \hdashline -1000&0&0&1000&0&0\\0&-12&-6&0&12&-6\\0&6&2&0&-6&4\end{array}\right]10^{-3}\left\{\begin{array}{c}0.38342\\-1.00104\\-10.34641\\0\\0\\0\end{array}\right\}$$

$$=10^{-3}\left\{\begin{array}{l}383.42(\times ql)\\425.91(\times ql)\\35.94(\times ql^2)\\ \hline -383.42(\times ql)\\574.09(\times ql)\\-110.03(\times ql)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\\ \\ \\2\end{array}$$

$$\overline{F}^{②}=\left\{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{array}\right\}+T\times10^{-3}\left\{\begin{array}{ccc:ccc}367.68&474.24&4.8&-367.68&-474.24&4.8\\474.24&644.32&-3.6&-474.24&-644.32&-3.6\\4.8&-3.6&4&-4.8&3.6&2\\ \hdashline -367.68&-474.24&-4.8&367.68&474.24&-4.8\\-474.24&-644.32&3.6&474.24&644.32&3.6\\4.8&-3.6&2&-4.8&3.6&4\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}0.3834\\-1.00104\\-10.34641\\0\\0\\0\end{array}\right\}$$

$$=\left[\begin{array}{cccccc}-0.6&-0.8&0&0&0&0\\0.8&-0.6&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-0.6&-0.8&0\\0&0&0&0.8&-0.6&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right]10^{-3}\left[\begin{array}{c}383.43\\-425.91\\-35.94\\383.42\\425.91\\-15.25\end{array}\right]=\left\{\begin{array}{l}570.78(\times ql)\\-51.19(\times ql)\\-35.94(\times ql^2)\\ \hline -570.78(\times ql)\\51.19(\times ql)\\-15.25(\times ql^2)\end{array}\right\}\begin{array}{l}1\\ \\ \\3\end{array}$$

忽略轴向变形影响时，$M_1^{①}=41.7\times10^{-3}ql^2$，可见对于本题忽略轴向变形影响误差甚大。

10-5　试用矩阵位移法计算连续梁的内力。EI＝常数。

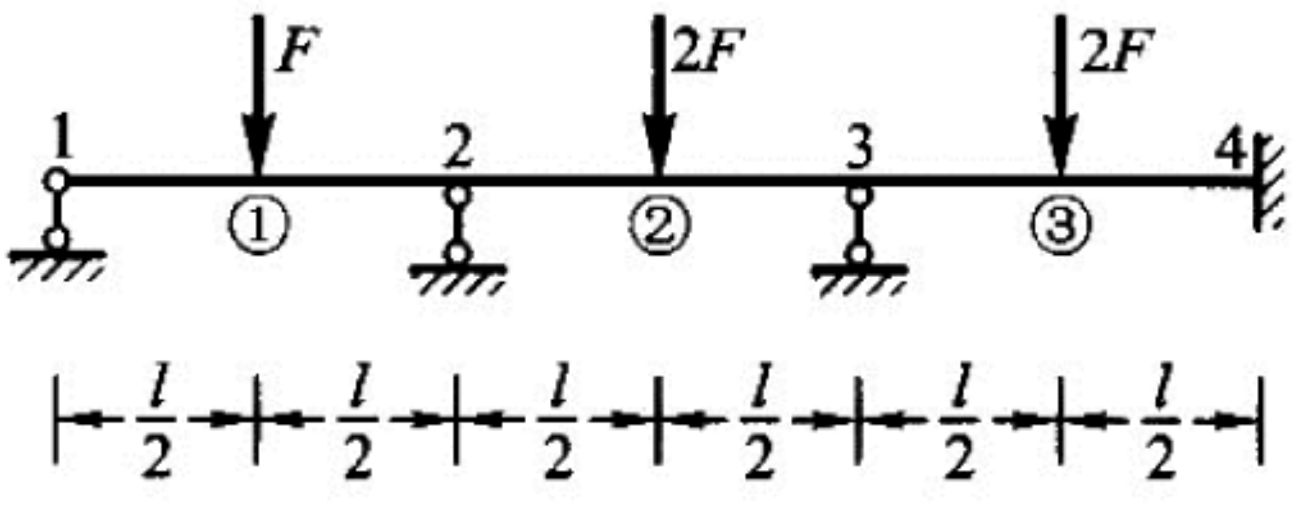


图 10-2-6（题 10-5）

解：各单元单元刚度矩阵 K^e 均相同，如下

$$K^e=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{12EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ \hdashline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{array}\right]$$

考虑支承条件不计轴向变形有

$$u_1=v_1=u_2=v_2=u_3=v_3=u_4=v_4=\varphi_4=0$$

删去相应行列得到总刚度矩阵 K

$$\begin{array}{c}\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3\\ K=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{bmatrix}\begin{matrix}\mathbf{F_1}\\ \mathbf{F_2}\\ \mathbf{F_3}\end{matrix}\end{array}$$

杆端力只计算杆端弯矩，固端弯矩为

$$\overline{F_F}^{①}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\qquad \overline{F_F}^{②}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{Bmatrix}\begin{matrix}2\\ 3\end{matrix}\qquad \overline{F_F}^{③}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{Bmatrix}\begin{matrix}3\\ 4\end{matrix}$$

等效结点只计算力偶荷载，有

$$\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}=Fl\begin{Bmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}\\ 0\end{Bmatrix}$$

则总刚度方程为

$$Fl\begin{Bmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}\\ 0\end{Bmatrix}=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{Bmatrix}$$

解得

$$\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{Bmatrix}=\frac{pl^2}{416EI}\begin{Bmatrix}-11\\ -4\\ 1\end{Bmatrix}$$

杆端弯矩为

$$\overline{F}^{①}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\frac{Fl^2}{416EI}\begin{Bmatrix}-11\\-4\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}52\\-52\end{Bmatrix}+\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}-52\\-38\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{208}\begin{Bmatrix}0\\-45\end{Bmatrix}$$

$$\overline{F}^{②}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\frac{Fl^2}{416EI}\begin{Bmatrix}-4\\1\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}104\\-104\end{Bmatrix}+\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}-14\\-4\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{208}\begin{Bmatrix}45\\-54\end{Bmatrix}$$

$$\overline{F}^{③}=Fl\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\frac{Fl^2}{416EI}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}104\\-104\end{Bmatrix}+\frac{Fl}{416}\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}=\frac{Fl}{208}\begin{Bmatrix}54\\-51\end{Bmatrix}$$

10-6　试用矩阵位移法求图示桁架各杆内力。单元①、②的截面积为 A，单元③的截面积为 2A，各杆 E 相同。

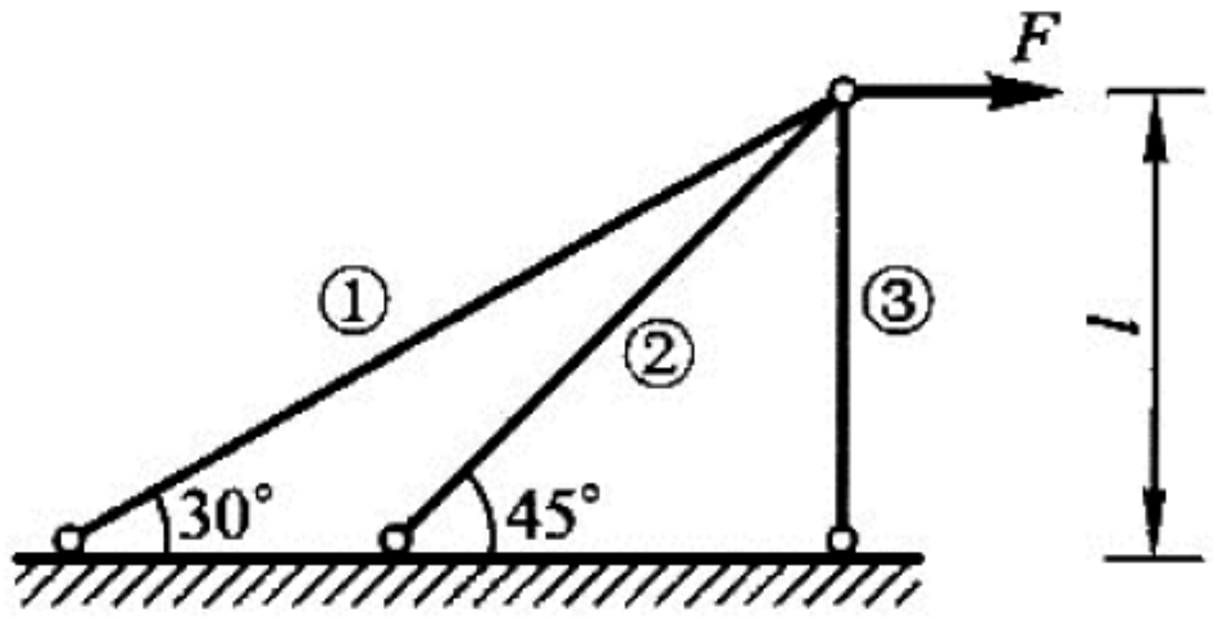


图 10-2-7（题 10-6）

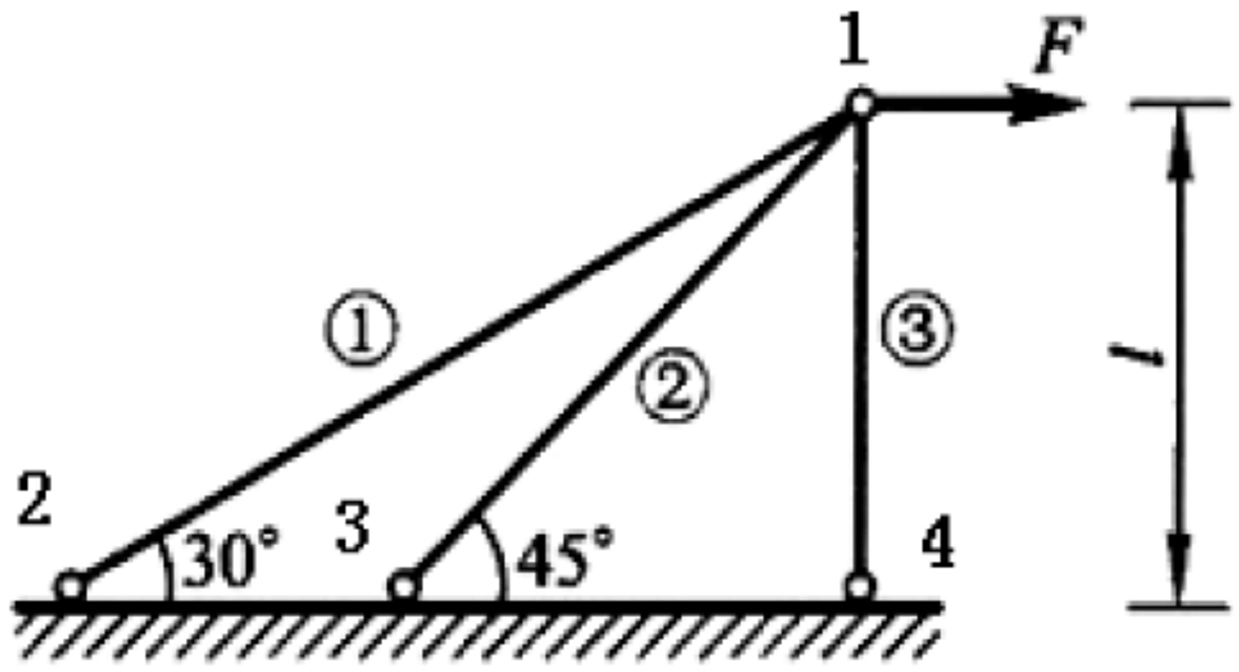


图 10-2-8

解：对各桁架编号如图 10-2-8 所示，写出单元刚度矩阵如下

$$K^{①}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \sqrt{3}/8 & -\frac{3}{8} & -\sqrt{3}/8 \\ \sqrt{3}/8 & \frac{1}{8} & -\sqrt{3}/8 & -\frac{1}{8} \\ -3/8 & -\sqrt{3}/8 & 3/8 & \sqrt{3}/8 \\ -\sqrt{3}/8 & -1/8 & \sqrt{3}/8 & 1/8 \end{bmatrix}\begin{matrix}2\\ \\ \\1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}2 & & 1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}3 & & 1\end{matrix}$$

$$K^{②}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/8 & 1/8 & -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\ \\ \\1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}4 & & 1\end{matrix}$$

$$K^{③}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix}4\\ \\ \\1\end{matrix}$$

引入支承条件后有

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 0.72855 & 0.57006 \\ 0.57006 & 2.47855 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

解得杆端位移如下

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}=\frac{Fl}{EA}\begin{Bmatrix} 1.67381 \\ -0.38497 \end{Bmatrix}$$

进一步计算得到个杆端力如下

$$\overline{F}^{①}=TK^{①}\Delta^{①}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}K^{①}\frac{Fl}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.67381 \\ -0.38497 \end{Bmatrix}=F\begin{Bmatrix} -0.6285 \\ 0 \\ 0.6285 \\ 0 \end{Bmatrix}\text{拉}$$

$$\overline{F}^{②}=TK^{②}\Delta^{②}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}K^{②}\frac{Fl}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.67381 \\ -0.38497 \end{Bmatrix}=F\begin{Bmatrix} -0.6442 \\ 0 \\ 0.6442 \\ 0 \end{Bmatrix}\text{拉}$$

$$\overline{F}^{③}=TK^{③}\Delta^{③}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}K^{③}\frac{Fl}{EA}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.67381 \\ -0.38497 \end{Bmatrix}=F\begin{Bmatrix} 0.7699 \\ 0 \\ -0.7699 \\ 0 \end{Bmatrix}\text{压}$$

即各杆轴力（以拉力为正）为

$$\begin{bmatrix} F_N{}^{①} \\ F_N{}^{②} \\ F_N{}^{③} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.629 \\ 0.644 \\ -0.770 \end{bmatrix} F$$

10-7　图 10-2-10 所示桁架各杆 EA 相同，试用矩阵位移法计算其内力。

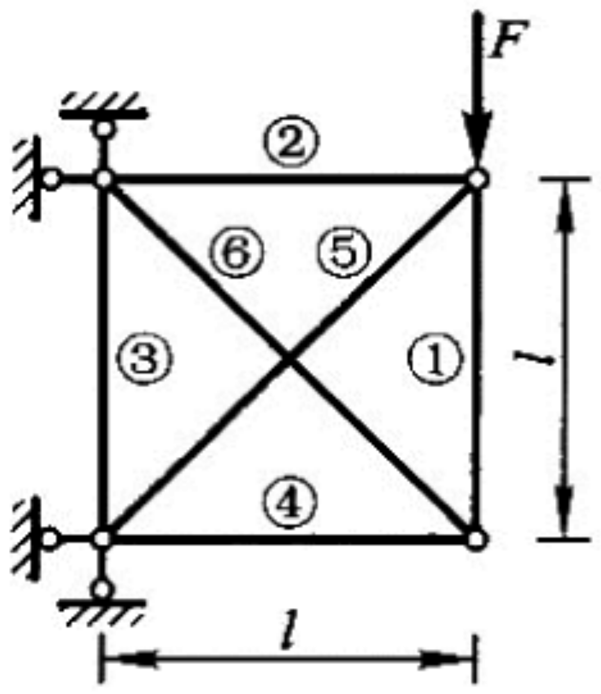


图 10-2-9（题 10-7）

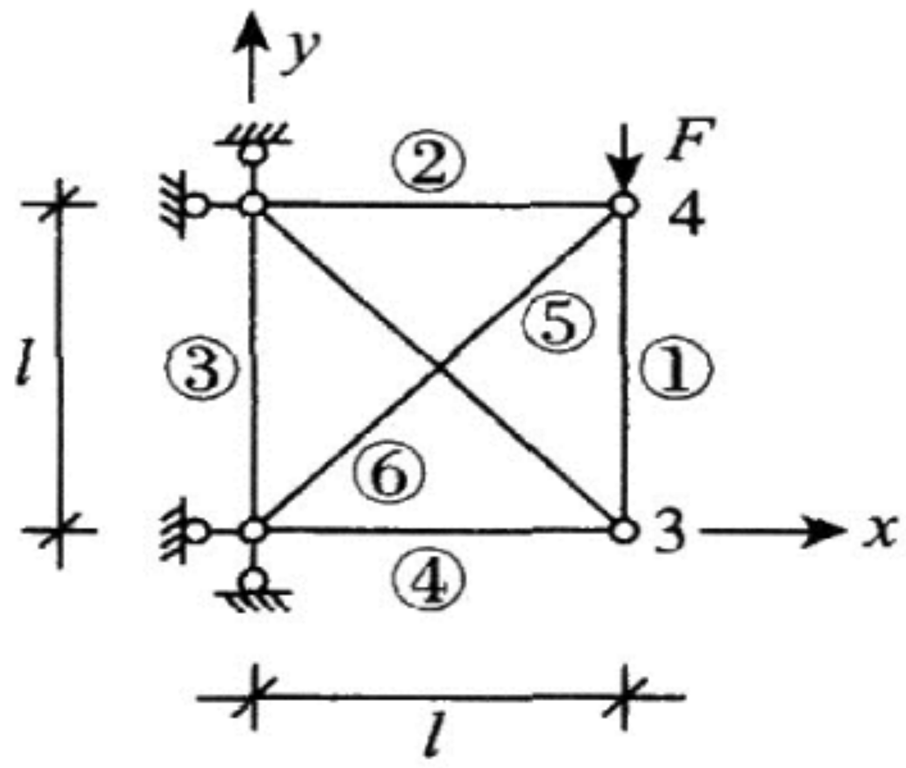


图 10-2-10

解：标出各桁架杆的结点编号如图 10-2-10 所示，并写出各杆刚度如下

$$K^{①}=K^{③}=\frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ \\ 4 & 2 \end{array} \qquad K^{②}=K^{④}=\frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \\ 4 & 3 \end{array}$$

$$K^{⑤}=\frac{EA}{l}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 4 \end{array}, K^{⑥}=\frac{EA}{l}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ 3 \end{array}$$

引入支承条件后，写出结构的刚度方程并解出杆端位移如下

$$\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline 0\\-F\end{array}\right\}=\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc}1.35355&-0.35355&0&0\\-0.35355&1.35355&0&-1\\ \hdashline 0&0&1.35355&0.35355\\0&-1&0.35355&1.35355\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}u_3\\v_3\\ \hdashline u_4\\v_4\end{array}\right]$$

解得

$$\left\{\begin{array}{c}u_3\\v_3\\u_4\\v_4\end{array}\right\}=\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}-0.4422\\-1.6931\\ \hline 0.5578\\-2.1353\end{array}\right\}$$

进一步计算得到各杆的杆端力如下

$$\overline{F}^{①}=\left[\begin{array}{cc:cc}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{array}\right]\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\ \hdashline 0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}-0.4422\\-1.6931\\0.5578\\-2.1353\end{array}\right\}=F\left\{\begin{array}{c}0.4422\\0\\ \hline -0.4422\\0\end{array}\right\}\text{压}$$

$$\overline{F}^{②}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\ \hdashline -1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\0.5578\\-2.1353\end{array}\right\}=F\left\{\begin{array}{c}-0.5578\\0\\ \hline 0.5578\\0\end{array}\right\}\text{拉}$$

$$\overline{F}^{③}=\left[\begin{array}{cc:cc}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{array}\right]\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\ \hdashline 0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline 0\\0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline 0\\0\end{array}\right\}\text{压}$$

$$\overline{F}^{④}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\ \hdashline -1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline -0.1422\\-1.6931\end{array}\right\}=F\left\{\begin{array}{c}0.4422\\0\\ \hline -0.4422\\0\end{array}\right\}\text{压}$$

$$\overline{F}^{⑤}=\left[\begin{array}{cc:cc}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0&0\\-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0&0\\ \hdashline 0&0&\sqrt{2}/2&\sqrt{3}/2\\0&0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{array}\right]\frac{EA}{l}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\ \hdashline -1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline 0.5578\\-2.1353\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}0.7888\\0\\ \hline -0.7888\\0\end{array}\right\}\text{(压)}$$

$$\overline{F}^{⑥}=\left[\begin{array}{cc:cc}\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2&0&0\\\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0&0\\ \hdashline 0&0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\0&0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{array}\right]\frac{EA}{l}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\begin{array}{cc:cc}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\ \hdashline -1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{array}\right]\frac{Fl}{EA}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\ \hline -0.4422\\-1.6931\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c}-0.6254\\0\\ \hline 0.6254\\0\end{array}\right\}\text{(拉)}$$

故各杆轴力（以拉力为正）为

$$\begin{Bmatrix} F_N^{①} \\ F_N^{②} \\ F_N^{③} \\ F_N^{④} \\ F_N^{⑤} \\ F_N^{⑥} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.442 \\ 0.558 \\ 0 \\ -0.442 \\ -0.789 \\ 0.625 \end{Bmatrix} F$$

10-8　欲使总刚的最大带宽最小，则对图示刚架的结点应如何编号？

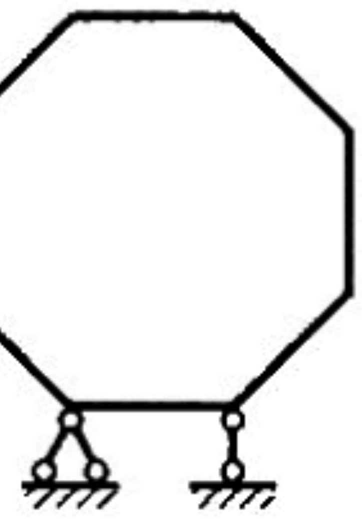


图 10-2-11（题 10-8）

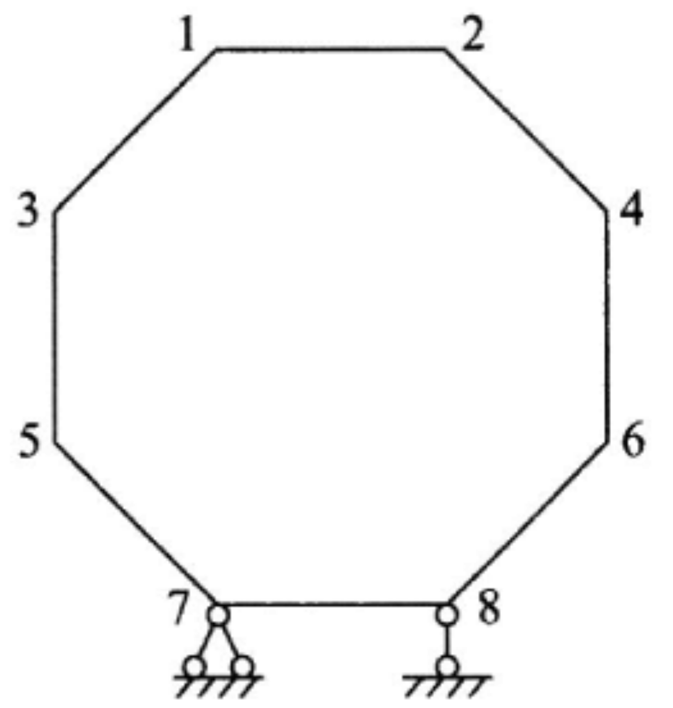


图 10-2-12

答：欲使总刚的最大带宽最小，须使相关结点编号的最大差值最小，故编号方式如图 10-2-12 所示。

10-9　对图 10-2-13 所示刚架的结点和单元编号，所有铰结端转角均作基本未知量。试对所有结点位移分量编号，并列出各单元的定位向量。

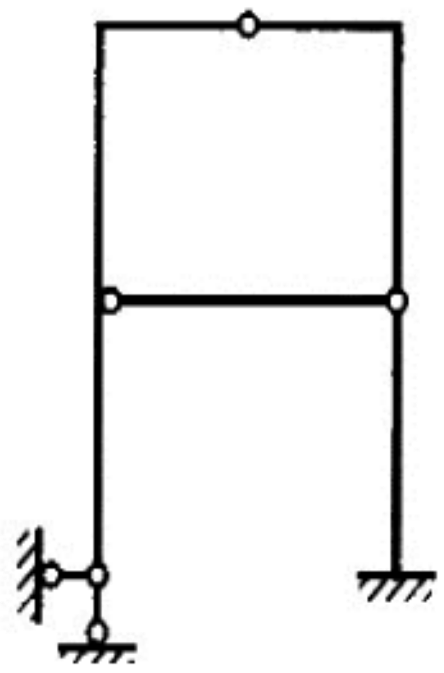


图 10-2-13（题 10-9）

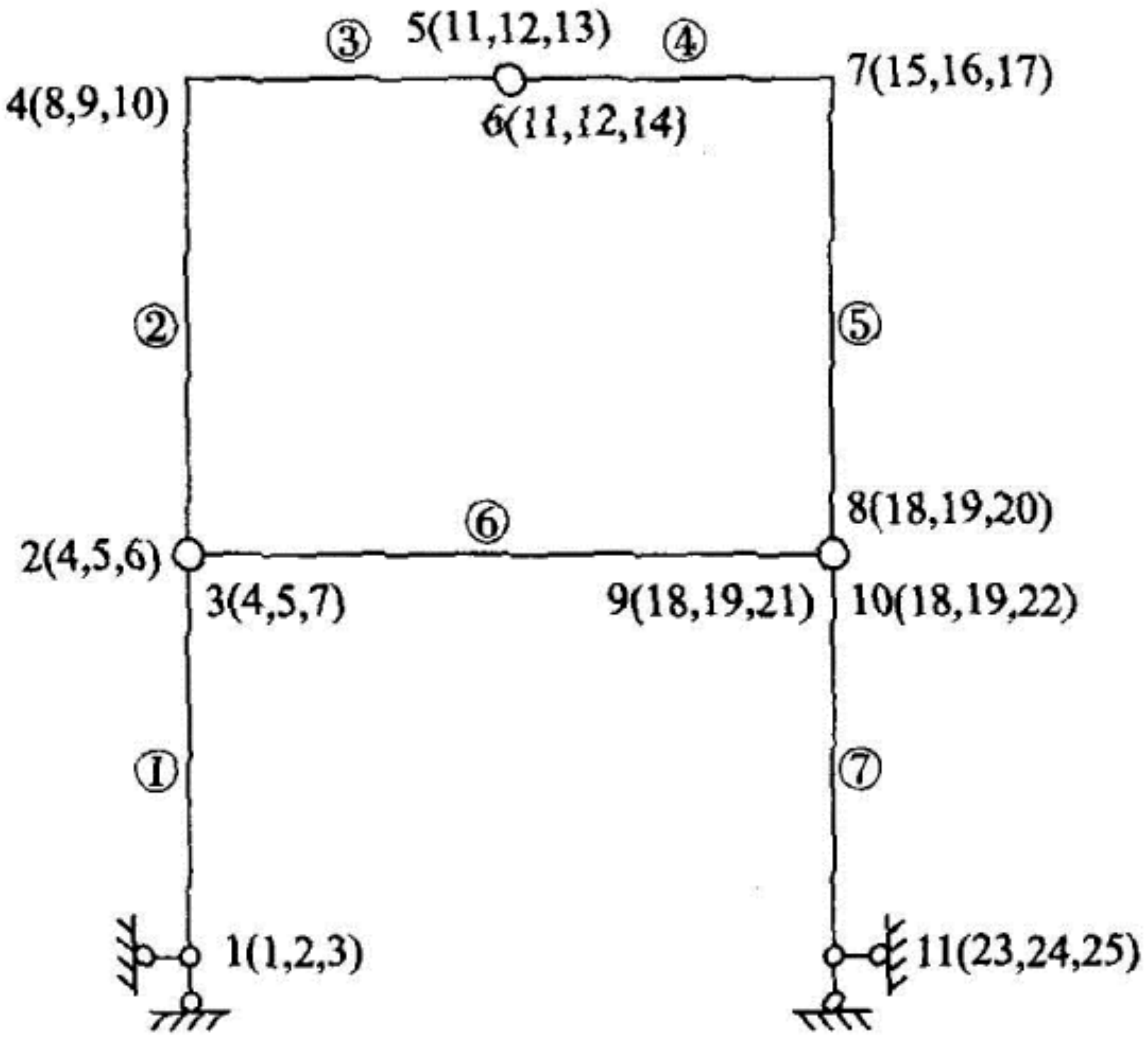


图 10-2-14

答：所有铰结端转角均作基本未知量，结点位移分量的编号以及各单元的定位向量标于图 10-2-14 中。

10.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．图 10-3-1 所示结构，三杆的线刚度分别为 i、i、2i。用位移法计算时，若取结点 1 的转角为 Z_1（顺时针），取结点 1 的竖向位移为 $Z_2(\downarrow)$，则位移法方程的系数 r_{11}=_____，$r_{12}=r_{21}$=_____，r_{22}=_____。[浙江大学 2007 研]

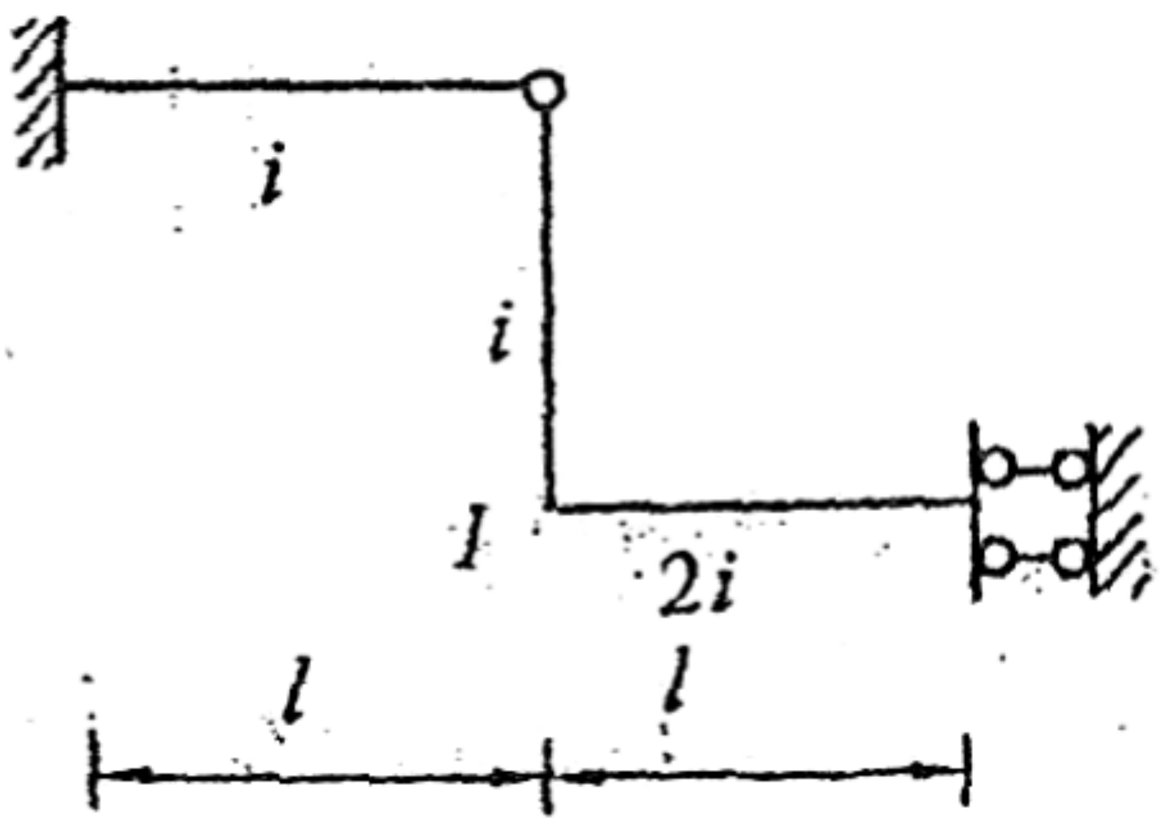


图 10-3-1

【答案】$5i$；0；$\frac{3i}{l^3}$

【解析】位移法方程的系数 r_{11} 是指结点 1 发生单位转角时在 1 点处产生的弯矩值，故 $r_{11}=2i+3i=5i$；系数 r_{12} 是指结点 1 发生单位竖向位移时在 1 点处产生的弯矩的值，显然为 0；系数 r_{22} 是指结点 1 发生单位竖向位移时在 1 点处产生的竖向力的值，取竖向杆为隔离体，右侧水平杆无竖向内力，左侧水平杆竖向内力为 $3i/l^3$，故根据竖向力的平衡可知 $r_{22}=3i/l^3$。

2．图 10-3-2 所示刚架考虑弯曲变形及轴向变形时的结构原始刚度矩阵[K]是_____阶。若以子块表示的整体坐标系的各单元刚度矩阵已知为 $[K]^e=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}^e$，则[K]的子块$[K_{66}]$=_____。[西南交通大学 2007 研]

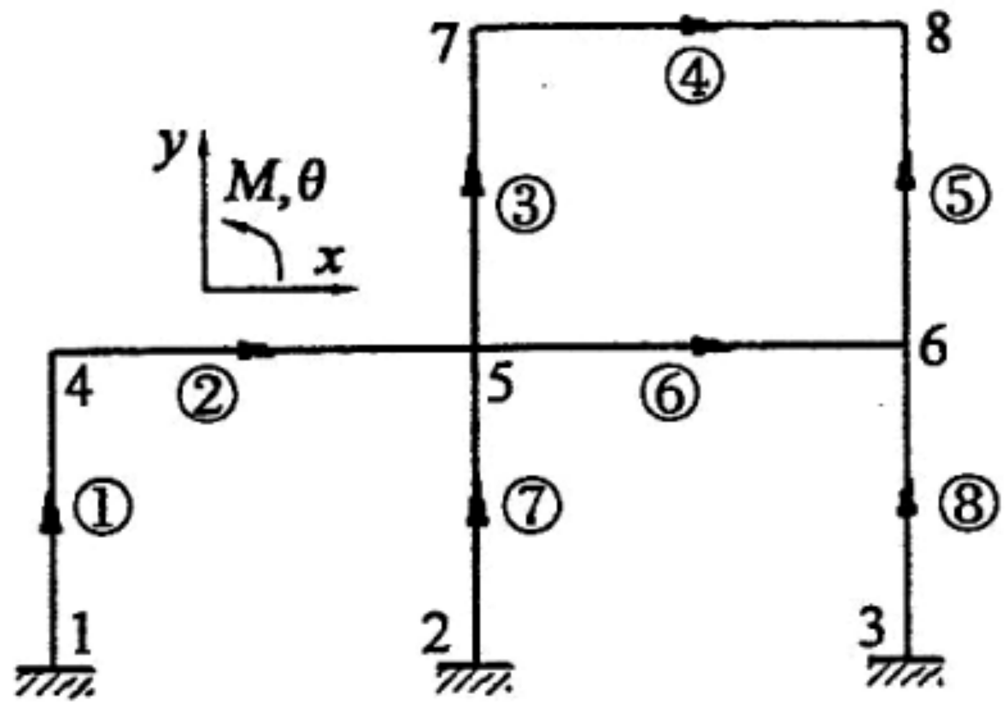


图 10-3-2

【答案】$3n=3\times8=24$ ； $[K_{22}]^{(6)}+[K_{11}]^{(5)}+[K_{22}]^{(8)}$

【解析】由于考虑刚架的弯曲变形和轴向变形，故每个结点的线位移和转角均不相同，有 8 个结点编号，则原始刚度矩阵[K]的阶数为 3×8=24；写出[K]的子块[K_{66}]，因为已知的单元刚度矩阵是轴力单元对应的单刚，所以编号时不考虑转角，列表如下：

单元号	端点号	定位数组	$c_x=\cos\alpha$	$c_y=\sin\alpha$
①	1→4	（0 0 1 2）	0	1
②	4→5	（1 2 3 4）	1	0
③	5→7	（3 4 7 8）	0	1
④	7→8	（7 8 9 10）	1	0
⑤	6→8	（5 6 9 10）	0	1
⑥	5→6	（3 4 5 6）	1	0
⑦	2→5	（0 0 3 4）	0	1
⑧	3→6	（0 0 5 6）	0	1

所以根据表格易知[K]的子块[K_{66}]= $[K_{22}]^{(6)}+[K_{11}]^{(5)}+[K_{22}]^{(8)}$。

3．图 10-3-3 所示结构的原始刚度矩阵中，子块[K_{21}]=_____，[K_{22}]=_____，[K_{23}]=_____（用单元刚度矩阵的子块表示）。[中南大学 2005 研]

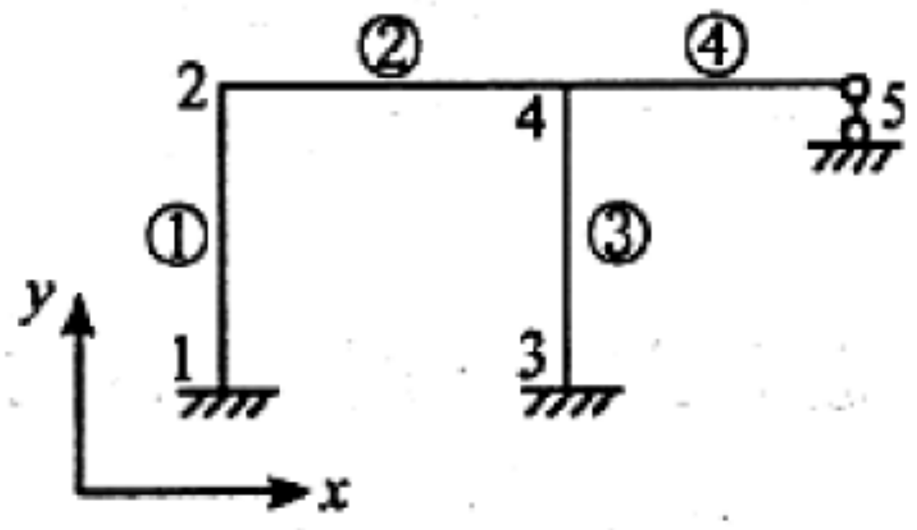


图 10-3-3

【答案】$k_{54}^{1}+k_{21}^{2}$； $k_{55}^{1}+k_{22}^{2}$； $k_{56}^{1}+k_{23}^{2}$

【解析】列出各单元号，端点号和各定位数组，如下表。

单元号	端点号	定位数组	$c_x=\cos\alpha$	$c_y=\sin\alpha$
①	1→2	（0 0 0 1 2 3）	0	1
②	2→4	（1 2 3 4 5 6）	1	0
③	3→4	（0 0 0 4 5 6）	0	1
④	4→5	（4 5 6 7 0 8）	1	0

所以[K_{21}]=$k_{54}^{1}+k_{21}^{2}$，[K_{22}]= $k_{55}^{1}+k_{22}^{2}$，[K_{23}]=$k_{56}^{1}+k_{23}^{2}$。

二、选择题

1. $\{\bar{F}\}^e$ 和 $\{F\}^e$ 分别是局部坐标系和整体坐标系的单元杆端力向量，[T]是坐标变换矩阵，则正确的表达式为（　　）。[浙江大学 2007 研]

A. $\{\bar{F}\}^e=[T]\{F\}^e$

B. $\{F\}^e=[T]\{\bar{F}\}^e$

C. $\{\bar{F}\}^e=[T]^T\{F\}^e$

D. $\{F\}^e=[T]^T\{\bar{F}\}^e[T]$

【答案】A

【解析】考察矩阵位移法中的坐标变换公式，局部坐标系下的杆端力向量等于坐标变换矩阵与整体坐标系下杆端力向量的乘积。

2．图 10-3-4 所示等截面连续梁，设 EI=1kN・m^2，则结构刚（劲）度矩阵中的第二个主元素 K_{22} 为（　　）。[西南交通大学 2007 研]

A. 1 kN・m　　B. 2 kN・m　　C. 3 kN・m　　D. 4 kN・m

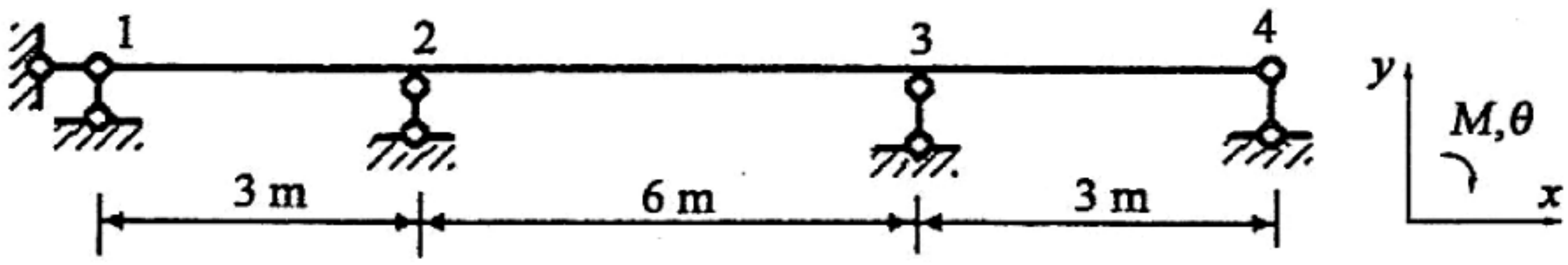


图 10-3-4

【答案】B

【解析】设 1,2 之间为单元①，2,3 之间为单元②，3,4 之间为单元③，列出各单元号，端点号和各定位数组，如下表。

单元号	端点号	定位数组	c_x=cosα	c_y=sinα
①	1→2	（0 0 0 1 0 2）	1	0
②	2→3	（1 0 2 3 0 4）	1	0
③	3→4	（3 0 4 5 0 6）	1	0

所以 $K_{22}=k_{66}^1+k_{33}^2=\frac{4EI}{l_{12}}+\frac{4EI}{l_{23}}=\frac{4}{3}+\frac{4}{6}=2$。

3．矩阵位移法中的单元刚度矩阵是（　　）。[国防科技大学 2003 研]

A. 对称的非奇异矩阵　　B. 对称的奇异矩阵

C. 非对称的奇异矩阵　　D. 非对称的非奇异矩阵

【答案】B

【解析】考察单元刚度矩阵的性质，根据反力互等定理可知单元刚度矩阵是对称的方阵，自由的单元刚度矩阵为奇异的，位移法中应用的单元刚度矩阵即为自由的单元刚度矩阵是奇异的。

4．矩阵位移法中，结构的原始刚度方程是表示下列两组量值之间的相互关系（　　）。[宁波大学 2009 研]

A．杆端力与结点位移

B．杆端力与结点力

C．结点力与结点位移

D．结点位移与杆端力

【答案】C

【解析】考察原始刚度方程的物理意义。原始刚度的物理意义：结构的结点位移列阵第 j 个位移分量为 1，其余的位移分量为零时，在第 i 个位移分量方向上所需要的结点力。故原始刚度方程是通过原始刚度矩阵建立结点力与结点位移之间的关系。

5．矩阵位移法中，如将杆件局部坐标系的指向由 x 轴（沿杆轴）向右，y 轴向下，转角顺时针，改为 x 轴向右，y 轴向上，转角逆时针，则杆件的单元刚度矩阵为（　　）。[浙江大学 2005 研]

A．各元素均保持不变

B．除主对角元素外，其它元素均变号

C．除主对角元素外，其它与杆端轴力对应的元素均变号

D．除主对角元素外，其它与杆端剪力及弯矩对应的元素均变号

【答案】A

【解析】在局部坐标系中，某一单位杆端位移所引起的杆件的变形形状和杆端力是一定的，因此局部坐标系中的单元刚度矩阵只与单元本身属性有关（如单元长度、杆件截面面积等），改变杆件局部坐标系各轴方向，单元刚度矩阵不会改变。

三、判断题

在矩阵位移法中，结构在等效结点荷载作用下的内力，与结构在原有荷载作用下的内力相同（　　）。[西南交通大学 2008 研]

【答案】错

【解析】等效结点荷载中所谓的等效是指在两种荷载分别作用下，结构的结点位移完全相同。

四、计算题

1．试建立图 10-3-5 所示结构的结构刚度矩阵（忽略轴向变形）。[湖南大学 2008 研]

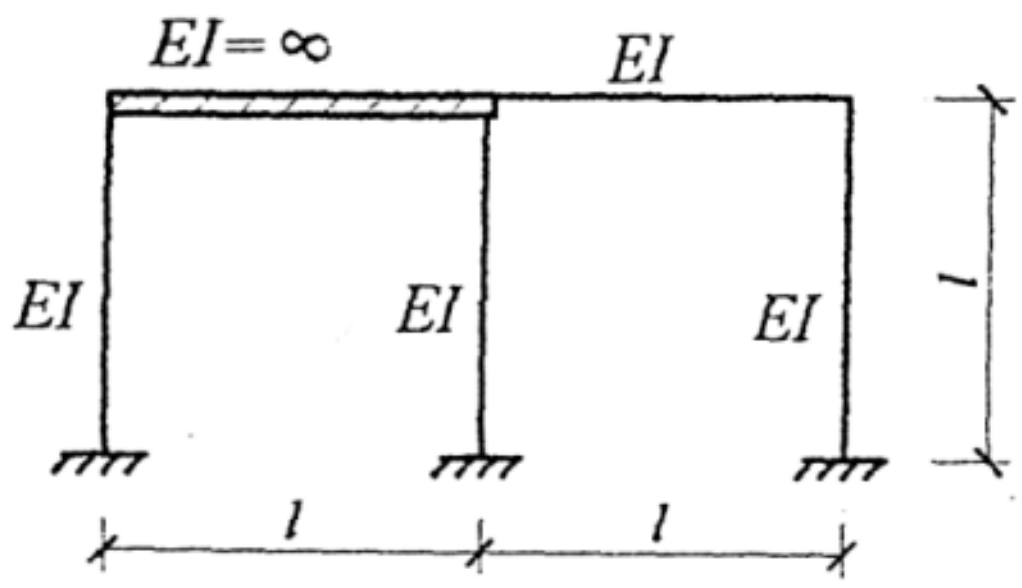


图 10-3-5

解：建立坐标系并对单元编号，如下图 10-3-6 所示。

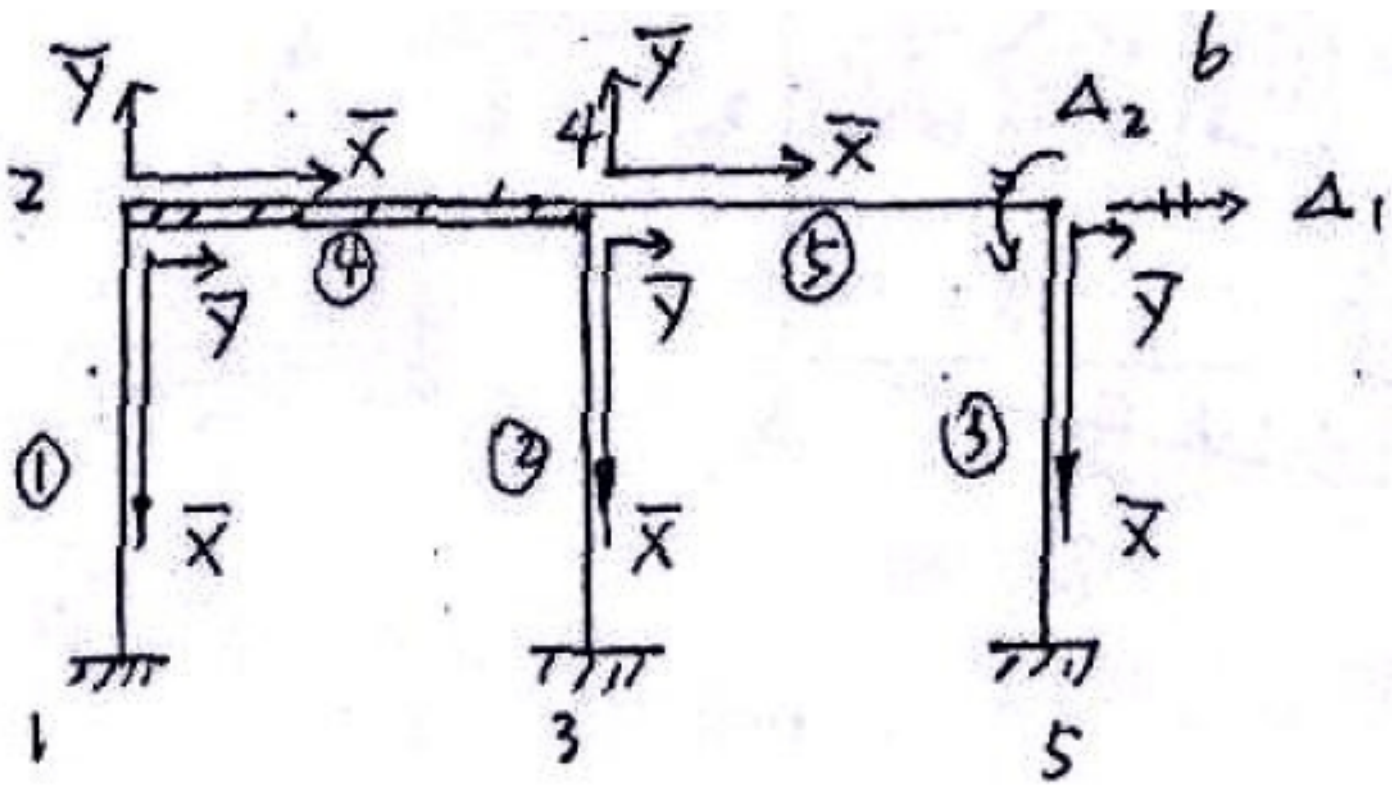


图 10-3-6

位移为

$$\Delta=[\Delta_1 \quad \Delta_2]^T$$

对于每一个单元，各自的定位向量为

$$\lambda^{①}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T\quad \lambda^{③}=[1\ \ 2\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$\lambda^{②}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T\quad \lambda^{④}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$\lambda^{⑤}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 2]^T$$

易得各自单元的矩阵为

$$K^{①}=\left[\frac{12EI}{l^3}\right]1\qquad K^{②}=\left[\frac{12EI}{l^3}\right]1\qquad K^{③}=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$$

$$K^{④}=[0]\qquad K^{⑤}=\left[\frac{4EI}{l}\right]2$$

$$K=\begin{bmatrix}\frac{36EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{8EI}{l}\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$$

则可得总的刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}$$

2．已知图 10-3-7 所示，EA=1kN，桁架的结点位移列向量为：

$\{\Delta\}=[0\ \ 0\ \ 2.5677\ \ 0.0415\ \ 1.0415\ \ 1.3673\ \ 1.6092\ \ -1.7265\ \ 1.6408\ \ 0\ \ 1.2084\ \ -0.4007]^T$ 试求杆 14、46 的轴力。[西南交通大学 2008 研]

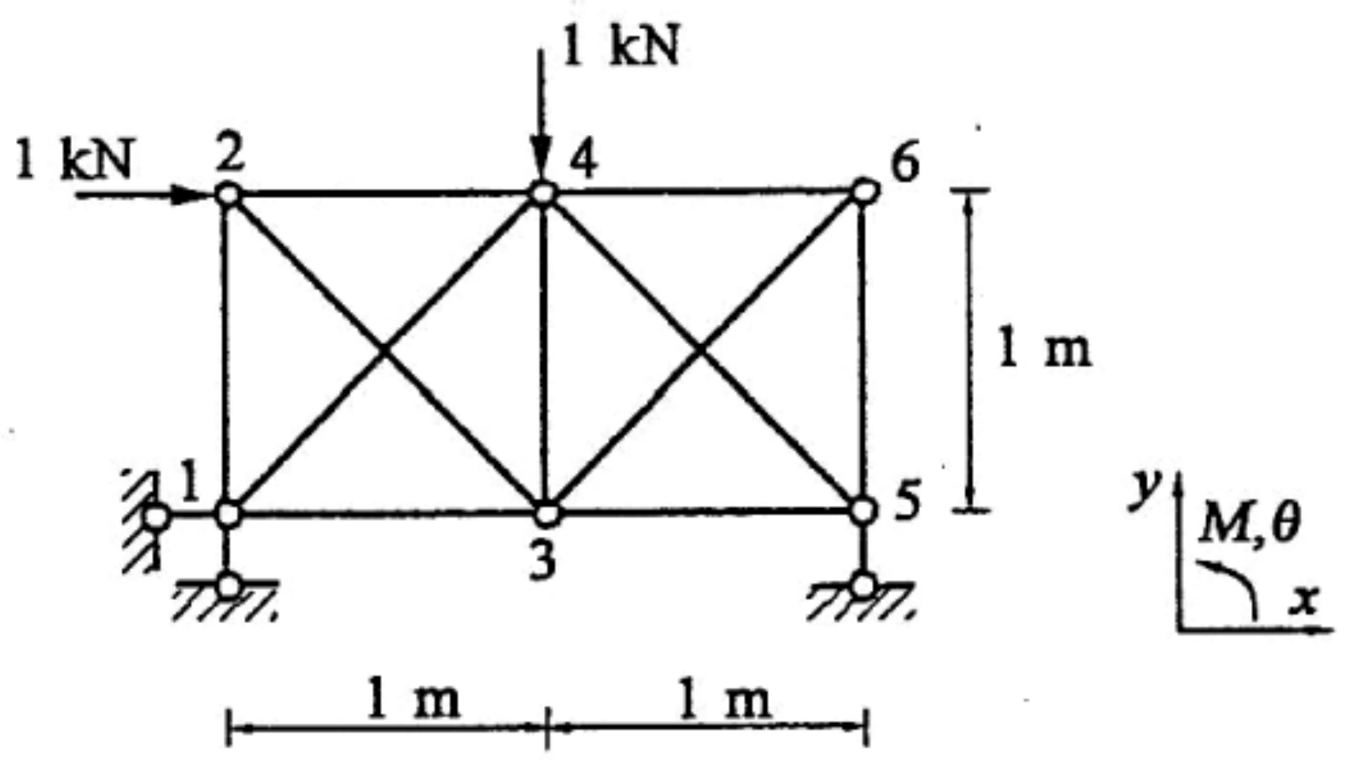


图 10-3-7

解：由定义可知，杆 14 的轴力为

$$F_{14}=[\bar{k}][T]\{\Delta\}$$

$$=\frac{EA}{\sqrt{2}l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\1.609\,2\\-1.726\,5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.058\,65\\0\\-0.058\,65\\0\end{Bmatrix}\text{kN}$$

易求得杆 46 的轴力为

$$F_{46}=\frac{EA}{l}\Delta=\frac{EA}{l}(u_4-u_6)=\frac{1\text{ kN}}{1}(1.609\,2-1.208\,4)=0.400\,8\text{ kN}$$

3．写出图 10-3-8 所示结构的整体刚度矩阵，EI 为常数，写出分析过程。[东南大学 2005 研]

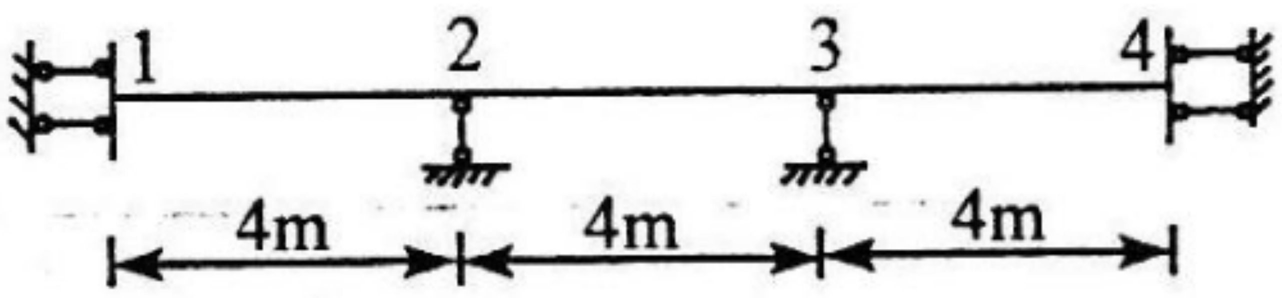
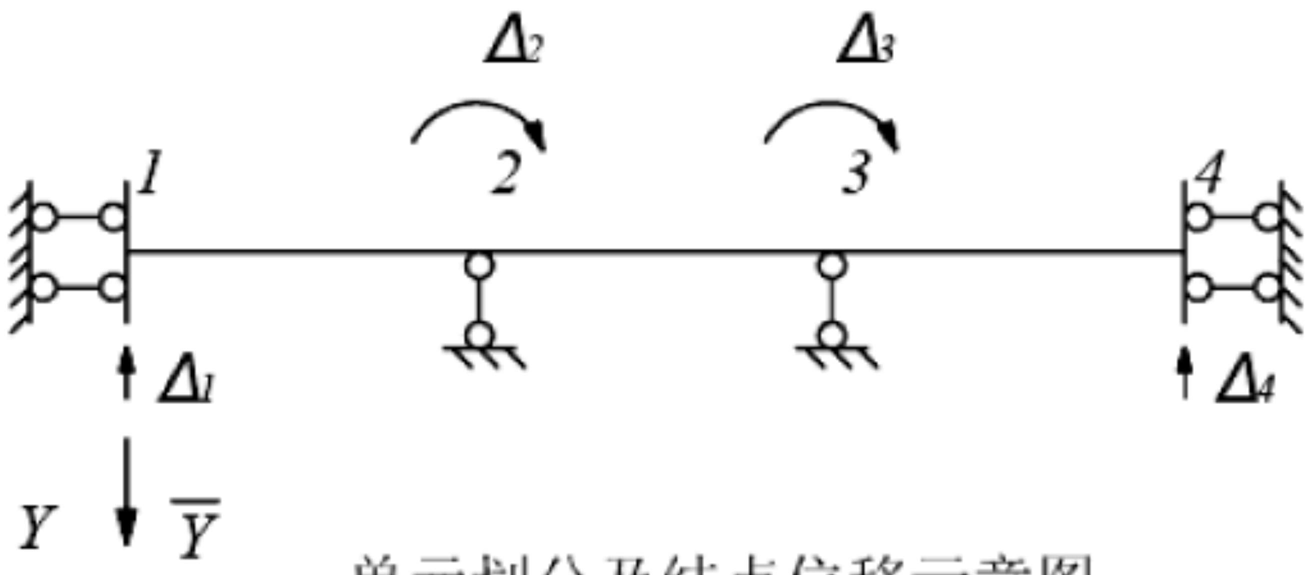


图 10-3-8

解：建立局部坐标系和整个结构的整体坐标系，同时划分单元及节点位移分量，如下图 10-3-9 所示。



单元划分及结点位移示意图

图 10-3-9

据此可分别求出每个节点的刚度矩阵为

$$[K]^1=\left[\overline{K}\right]^1=\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix}12/l&6\\6&4/l\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}3/16&3/8\\3/8&1\end{bmatrix}$$

$$[K]^2=\left[\overline{K}\right]^2=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}8&4\\4&8\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$[K]^3=\left[\overline{K}\right]^3=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4&-6/l\\-6/l&12/l^2\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}1&-3/8\\-3/8&3/16\end{bmatrix}$$

定位向量为

$$\{\lambda\}^1=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix},\{\lambda\}^2=\begin{Bmatrix}2\\3\end{Bmatrix},\{\lambda\}^3=\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}$$

按照刚度矩阵的形成过程，可得最后的刚度矩阵为

$$[K]=EI\begin{bmatrix}3/16&3/8&0&0\\3/8&3&1&0\\0&1&3&-3/8\\0&0&-3/8&3/16\end{bmatrix}$$

第 11 章　影响线及其应用

11.1　复习笔记

【知识框架】

- 影响线及其应用
  - 概述
    - 最不利荷载位置
    - 影响线的定义
    - 绘制影响线的基本方法：静力法、机动法
  - 用静力法作单跨静定梁的影响线
    - 静力法的描述
    - 影响线类型：简支梁的影响线、伸臂梁的影响线
    - 相关的结论
    - 内力影响线与内力图的比较
  - 间接荷载作用下的影响线
    - 间接荷载（结点荷载）的定义
    - 影响线的绘制
    - 绘制间接荷载作用下的影响线的一般方法
  - 用机动法作单跨静定梁的影响线
    - 理论基础
    - 举例分析
    - 机动法的定义及特点
  - 多跨静定梁的影响线
    - 根据传力关系确定绘制方法
    - 影响线绘制步骤
    - 机动法绘制多跨静定梁
    - 在间接荷载作用下多跨静定梁的影响线
  - 桁架的影响线
    - 支座反力的影响线
    - 杆件内力的影响线
    - 影响线的绘制方法：力矩法、投影法、结点法
  - 利用影响线求量值
    - 绘制影响线的目的
    - 用影响线求量值的举例：集中荷载、分布荷载
  - 铁路和公路的标准荷载制
    - 铁路设计
    - 公路设计：车道荷载、车辆荷载
  - 最不利荷载的位置：简单荷载、可动均布荷载、行列荷载
  - 换算荷载的定义和数值计算
  - 简支梁的绝对最大弯矩
    - 绝对最大弯矩的定义
    - 绝对最大弯矩的确定方法
  - 简支梁的包络图的定义及计算
  - 超静定结构影响线作法的概述
    - 反力和内力影响线的作法
    - 静力法
    - 机动法在一次超静定结构中的应用
    - 机动法在多次超静定结构中的应用
  - 连续梁的均布活载最不利位置及包络图
    - 连续梁包络图的概念
    - 连续梁的简化情况
    - 多层多跨刚架最不利荷载的确定

【重点难点归纳】

一、概述

1．最不利荷载位置

某一反力或某一内力达到最大值的荷载位置称为最不利荷载位置。

2．影响线

当一个指向不变的单位集中荷载（通常是竖直向下的）沿结构移动时，表示某一指定量值变化规律的图形，称为该量值的影响线，如图 11-1-1 所示。

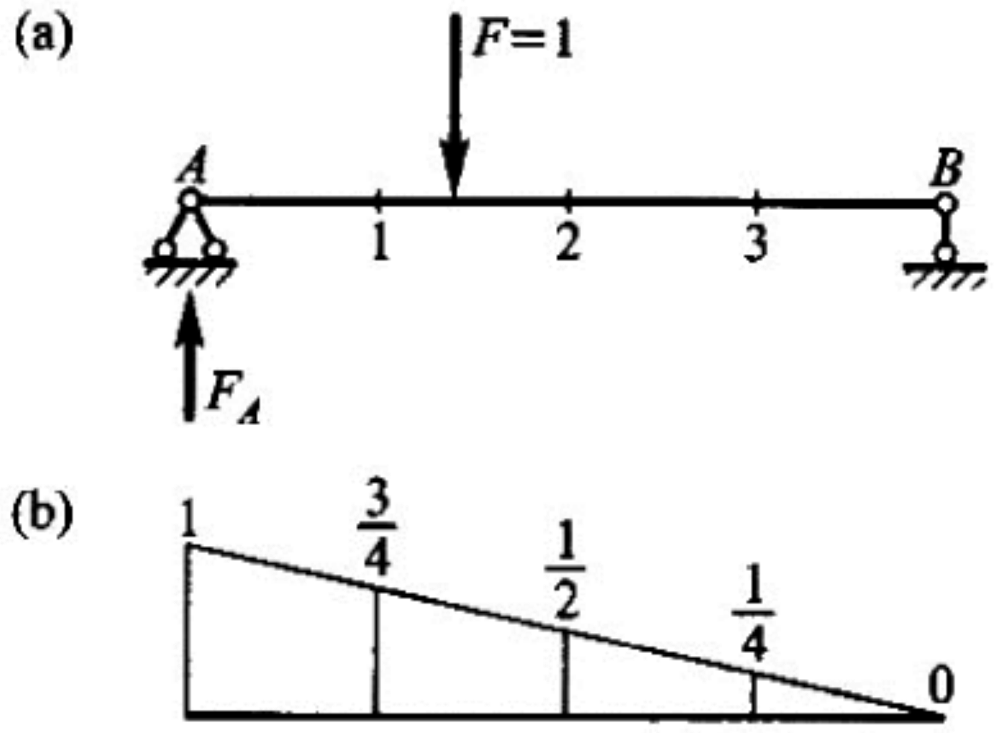


图 11-1-1

3．绘制影响线的基本方法

（1）静力法

（2）机动法

二、用静力法作单跨静定梁的影响线

1．方法

将荷载 F＝1（量纲为一的量）放在任意位置，并选定一坐标系，以横坐标 x 表示荷载作用点的位置，然后根据平衡条件求出所求量值与荷载位置 x 之间的函数关系式（称为影响线方程），再根据方程作出影响线图形。

2．类型

（1）简支梁的影响线

①反力影响线

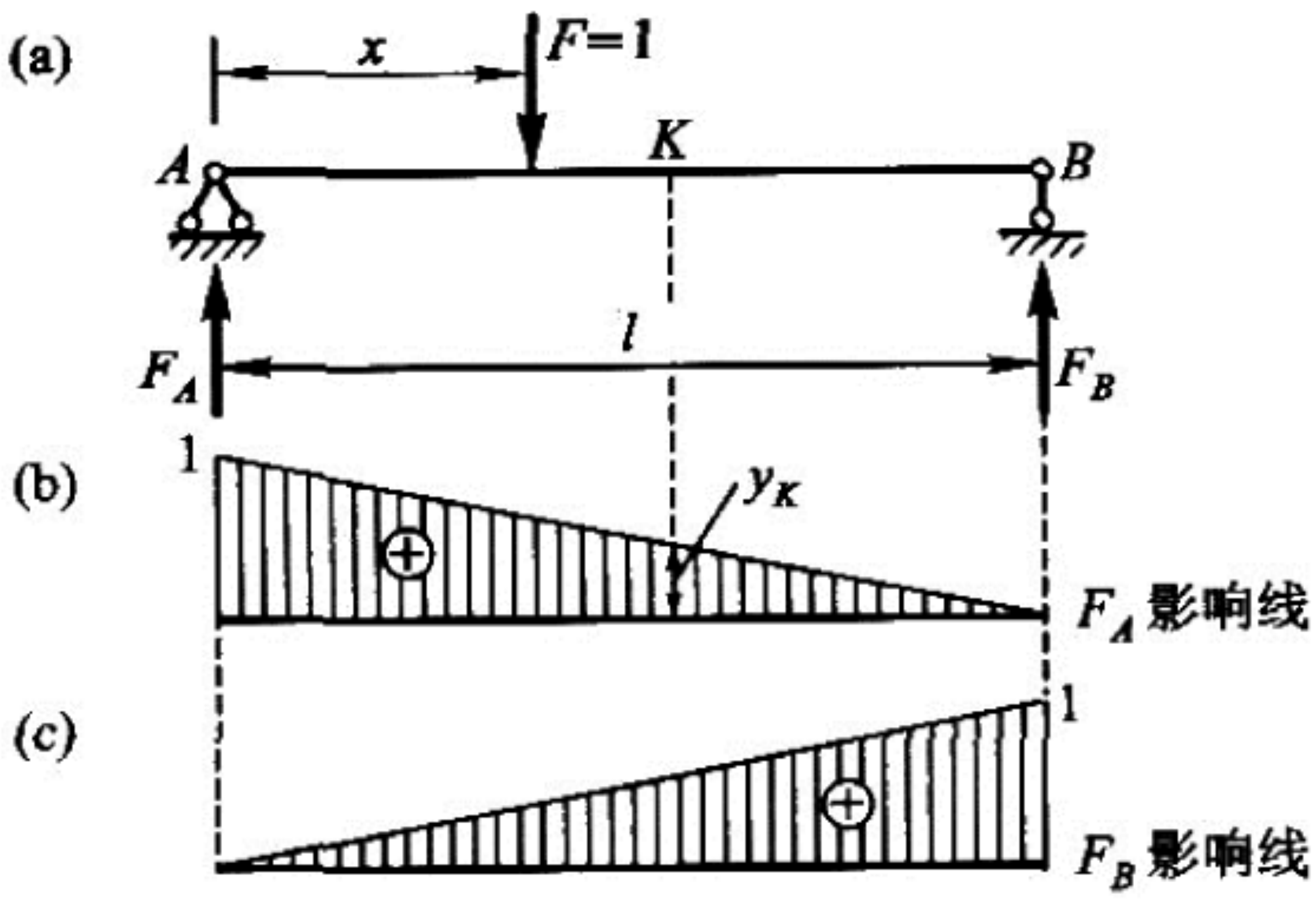


图 11-1-2

a．绘制反力 F_A 的影响线

如图 11-1-2（a）所示，取 A 为原点，x 轴向右为正，反力方向以向上为正，以坐标 x（ $0\leqslant x\leqslant l$ ）表示荷载 F＝1 的位置。取全梁为隔离体，由平衡条件 $\sum M_B=0$ 得

$$F_A l-F(l-x)=0$$

$$F_A=F\frac{l-x}{l}=\frac{l-x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

绘出 F_A 影响线如图 11-1-2（b）所示。F_A 影响线中的任一竖标即代表当荷载 F＝1 作用于该处时反力 F_A 的大小，如图中的 y_K 即代表 F＝1 作用在 K 点时反力 F_A 的大小。

b．绘制 F_B 的影响线

由 $\sum M_A=0$ 得 $F_Bl-Fx=0$ 由此得 F_B 影响线方程为

$$F_Bl-Fx=0$$

$$F_B=\frac{x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

绘制出影响线如图 11-1-2（c）所示。

②弯矩影响线

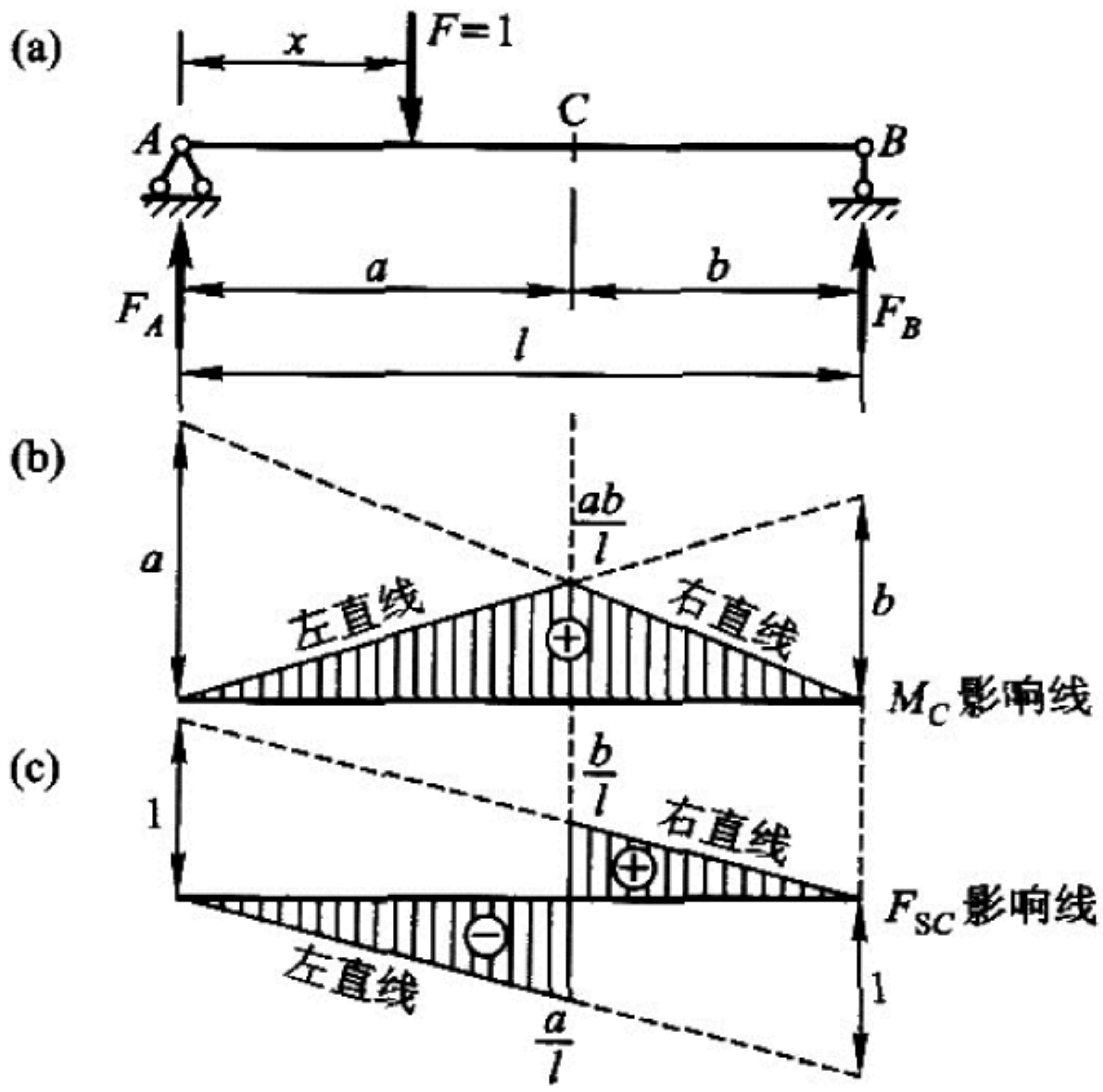


图 11-1-3

仍取 A 为原点，以 x 表示荷载 F＝1 的位置，以使梁下边纤维受拉的弯矩为正。

a. 当 F＝1 在截面 c 以左的梁段 AC 上移动时，$M_C=F_Bb=\frac{x}{l}b\quad(0\leqslant x\leqslant a)$，绘出影响线如图 11-1-3（b）左段部分。

b．当 F＝1 在截面 C 以右的梁段 CB 上移动时，$M_C=F_Aa=\frac{l-x}{l}a$，绘出影响线如图 11-1-3（b）右段部分。

③剪力影响线

剪力以绕隔离体顺时针方向转的剪力为正。

a．当 F＝1 在 AC 段移动时（0＜x＜a），则有 $F_{SC}=-F_B=-\frac{x}{l}$，绘出影响线的左直线如图 11-1-3（c）。

b．当 F＝1 在 CB 段移动时（a＜x＜1），$F_{SC}=F_A=\frac{l-x}{l}$，绘出影响线的右直线如图 11-1-3（c）所示。

c．F_{SC} 影响线由两段相互平行的直线组成，其竖标在 C 点处有一突变，当 F＝1 由 C 点的左侧移到其右侧时，截面 C 的剪力值将发生突变，突变值即等于 1。而当 F＝1 恰作用于 C 点时，F_{SC} 值是不确定的。

（2）伸臂梁的影响线

①反力影响线

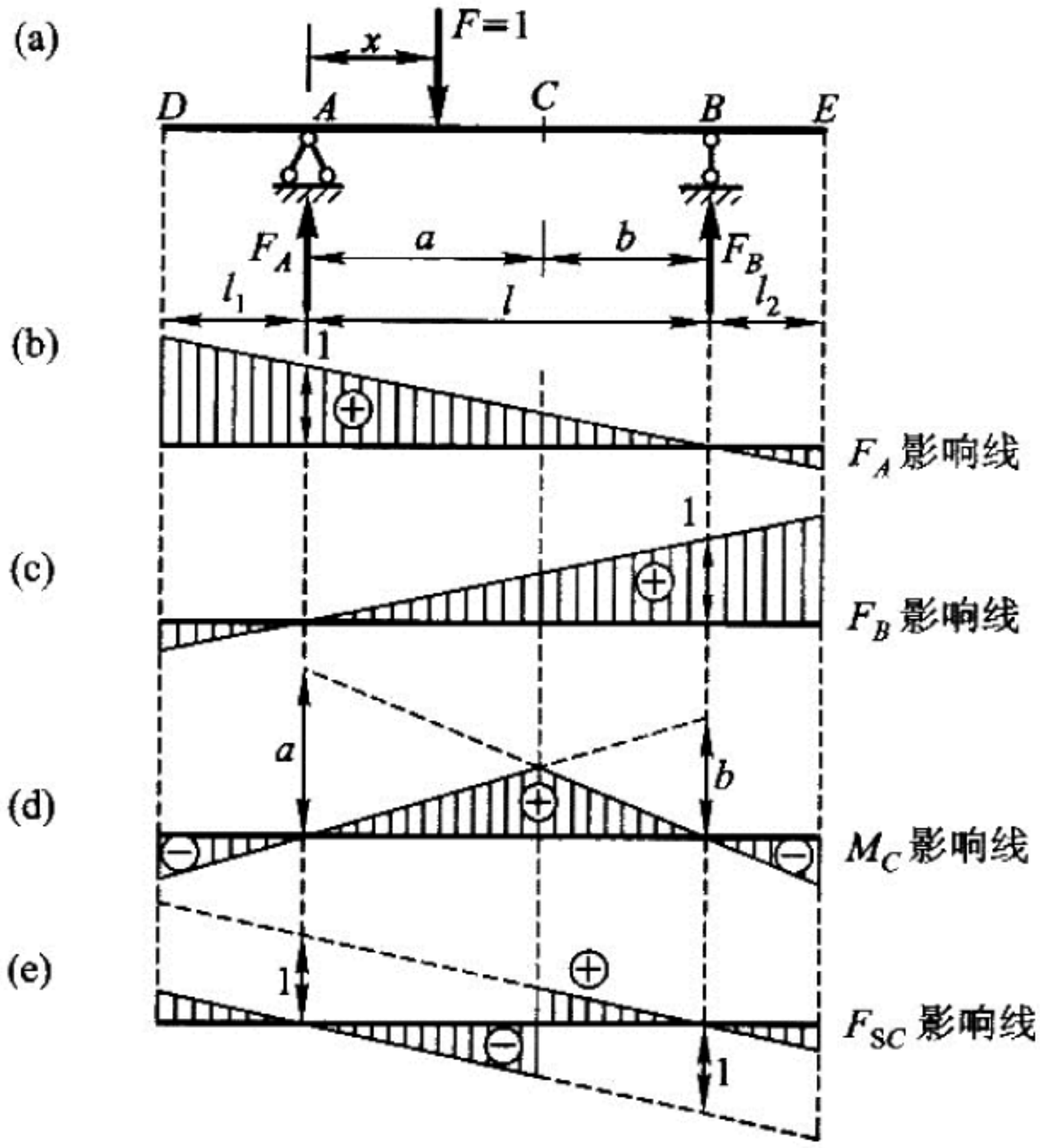


图 11-1-4

如图 11-1-4（a）所示伸臂梁，仍取 A 为原点 x 以向右为正。由平衡条件可求得两支座反力为

$$\left.\begin{aligned} F_A &= \frac{l-x}{l} \\ F_B &= \frac{x}{l} \end{aligned}\right\} (-l_1 \le x \le l+l_2)$$

绘出影响线如图 11-1-4（b）、（c）所示，只需将简支梁的反力影响线向两个伸臂部分延长即可。

②跨内部分截面内力影响线

a．当 F＝1 在 DC 段移动时，取截面 C 以右部分为隔离体，有 $M_C = F_B b$，$F_{SC} = -F_B$。

b．当 F＝1 在 CE 段移动时，取截面 C 以左部分为隔离体，有 $M_C = F_A a$，$F_{SC} = F_A$。

据此可绘出 M_C 和 F_{SC} 影响线如图 11-1-4（d）、（e）所示。只需将简支梁相应截面的弯矩和剪力影响线的左、右直线分别向左、右两伸臂部分延长即可。

③伸臂部分截面内力影响线

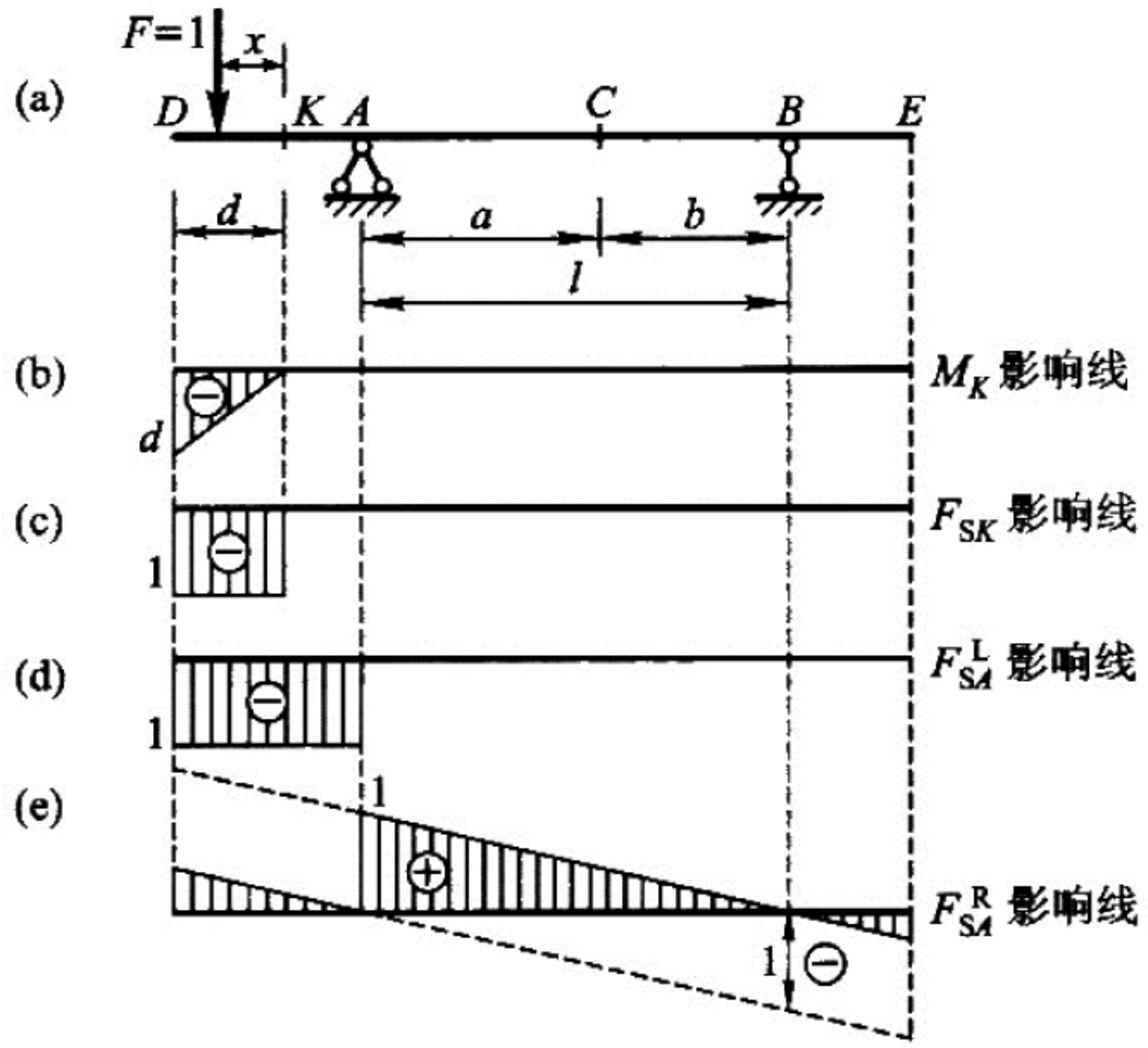


图 11-1-5

在求伸臂部分上任一指定截面 K（图 11-1-5（a））的弯矩和剪力影响线时，改取 K 为原点，并规定 x 以向左为正。

a．当 F＝1 在 DK 段移动时，取截面 K 以左部分为隔离体，有

$$M_K = -x$$

$$F_{SK} = -1$$

b．当 F＝1 在 KE 段移动时，仍取截面 K 以左部分为隔离体，有

$$M_K = 0, F_{SK} = 0$$

由上可绘出 M_K 和 F_{SK} 影响线分别如图 11-1-5（b）、（c）所示。

对于支座处截面的剪力影响线，需分别就支座左、右两侧的截面进行讨论，因为这两侧的截面是分别属于伸臂部分和跨内部分的。

3．总结

（1）当荷载作用在结构的不同部分上所求量值的影响线方程不相同时，应将它们分段写出，并在作图时注意各方程的适用范围。

（2）对于静定结构，其反力和内力影响线方程都是 x 的一次函数，其影响线都是由直线所组成。而静定结构的位移，以及超静定结构的各种量值的影响线则一般为曲线。

4．内力影响线与内力图比较

内力影响线反映了结构上某截面内力随单位移动荷载的变化规律，内力图则反映实际固定荷载作用下结构各截面内力分布情况。两者的主要区别见表 11-1-1。

表 11-1-1　内力影响线与内力图比较

	内力影响线	内力图
荷载	单位集中荷载 F＝1	实际荷载
荷载位置	变化的	固定的
横坐标意义	表示移动荷载 F＝1 的位置	表示竖标所在截面的位置
竖标意义	表示指定量值	表示竖标所在截面量值
图形范围	F＝1 移动的杆段	整个结构
作图一般规定	正号量值绘在基线上方，并注明符号	M 图绘在受拉侧，不标符号；F_s、F_N 图与内力影响线规定相同
内力的量纲	M：L F_s、F_N：量纲为 1	M：L^2MT^{-2} F、F_N：LMT^{-2}

三、间接荷载作用下的影响线

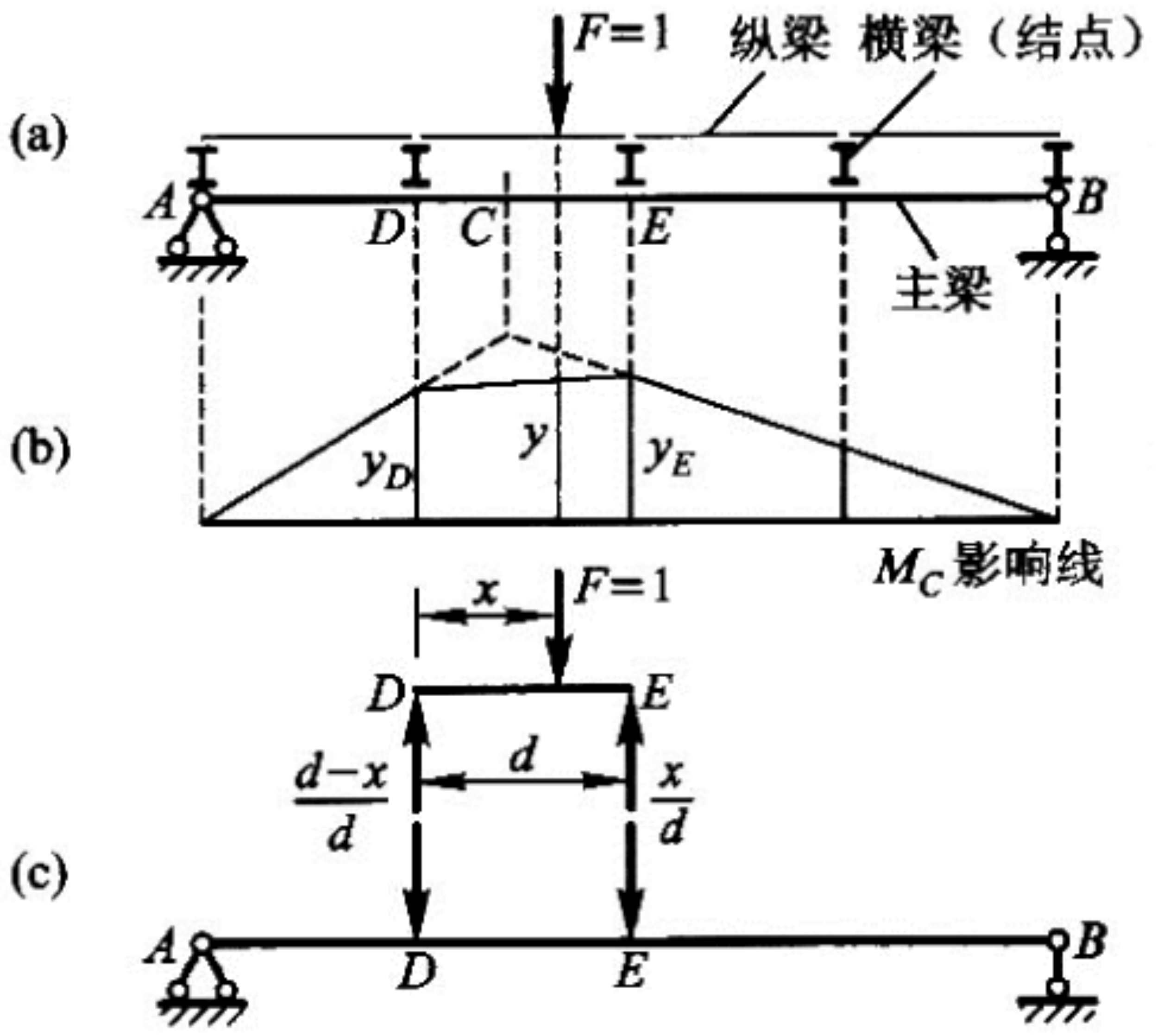


图 11-1-6

1．间接荷载（结点荷载）的定义

如图 11-1-6（a）所示，荷载直接作用在纵梁上，再通过横梁传到主梁，主梁只在各横梁处（结点处）受到集中力作用。在主梁上，荷载 F 称为间接荷载或结点荷载。

2．影响线的绘制

（1）荷载 F＝1 移动到各结点处时

荷载 F＝1 移动到各结点处时的情况，与荷载直接作用在主梁上的情况完全相同。作出直接荷载作用下主梁 M_c 影响线（图 11-1-6（b））。

（2）荷载 F＝1 在任意两相邻结点 D、E 之间的纵梁上移动时

①主梁将在 D、E 处分别受到结点荷载 $\frac{d-x}{d}$ 及 $\frac{x}{d}$ 的作用（图 11-1-6（c））；

②直接荷载作用下 M_c 影响线在 D、E 处的竖标分别为 y_D 和 y_E；

③则根据影响线的定义和叠加原理，M_c 值应为

$$y=\frac{d-x}{d}y_D+\frac{x}{d}y_E$$

连接竖标 y_D 和 y_E 的直线，如图 11-1-6（b）所示。

3．绘制间接荷载作用下的影响线的一般方法

（1）具体方法为

①作出直接荷载作用下所求量值的影响线。

②取各结点处的竖标，并将其顶点在每一纵梁范围内连以直线。

四、用机动法作单跨静定梁的影响线

1．理论基础

刚体体系在力系作用下处于平衡的必要和充分的条件是：在任何微小的虚位移中，力系所作的虚功总和为零。

2．举例

如图 11-1-8（a）所示简支梁，绘制反力 F_A 的影响线。

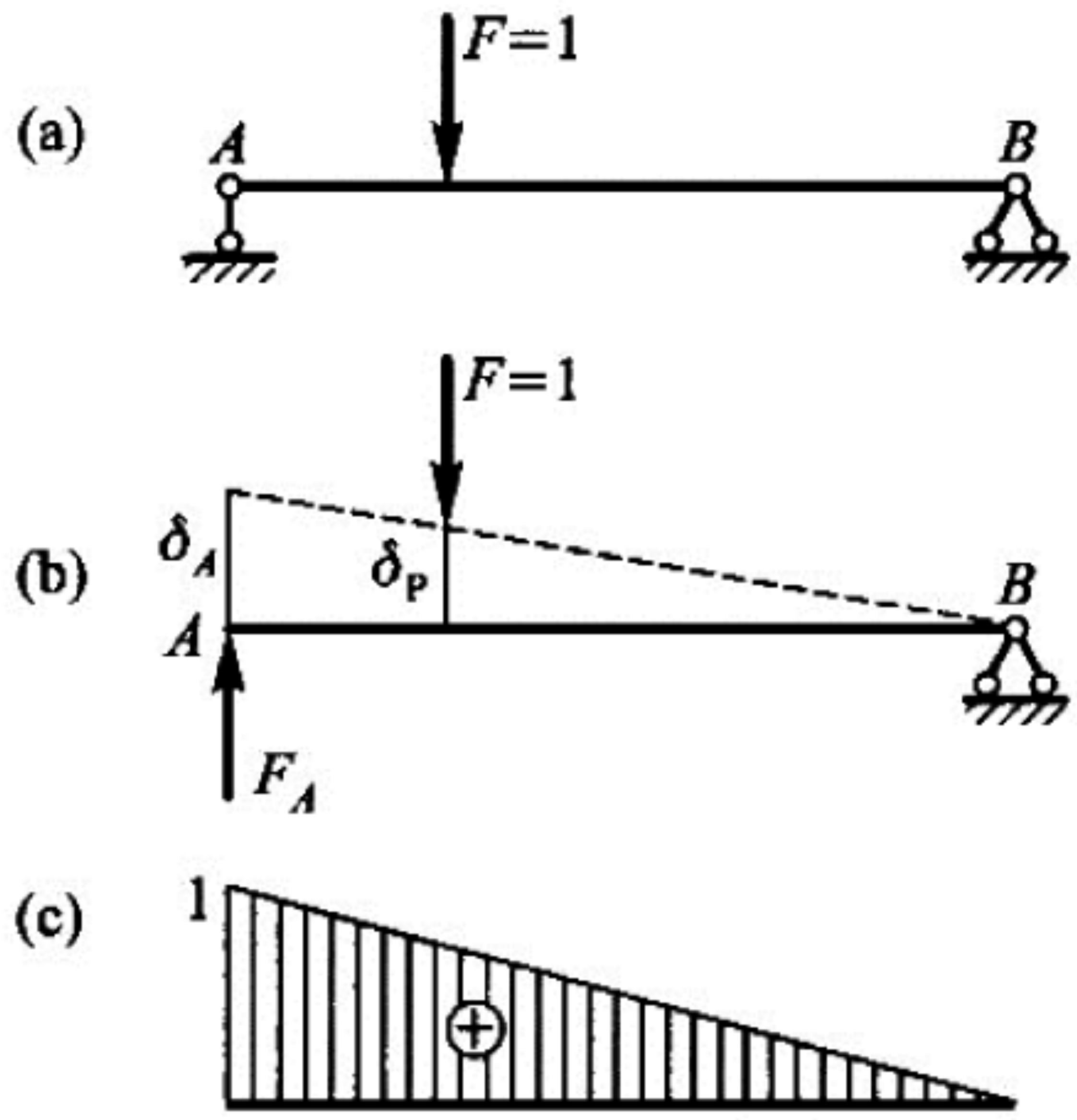


图 11-1-8

（1）拆除多余约束

去掉 A 处的支座链杆，以正向的反力 F_A 代替，原结构变成具有一个自由度的几何可变体系。

（2）给定虚位移

给体系以微小虚位移，即使刚片 AB 绕 B 点作微小转动，并以 δ_A 和 δ_P 分别表示力 F_A 和 F 的作用点沿力作用方向上的虚位移。

（3）虚功方程

体系在力 F_A 和 F 的共同作用下处于平衡，力所作的虚功总和应为零，虚功方程为

$$F_A\delta_A + F\delta_P = 0$$

（4）求解 F_A

F＝1，故得 $F_A = -\dfrac{\delta_P}{\delta_A}$ 。

（5）绘制影响线

δ_A 为常数，令其为 1，则 $F_A = -\delta_P$。F_A 与 δ_P 大小相等，方向相反。当 δ_P 向下时，F_A 为负；当 δ_P 向上时，F_A 为正，与在影响线中正值的竖标绘在基线的上方相一致。由 δ_P 的位移图，可绘出影响线。

3．机动法

（1）定义

作某一量值（反力或内力）S 影响线，只需将与 S 相应的联系去掉，并使所得体系沿 S 的正方向发生单位位移，则由此得到的荷载作用点的竖向位移图即代表 S 影响线。这种作影响线的方法称为机动法。

（2）优点

机动法的优点在于不必经过具体计算就能迅速绘出影响线的轮廓，也便于对静力法所作影响线进行校核。

五、多跨静定梁的影响线

1．方法

分清多跨静定梁的基本部分和附属部分及这些部分之间的传力关系，再利用单跨静定梁的已知影响线，绘出多跨静定梁的影响线。

2．绘制步骤

（1）当 F＝1 在量值本身所在的梁段上移动时，量值影响线与相应单跨静定梁相同。

（2）当 F＝1 在对于量值所在部分是基本部分的梁段上移动时，量值影响线的竖标为零。

（3）当 F＝1 在对于量值所在部分是附属部分的梁段上移动时，量值影响线为直线。根据在铰处的竖标为已知和在支座处竖标为零等条件，即可将其绘出。

3．机动法绘制多跨静定梁

（1）去掉与所求反力或内力 S 相应的联系；

（2）使所得体系沿 S 的正向发生单位位移，此时根据刚片的位移图为一段直线，以及在每一竖向支座处竖向位移为零等条件，就可绘出各部分的位移图。

4．在间接荷载作用下多跨静定梁的影响线

先作出直接荷载作用下的影响线，然后取各结点处的竖标，并在每一纵梁范围内以直线相连而求得。

六、桁架的影响线

对于单跨静定梁式桁架。

1．支座反力的影响线

单跨静定梁式桁架的支座反力的影响线与相应单跨梁相同。

2．杆件内力的影响线

（1）利用截面法中的力矩法和投影法，将 F＝1 在不同部分时杆件内力的影响线方程写出来，并作出影响线。

（2）对于斜杆，先绘出其水平或竖直分力影响线，然后按比例关系求得其内力影响线。

（3）由于在桁架中，荷载一般是通过纵梁和横梁而作用于桁架结点上的，故间接荷载作用下影响线的性质也适用于桁架。

3．影响线绘制举例

如图 11-1-9（a）所示简支桁架，绘制桁架内力影响线。设荷载 F＝1 沿下弦移动。

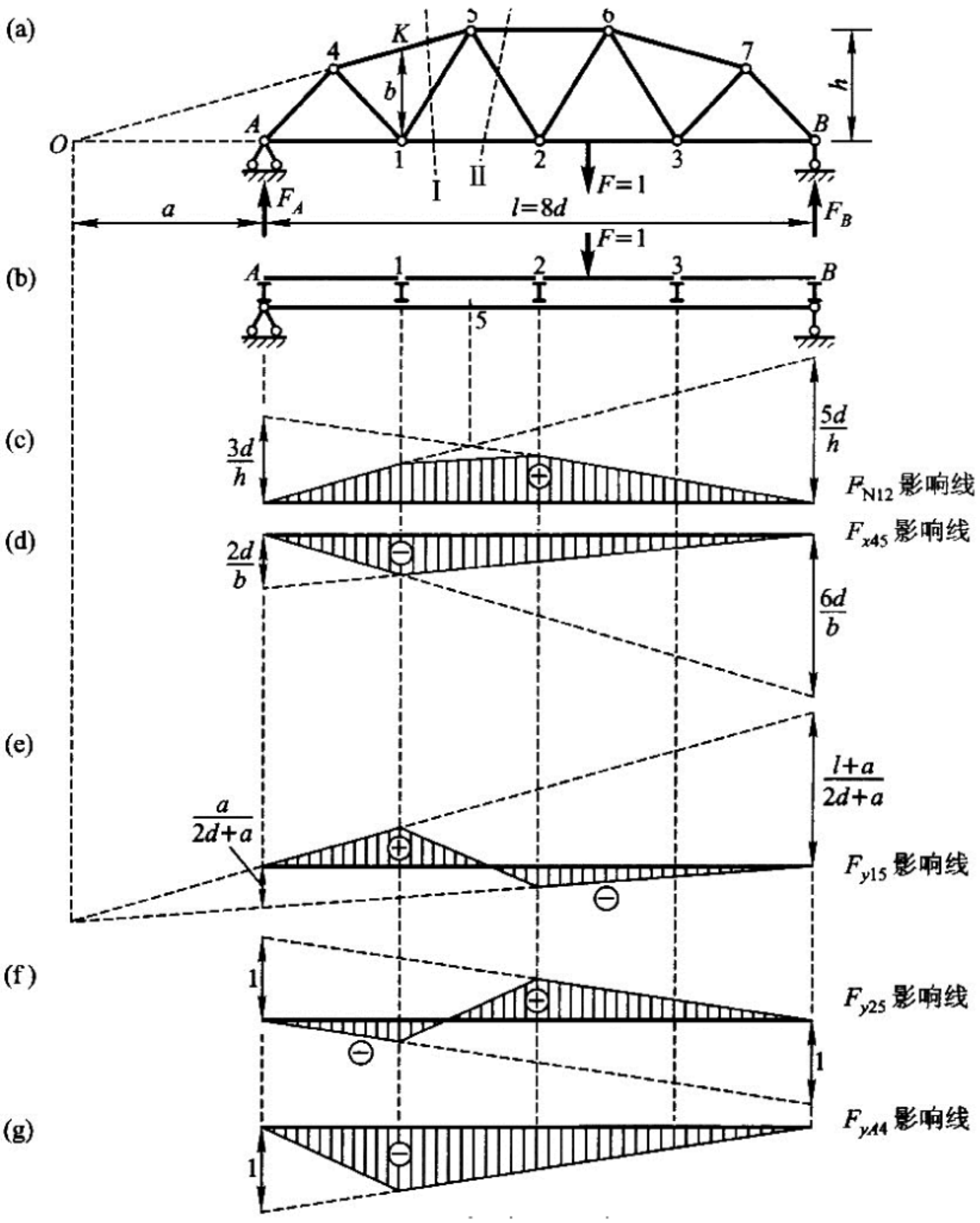


图 11-1-9

（1）力矩法

①求下弦杆 1——2 的内力影响线，可作截面 I——I，并以结点 5 为矩心用力矩法来求。

a．左直线的绘制

第一，当 F＝1 在结点 A、1 之间移动时，取截面 I——I 以右部分为隔离体，由$\sum M_5=0$，有

$F_B\times 5d-F_{N12}h=0$，得$F_{N12}=\frac{5d}{h}F_B$。

第二，将反力 F_B 影响线竖标乘以$\frac{5d}{h}$并取其对应于结点 A、1 之间的一段，即得到 F_{N12} 在这部分的影响线，称为左直线。

b．右直线的绘制

第一，当 F＝1 在被截节间以右即结点 2、B 之间移动时，取截面 I——I 以左部分为隔离体，由$\sum M_5=0$，有$F_A\times 3d-F_{N12}h=0$，得$F_{N12}=\frac{3d}{h}F_A$。

第二，将反力 F_A 影响线竖标乘以$\frac{3d}{h}$并取其对应于结点 2、B 之间的一段，即得到F_{N12}影响线的右直线。

c．中间段的绘制

当 F＝1 在被截节间内，即在结点 1、2 之间移动时，根据间接荷载作用下影响线的性质可知，绘出F_{N12}影响线如图 11-1-9（c）所示。

d．影响线方程合并

F_{N12}影响线的左、右直线两方程也可以合并写为一个式子，即 $F_{N12}=\frac{M_5^0}{h}$。式中 M_5^0 是相应简支梁（图 11-1-9（b））上对应于矩心 5 处的截面的弯矩影响线，将其竖标除以力臂 h 即得到F_{N12}影响线。（左右直线的交点在矩心 5 下面）。

②求上弦杆 4——5 的内力影响线，取截面 I——I，以结点 1 为矩心，将该杆内力在 K 点处分解为水平和竖向分力。

a．左直线的绘制

当 F＝1 在结点 A、1 之间移动时，取截面 I——I 以右部分为隔离体，由 $\sum M_1=0$ 有 $F_B\times 6d+F_{x45}b=0$ 得 $F_{x45}=-\frac{6d}{b}F_B$。

b．右直线的绘制

当 F＝1 在结点 2、B 之间移动时，取截面 I——I 以左为隔离体，由 $\sum M_1=0$ 有 $F_A\times 2d+F_{x45}b=0$ 得 $F_{x45}=-\frac{2d}{b}F_A$。

c．中间段的绘制

将结点 1、2 处的竖标连以直线，在目前情况下这段直线恰好与右直线重合。由此可绘出 4——5 杆的水平分力 F_{x45}b 影响线。

d．影响线方程合并

F_{x45} 影响线方程可表示为 $F_{x45}=-\frac{M_1^0}{b}$，即可由相应简支梁上矩心 1 处的弯矩影响线除以力臂 b，并反号得到 F_{x45} 影响线。再根据比例关系便可得到其内力 F_{N45} 影响线。（左、右直线的交点仍在矩心下面）。

e．对于单跨梁式桁架

对于单跨梁式桁架，用力矩法作杆件内力影响线时，左、右直线的交点恒在矩心之下。只需作出左、右直线中的任一直线，便可绘出其全部影响线。

③求斜杆 1——5 的内力（或其分力）影响线，作截面 I——I，而取 1——2 和 4——5 两杆延长线的交点 O 为矩心，并将 1——5 杆的内力在结点 1 处分解为水平和竖向分力。

a．绘制左直线

当 F＝1 在 A、1 之间时，取截面 I——I 以右部分，由 $\sum M_O=0$ 有 $F_B(l+a)-F_{y15}(2d+a)=0$，得 $F_{y15}=\frac{l+a}{2d+a}F_B$，据此可作出左直线。

b．绘制右直线

当 F＝1 在 2、B 之间时，取截面 I——I 以左部分为隔离体，由 $\sum M_O=0$，有 $F_Aa+F_{y15}(2d+a)=0$ 得 $F_{y15}=-\frac{a}{2d+a}F_A$，此可作出右直线。（左、右直线交点同样位于矩心 0 之下）。在结点 1、2 之间连以直线，

即得竖向分力 F_{y15} 影响线，如图 11-1-9（e）所示。

（2）投影法

求斜杆 2——5 的内力（或其分力）影响线，可作截面Ⅱ——Ⅱ，用投影法来求。

①当 F=1 在 A、1 之间时，取截面Ⅱ——Ⅱ以右部分为隔离体，由 $\sum F_y=0$，有 $F_{y25}=-F_B$。

②当 F=1 在 2、B 之间时，取截面Ⅱ——Ⅱ以左部分为隔离体，由 $\sum F_y=0$，有 $F_{y25}=F_A$。 ③根据以上两式可作出左、右直线，并在结点 1、2 间连以直线，即得竖向分力 F_{y25} 的影响线，如图 11-1-9（f）所示。

④影响线的合并

以上 F_{y25} 影响线的左、右两直线方程也可合并为一式 $F_{y25}=F_{S12}^0$。其中 F_{S12}^0 是相应简支梁节间 1——2 中的任一截面的剪力影响线。

（3）结点法

①端斜杆 A——4 的内力（或其分力）影响线，可取结点 A 为隔离体来求。由于荷载 F=1 沿下弦移动，故结点 A 在承重弦上，因而其平衡方程应分别按 F=1 在该结点和不在该结点两种情况来建立。

a．当 F=1 不在结点 A（在结点 I、B 之间移动）时，由结点 A 的 $\sum F_y=0$，有 $F_{yA4}=-F_A$。

b．当 F=1 作用于结点 A 时，由结点 A 的 $\sum F_y=0$，有 $F_{yA4}=-F_A+1=-1+1=0$。

c．按影响线在各节间内应为直线的性质，绘出竖向分力 F_{yA4} 影响线，如图 11-1-9（g）所示。

（4）总结

①在绘制桁架内力影响线时，应注意荷载 F=1 是沿上弦移动（上承）还是沿下弦移动（下承），这两种情况下所作出的影响线有时是不相同的。

②在比较复杂的情况下，绘制桁架某些杆件的内力影响线时，需将结点法和截面法联合应用，且需把其他杆件的内力影响线先行求出，然后根据它们之间的静力学关系，用叠加法来作出所求杆件的内力影响线。

七、利用影响线求量值

1．绘制影响线的目的

绘制影响线的目的是利用影响线来确定实际移动荷载对于某一量值的最不利位置，从而求出该量值的最大值。

2．利用影响线求量值

（1）集中载荷

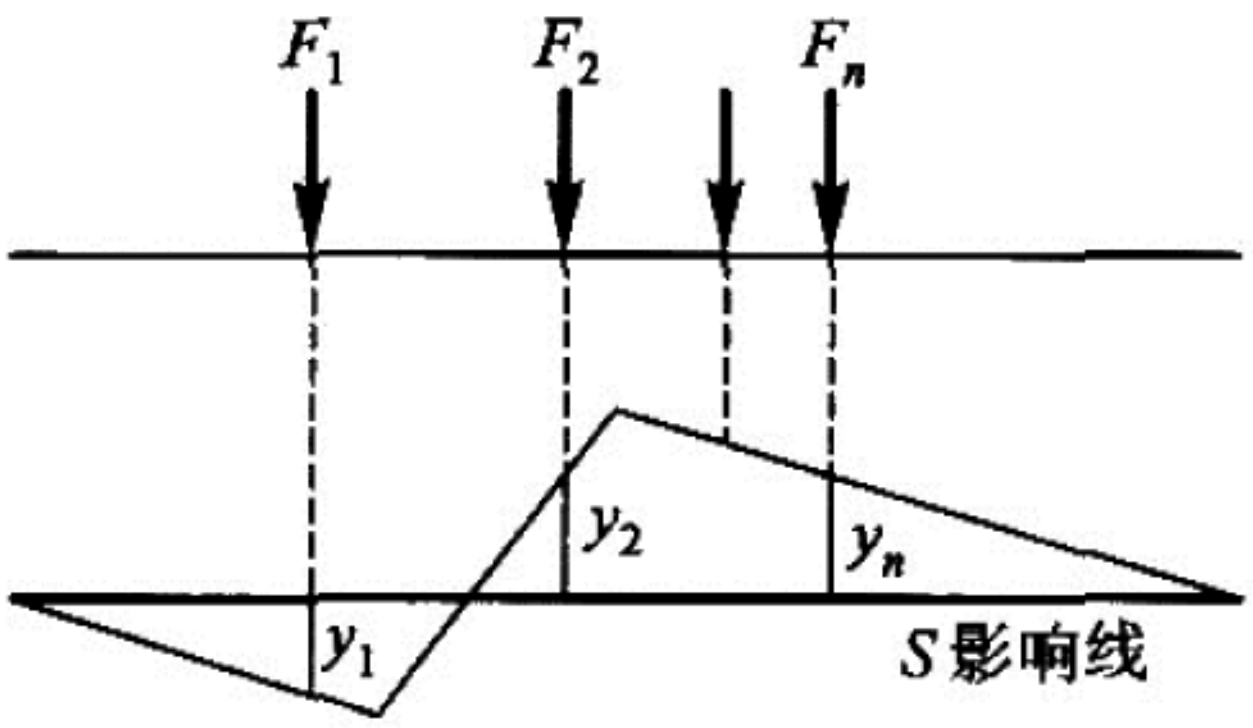


图 11-1-10

①当有若干集中荷载作用于已知位置时，根据叠加原理可知，所产生的 S 值为

$$S=F_1y_1+F_2y_2+\cdots+F_ny_n=\sum F_iy_i$$

②当若干个荷载作用在影响线某一段直线的范围内（不含折点）时，可用它们的合力来代替，而不会改变所求量值的数值。

（2）分布载荷

① q_x为非均布载荷

如图 11-1-11 所示，将分布荷载沿其长度分成许多无穷小的微段。则每一微段 dx 上的荷载$q_x dx$ 都可作为一集中荷载，故在 ab 区段内的分布荷载所产生的量值 S 为

$$S = \int_a^b q_x y \mathrm{d}x$$

② q_x为均布荷载q

如图 11-1-12 所示，则上式成为

$$S = q\int_a^b y\mathrm{d}x = qA_\omega \tag{11-1}$$

式中，A_ω表示影响线在均布荷载范围 ab 内的面积。若在该范围内影响线有正有负，则A_ω应为正负面积的代数和。

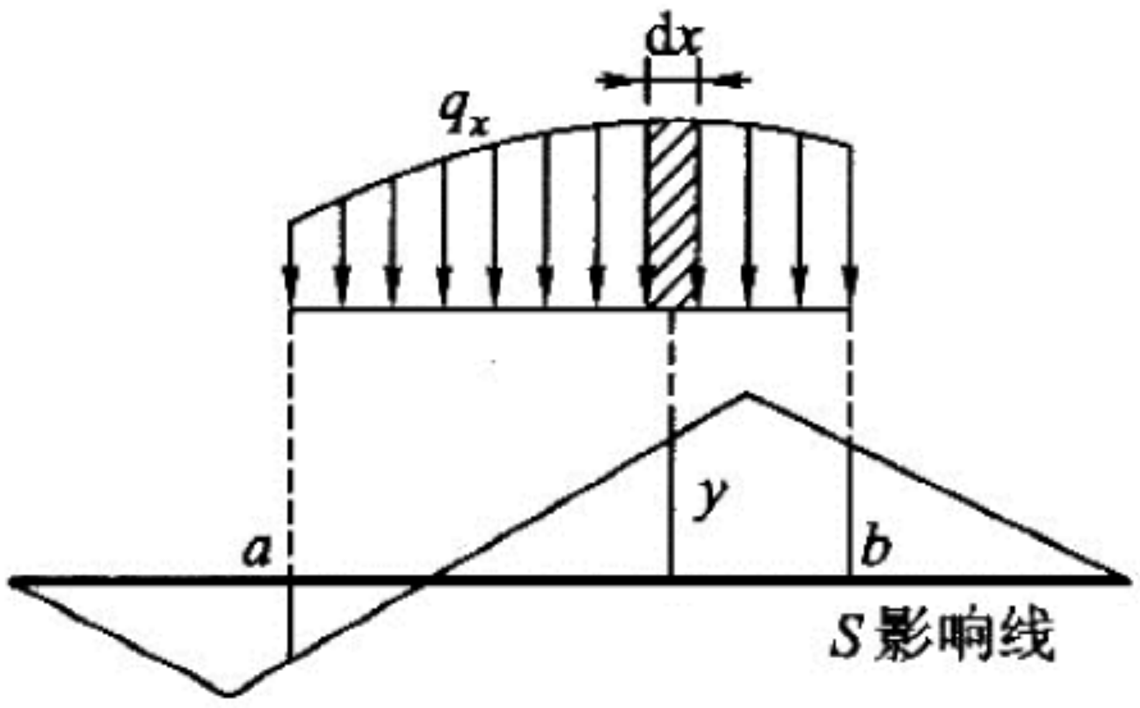


图 11-1-11

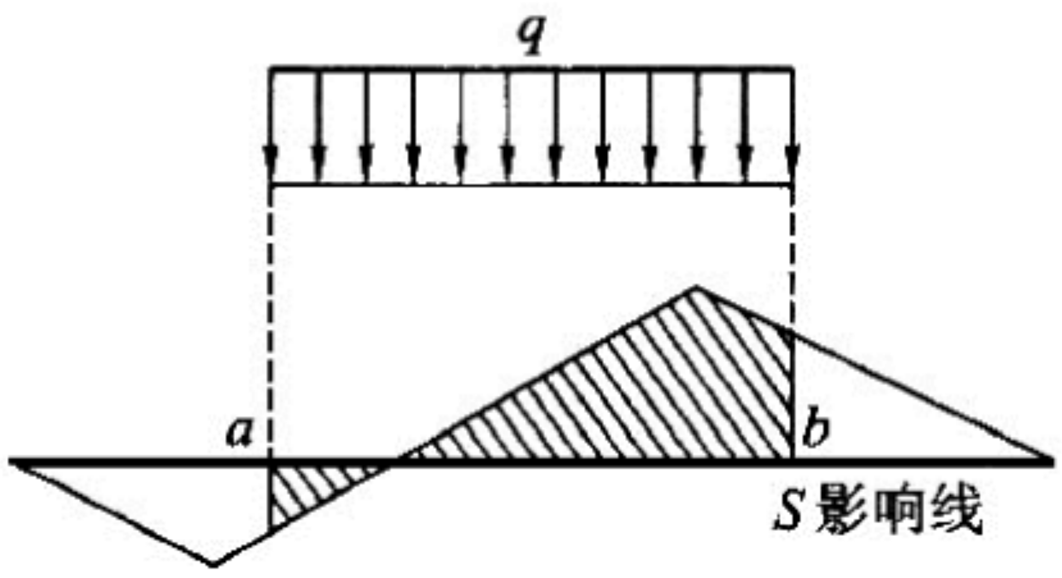


图 11-1-12

八、铁路和公路的标准荷载制

1．铁路设计

我国铁路桥梁设计使用的标准荷载，称为中华人民共和国铁路标准活载，简称“中——活载”。它包括普通活载和特种活载两种。

2．公路设计

我国公路桥涵设计使用的汽车荷载分为公路——I 级和公路——II 级两个等级。汽车荷载由车道荷载和车辆荷载组成。

（1）车道荷载

车道荷载由均布荷载和集中荷载组成。桥梁结构的整体计算采用车道荷载。车道荷载的均布荷载标准值应满

布于使结构产生最不利效应的同号影响线上；集中荷载标准值只作用于相应影响线中一个影响线峰值处。

（2）车辆荷载

桥梁结构的局部加载、涵洞、桥台和挡土墙土压力等的计算采用车辆荷载。

车道荷载和车辆荷载作用不得叠加。

九、最不利荷载位置

1．简单荷载

最不利荷载位置凭直观即可确定。例如只有一个集中荷载F时，将F置于S影响线的最大竖标处即产生S_{max}值；将F置于最小竖标处即产生S_{min}值（图11-1-13）。

2．可动均布荷载

对于可以任意断续布置的均布荷载（也称可动均布荷载，如人群、货物等），由式（11-1）即$S = qA_{\omega}$易知，将荷载布满对应于影响线所有正面积的部分，则产生S_{max}值；反之，将荷载布满对应于影响线所有负面积的部分，则产生S_{min}值（图11-1-14）。

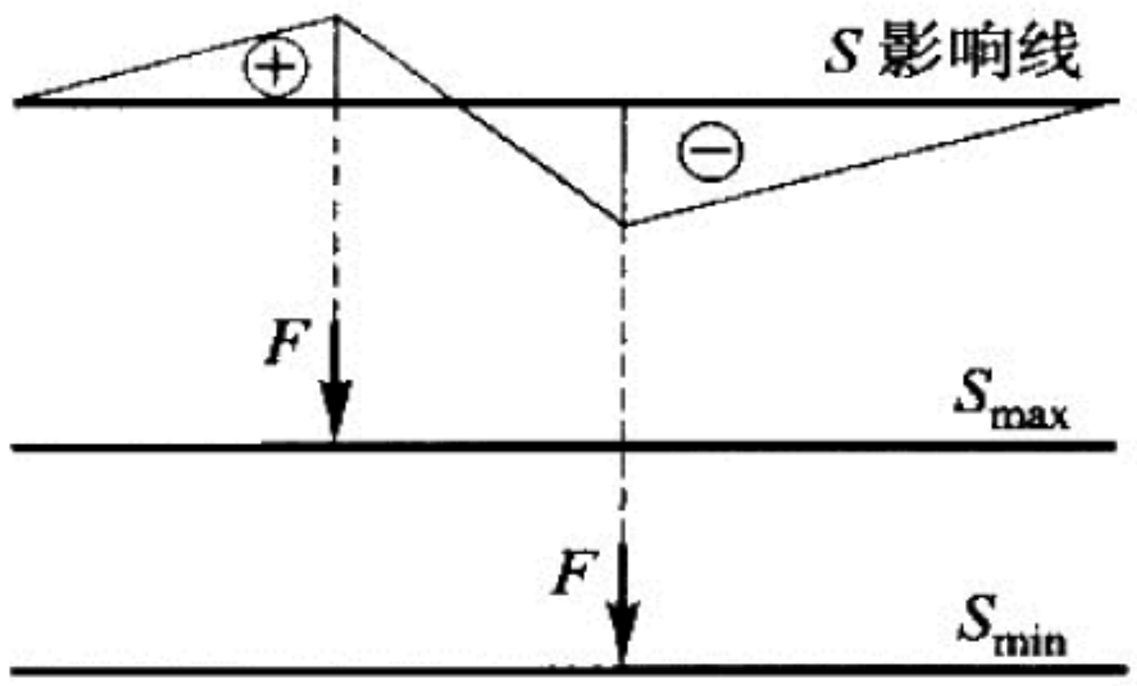


图 11-1-13

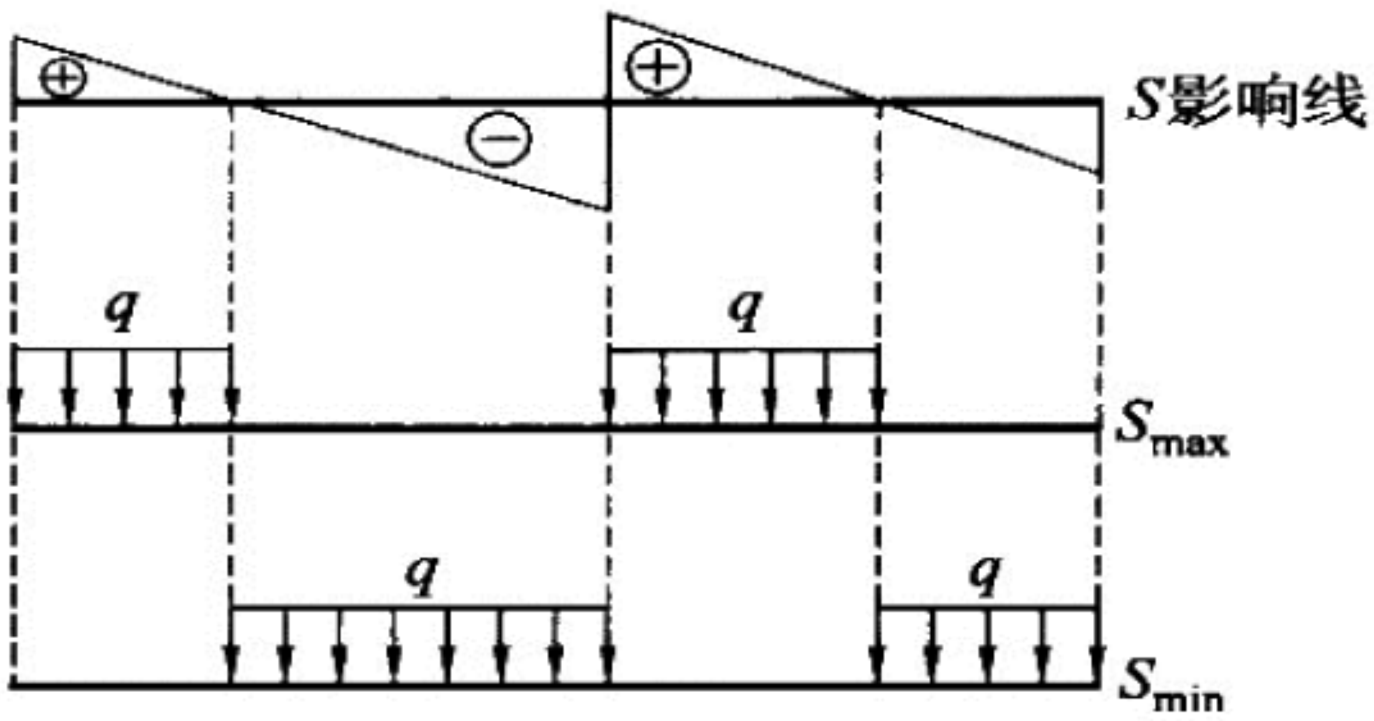


图 11-1-14

3．行列荷载

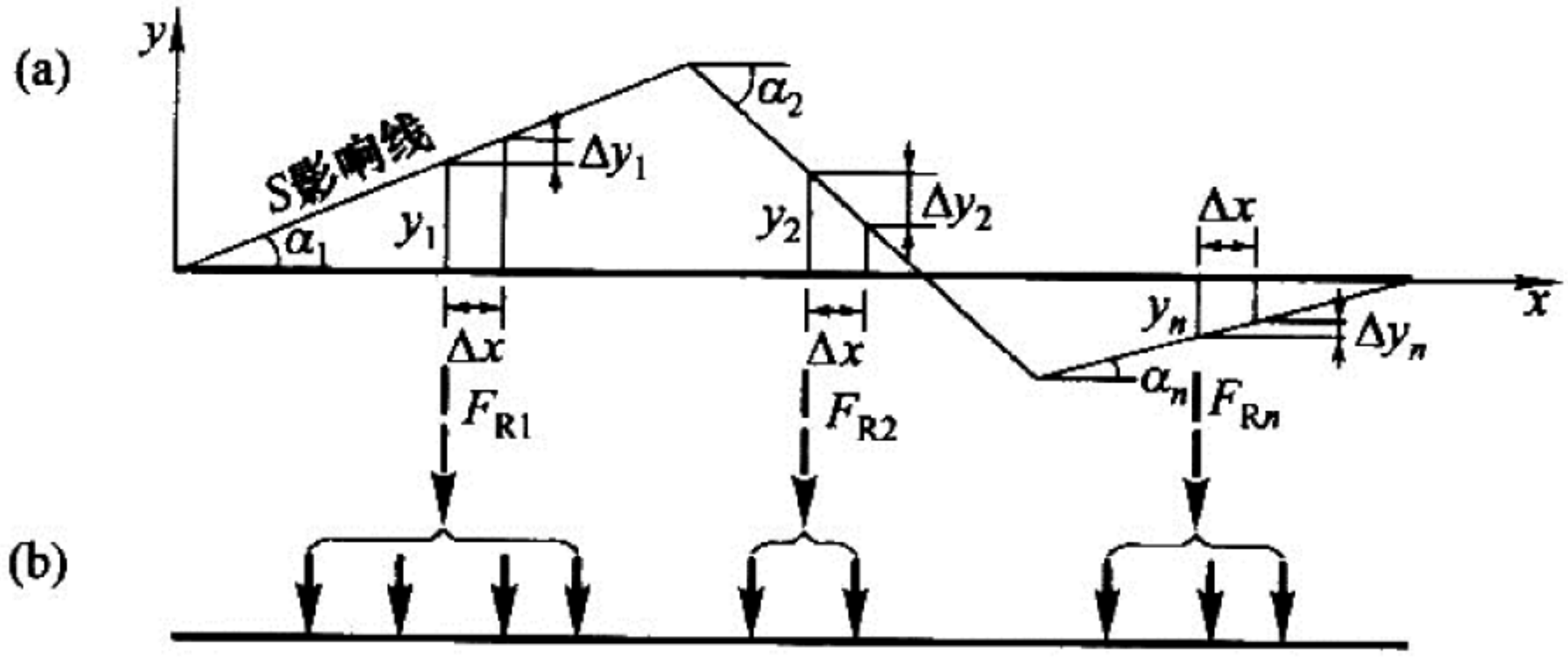


图 11-1-15

设某量值 S 影响线如图 11-1-15（a）所示为一折线形，各段直线的倾角为 α_1，α_2，…，α_n。取坐标轴 x 向右为正，y 向上为正，倾角 α 以逆时针方向为正。

（1）一组集中荷载处在图 11-1-15（b）所示位置，所产生的量值以 S_1 表示。

（2）若每一段直线范围内各荷载的合力分别为 F_{R1}，F_{R2}，…，F_{Rn}，则有

$$S_1 = F_{R1}y_1 + F_{R2}y_2 + \cdots + F_{Rn}y_n$$。

（3）当整个荷载组向右移动一微小距离 Δx 时，相应的量值 S_2 为

$$S_2 = F_{R1}(y_1 + \Delta y_1) + F_{R2}(y_2 + \Delta y_2) + \cdots + F_{Rn}(y_n + \Delta y_n)$$

（4）S 的增量为

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_2 - S_1 = F_{R1}\Delta y_1 + F_{R2}\Delta y_2 + \cdots + F_{Rn}\Delta y_n \\ &= F_{R1}\Delta x\tan\alpha_1 + F_{R2}\Delta x\tan\alpha_2 + \cdots + F_{Rn}\Delta x\tan\alpha_n \\ &= \Delta x\sum_{i=1}^{n} F_{Ri}\tan\alpha_i\end{aligned}$$

或写为变化率的形式为

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n} F_{Ri}\tan\alpha_i$$

（5）S 成为极值的条件

①S 成为极大的条件

荷载自该位置无论向左或向右移动微小距离，S 均将减小，即 ΔS＜0。由于荷载左移时 Δx＜0，而右移时 Δx＞0，故 S 为极大时应有

$$\left.\begin{aligned}&\text{荷载左移,}\quad \sum F_{Ri}\tan\alpha_i > 0\\ &\text{荷载右移,}\quad \sum F_{Ri}\tan\alpha_i < 0\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}2)$$

②S 成为极小的条件

$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$ 由负变正，则 S 在该位置为极小值，即 S 为极小时应有

$$\left.\begin{aligned}&\text{荷载左移,}\sum F_{Ri}\tan\alpha_i < 0\\ &\text{荷载右移,}\sum F_{Ri}\tan\alpha_i > 0\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}3)$$

总之，荷载向左、右移动微小距离时，$\sum_{i=1} F_{Ri}\tan\alpha_i$ 必须变号，S 才有可能是极值。

（6）基本概念

①临界荷载

作用在影响线的某一个定点且能使$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$变号的集中荷载称为临界荷载。

②临界位置

临界荷载的位置称为临界荷载。

③临界位置判别式

式（11-2）或式（11-3）称为临界位置判别式。

（7）临界位置的确定

①将行列荷载中的某一集中荷载置于影响线的某一顶点，然后令荷载分别向左、右移动，计算相应的$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$值，看其是否变号。

②当荷载左移时，此集中荷载应作为该顶点左边直线段上的荷载，右移时则应作为右边直线段上的荷载。

③如果此时$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$不变号，则说明此荷载位置不是临界位置，应换一个荷载置于顶点再行试算，直至使$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$变号（包括由正、负变为零或由零变为正、负），就找出了一个临界位置。

④在一般情况下，临界位置可能不止一个，需将与各临界位置相应的S极值均求出，再从中选取最大（最小）值，而其相应的荷载位置即为最不利荷载位置。

⑤为了减少试算次数，事先应大致估计最不利荷载位置。将行列荷载中数值较大且较为密集的部分置于影响线的最大竖标附近，同时注意位于同符号影响线范围内的荷载应尽可能多。

（8）三角形影响线临界位置判别

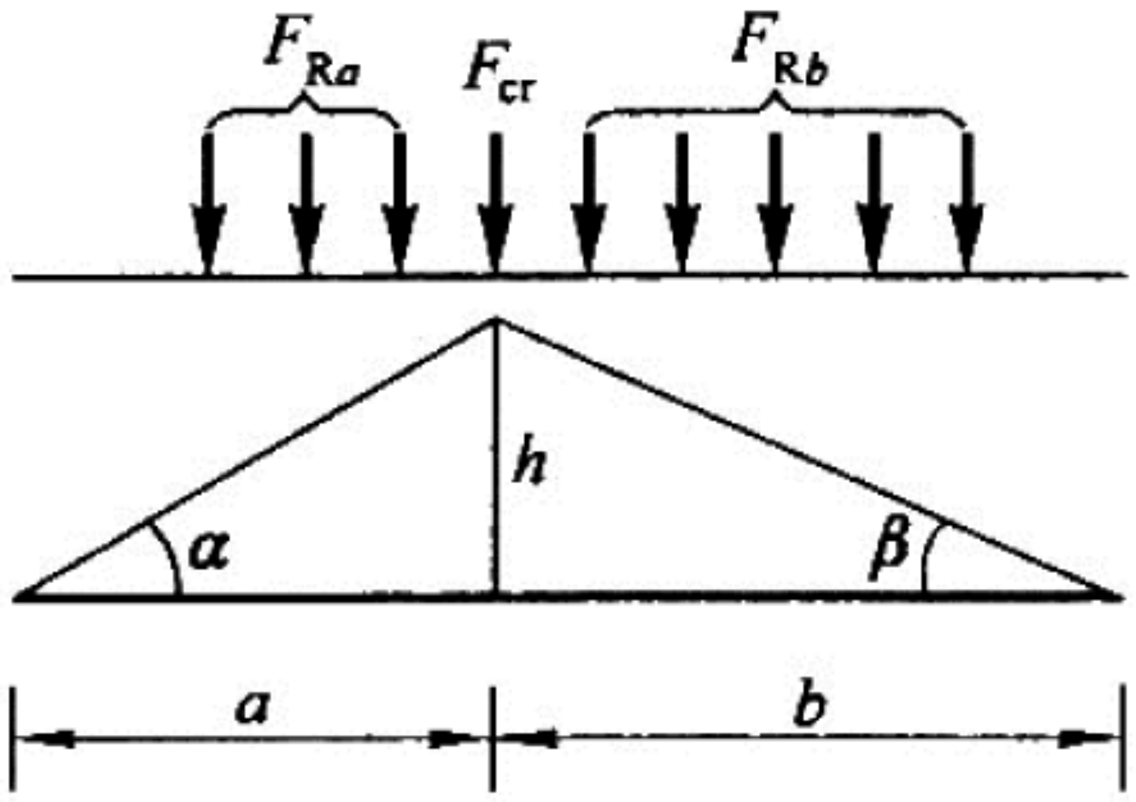


图 11-1-16

①集中荷载

对常用的三角形影响线（图 11-1-16），根据荷载向左、向右移动时$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$应由正变负，临界位置判别式可进一步简化为

$$(F_{Ra}+F_{cr})\tan\alpha-F_{Rb}\tan\beta>0$$

$$F_{Ra}\tan\alpha-(F_{cr}+F_{Rb})\tan\beta<0$$

式中，F_{cr}为临界荷载，处于三角形影响线的顶点；F_{Ra}、F_{Rb}分别表示F_{cr}以左和以右荷载的合力。

将$\tan\alpha=\dfrac{h}{a}$和$\tan\beta=\dfrac{h}{b}$代入得

$$\left.\begin{aligned}\frac{F_{Ra}+F_{cr}}{a}&>\frac{F_{Rb}}{b}\\ \frac{F_{Ra}}{a}&<\frac{F_{cr}+F_{Rb}}{b}\end{aligned}\right\}\qquad(11\text{-}4)$$

②均布荷载

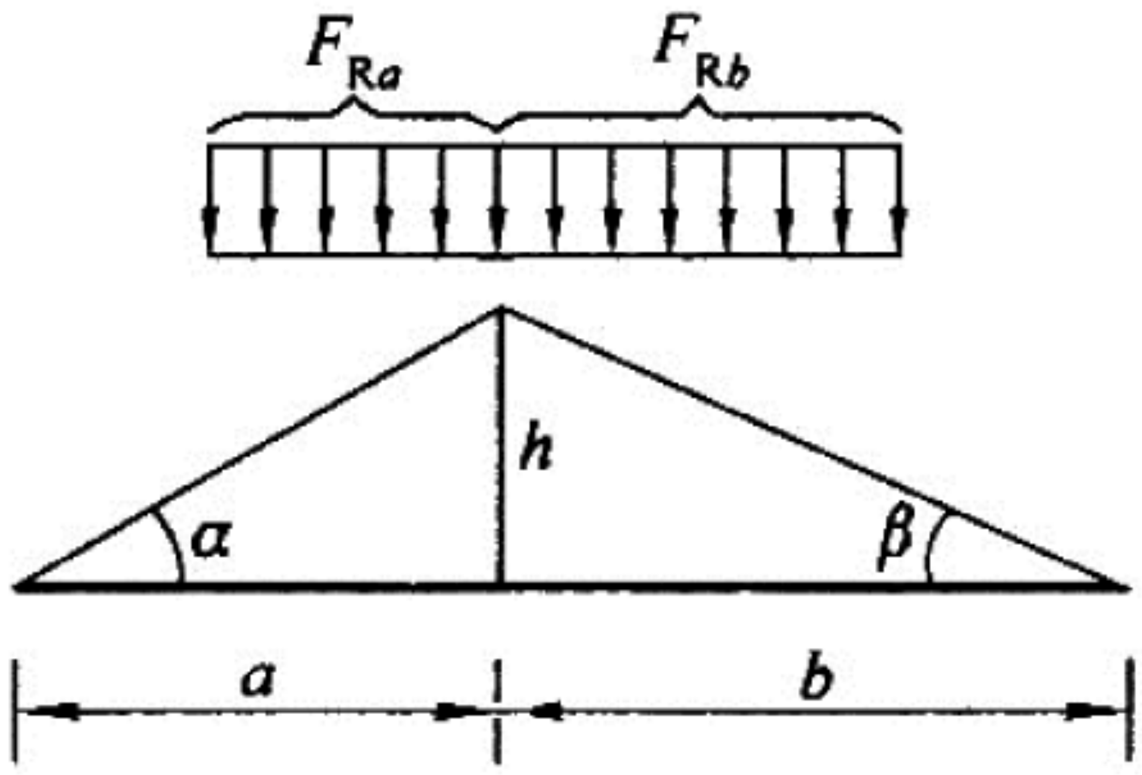


图 11-1-17

对于均布荷载跨过三角形影响线顶点的情况（图 11-1-17）。可由 $\frac{ds}{dx}=\sum F_{Ri}\tan\alpha_i=0$ 的条件来确定临界位置，有

$$\sum F_{Ri}\tan\alpha_i=F_a\frac{h}{a}-F_b\frac{h}{b}=0$$

得

$$\frac{F_a}{a}=\frac{F_b}{b} \tag{11-5}$$

即左、右两边的平均荷载应相等。

最后必须指出，对于直角三角形影响线（以及竖标有突变的影响线），式（11-2）、（11-3）、（11-4）、（11-5）均不再适用。

十、换算荷载

1．定义

所产生的某一量值与所给移动荷载产生的该量值的最大值 $S_{\max}$ 相等的均布荷载 K 称为换算荷载。满足 $KA_\omega=S_{\max}$，式中 A_ω 是量值 S 影响线的面积。

2．数值

（1）换算荷载的数值与移动荷载及影响线形状有关。但是对于竖标成固定比例的各影响线，其换算荷载相等。

（2）长度相同、顶点位置也相同但最大竖标不同的各三角形影响线是成固定比例的，故可用同一换算荷载。

表 11-1-2　中——活载的换算荷载（每线）kN／m

加载长度（l/m）	影响线最大纵坐标位置				
	端部	1/8 处	1/4 处	3/8 处	1/2 处
	K_0	$K_{0.125}$	$K_{0.25}$	$K_{0.375}$	$K_{0.5}$
1	500.0	500.0	500.0	500.0	500.0
2	312.5	255.7	250.0	250.0	250.0
3	250.0	238.1	222.2	200.0	187.5
4	234.4	214.3	187.5	175.0	187.5
5	210.0	197.1	180.0	172.0	180.0
6	187.5	178.6	166.7	161.1	166.7
7	179.6	161.8	153.1	150.9	153.1
8	172.2	157.1	151.3	148.5	151.3
9	165.5	151.5	147.5	144.5	146.7
10	159.8	146.2	143.6	140.0	141.3
12	150.4	137.5	136.0	133.9	131.2

加载长度（l/m）	影响线最大纵坐标位置				
	端部	1/8 处	1/4 处	3/8 处	1/2 处
	K_0	$K_{0.125}$	$K_{0.25}$	$K_{0.375}$	$K_{0.5}$
14	143.3	130.8	129.4	127.6	125.0
16	137.7	125.5	123.8	121.9	119.4
18	133.2	122.8	120.3	117.3	114.2
20	129.4	120.3	117.4	114.2	110.2
24	123.7	115.7	112.2	108.3	104.0
25	122.5	114.7	111.0	107.0	102.5
30	117.8	110.3	106.6	102.4	99.2
32	116.2	108.9	105.3	100.8	98.4
35	114.3	106.9	103.3	99.1	97.3
40	111.6	104.8	100.8	97.4	96.1
45	109.2	102.9	98.8	96.2	95.1
48	107.9	101.8	97.6	95.5	94.5
50	107.1	101.1	96.8	95.0	94.1
60	103.6	97.8	94.2	92.8	91.9
64	102.4	96.8	93.4	92.0	91.1
70	100.8	95.4	92.2	90.9	89.9
80	98.6	93.3	90.6	89.3	88.2
90	96.9	91.6	89.2	88.0	86.8
100	95.4	90.2	88.1	86.9	85.5
110	94.1	89.0	87.2	85.9	84.6
120	93.1	88.1	86.4	85.1	83.8
140	91.4	86.7	85.1	83.8	82.8
160	90.0	85.7	84.2	82.9	82.2
180	89.0	84.9	83.4	82.3	81.7
200	88.1	84.2	82.8	81.8	81.4

（3）表 11-1-2 列出了我国现行铁路标准荷载即“中——活载”的换算荷载，它是根据三角形影响线制成的。使用时应注意

①加载长度（荷载长度）l 系指同符号影响线长度（图 11-1-18）；

②αl 是顶点至较近零点的水平距离，故 α 的数值为 0～0.5（图 11-1-18）；

③当 l 或 α 值在表列数值之间时，K 值可按直线内插法求得。

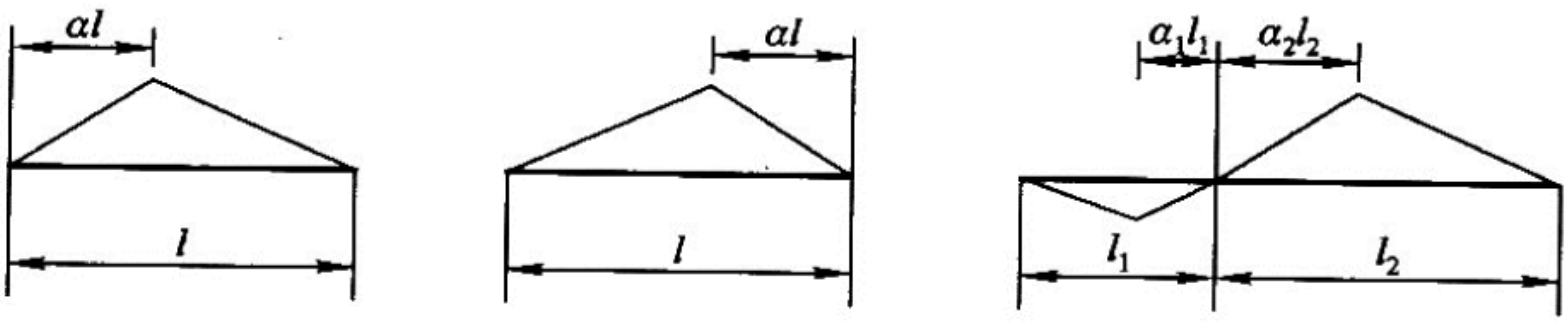


图 11-1-18

十一、简支梁的绝对最大弯矩

1．定义

在梁的所有各截面的最大弯矩中，其最大值称为绝对最大弯矩。

2．确定方法

（1）理论基础

当梁上作用的移动荷载都是集中荷载时，如图 11-1-19 所示。无论荷载在任何位置，弯矩图的顶点总是在集中荷载作用点处。绝对最大弯矩必定是发生在某一集中荷载作用点处的截面上。

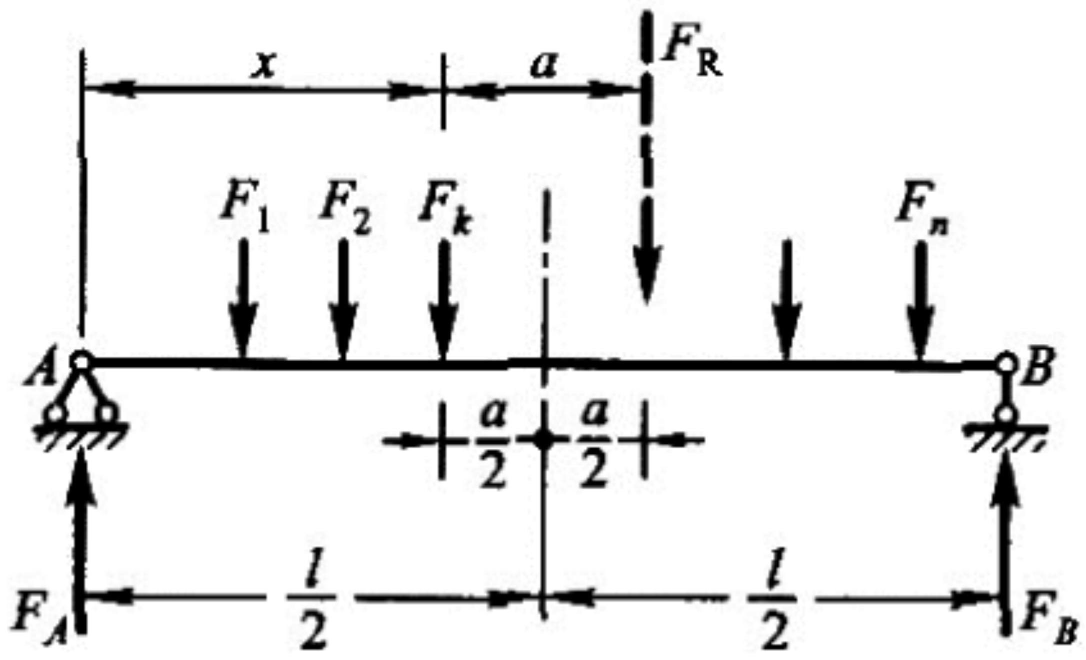


图 11-1-19

（2）解决方法

任选一集中荷载，看荷载在什么位置时，该荷载作用点处截面的弯矩达到最大值。然后，按同样方法，分别求出其他各荷载作用点处截面的最大弯矩，再加以比较，即可确定绝对最大弯矩。如图 11-1-19 所示

①试取某一集中荷载 F_k，它至左支座 A 的距离为 x，而梁上荷载的合力 F_R 至 F_k 的距离为 a。

②左支座反力为

$$F_A = \frac{F_R}{l}(l - x - a)$$

③ F_k 作用点截面的弯矩为

$$M_x = F_A x - M_K = \frac{F_R}{l}(l - x - a)x - M_K$$

式中，M_K 为 F_k 以左梁上荷载对 F_k 作用点的力矩总和，它是一个与 x 无关的常数。

④ M_x 为极大时，根据极值条件 $\frac{dM_x}{dx} = \frac{F_R}{l}(l - 2x - a) = 0$ 得

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \qquad (11\text{-}6)$$

a．当 F_k 与合力 F_R 的位置对称于梁的中点时，F_k 之下截面的弯矩达到最大值，其值为

$$M_{\max} = \frac{F_R}{l}(\frac{l}{2} - \frac{a}{2})^2 - M_k \qquad (11\text{-}7)$$

b．若合力 F_R 位于 F_k 的左边，则式（11-6）、（11-7）中 $\frac{a}{2}$ 前的减号应改为加号。

实际计算中，应事先估计发生绝对最大弯矩的临界荷载。

（3）计算步骤

①确定使梁中点截面 C 发生最大弯矩的临界荷载 F_k（此时可顺便求出梁中点截面 C 的最大弯矩 $M_{C（max）}$；

②应假设梁上荷载的个数并求其合力 F_R（大小及位置）；

③移动荷载组使 F_k 与 F_R 对称于梁的中点，此时应注意查对梁上荷载是否与求合力时相符，如不符（即有荷载离开梁上或有新的荷载作用到梁上），则应重新计算合力，再行安排直至相符；

④最后计算 F_k 作用点截面的弯矩，通常即为绝对最大弯矩；

⑤当假设不同的梁上荷载个数均能实现上述荷载布置时，则应将不同情况 F_k 下截面的弯矩分别求出，然后选大者为绝对最大弯矩。

十二、简支梁的包络图

1．定义

联结各截面的最大、最小内力的图形，称为内力包络图。

2．计算

在实际工作中，对于活载还须考虑其冲击力的影响（即动力影响），通常是将静活载所产生的内力值乘以冲击系数 1＋μ。

设梁所承受的恒载为均布荷载 q，某一内力 S 影响线的正、负面积及总面积分别为 $A_{\omega+}$ 、$A_{\omega-}$及$\sum A_\omega$，活载的换算均布荷载为 K，则在恒载和活载共同作用下该内力的最大、最小值的计算式可写为

$$\left.\begin{aligned} S_{\max} &= S_q + S_{K(\max)} = q\sum A_\omega + (1+\mu)KA_{\omega+} \\ S_{\min} &= S_q + S_{K(\min)} = q\sum A_\omega + (1+\mu)KA_{\omega-} \end{aligned}\right\}$$

十三、超静定结构影响线作法概述

1．方法

先作出多余未知力的影响线，然后根据叠加法便可求得其余反力、内力的影响线。

2．反力或内力影响线的作法

（1）按力法求出影响线方程（静力法）

（2）利用位移图来作影响线（机动法）

3．静力法

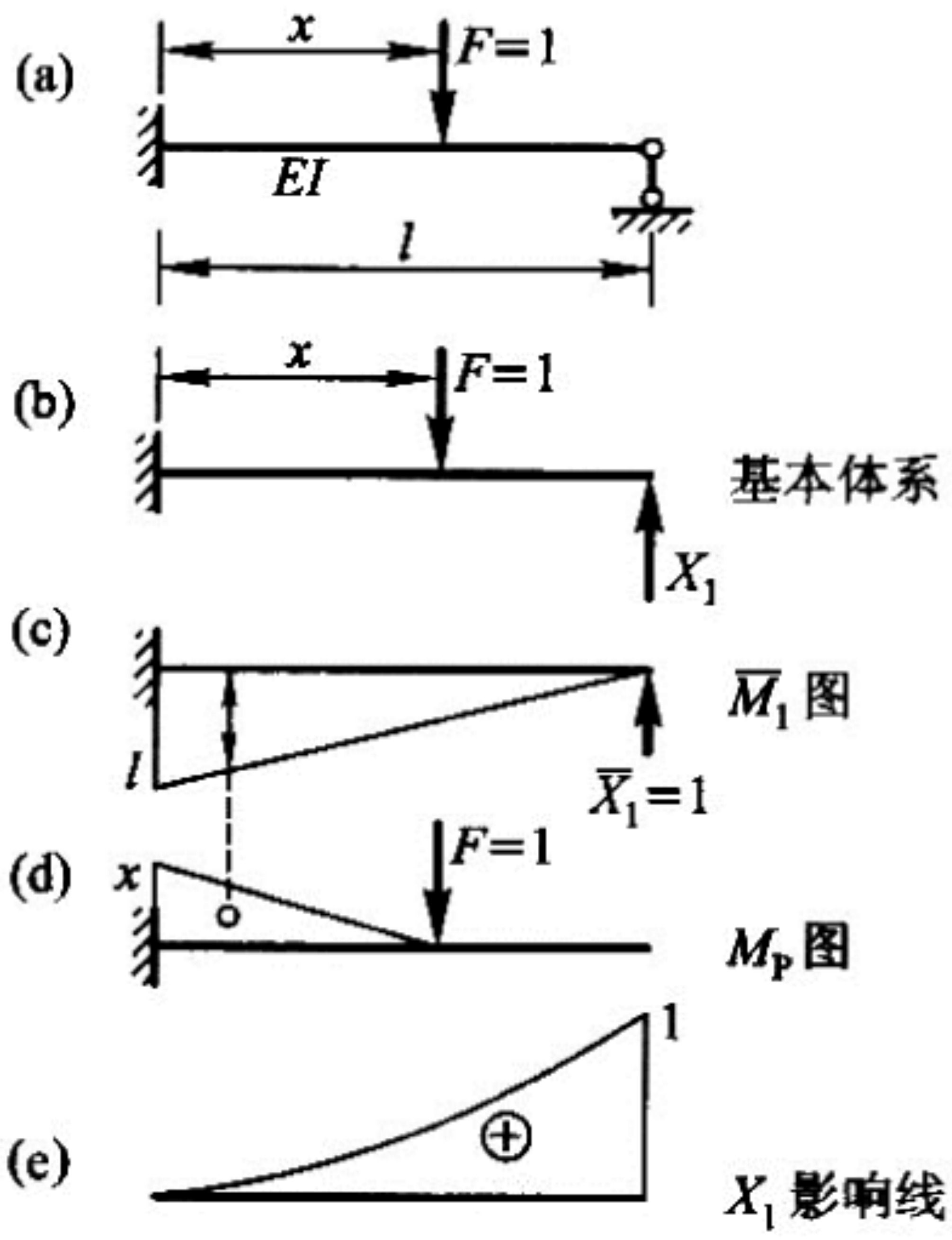


图 11-1-20

（1）如图 11-1-20（a）所示超静定梁，求右端支座反力影响线时

①以该支座为多余联系而将其去掉，并代以多余未知力 X_1（设向上为正），如图 11-1-20（b）所示。

②力法典型方程

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \tag{11-8}$$

③绘出 $\overline{M}_1$、M_P 图如图 11-1-20（c）、（d）所示。图乘法可求得

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI} = \frac{l^3}{3EI} \\ \delta_{1P} &= \sum\int\frac{\overline{M}_1 M_P\mathrm{d}s}{EI} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EI} \end{aligned} \tag{11-9}$$

④求解 X_1 的大小

$$X_1 = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{x^2(3l - x)}{2l^3}$$

⑤绘出 X_1 的影响线。如图 11-1-20（e）所示。

4．机动法在一次超静定结构中的应用

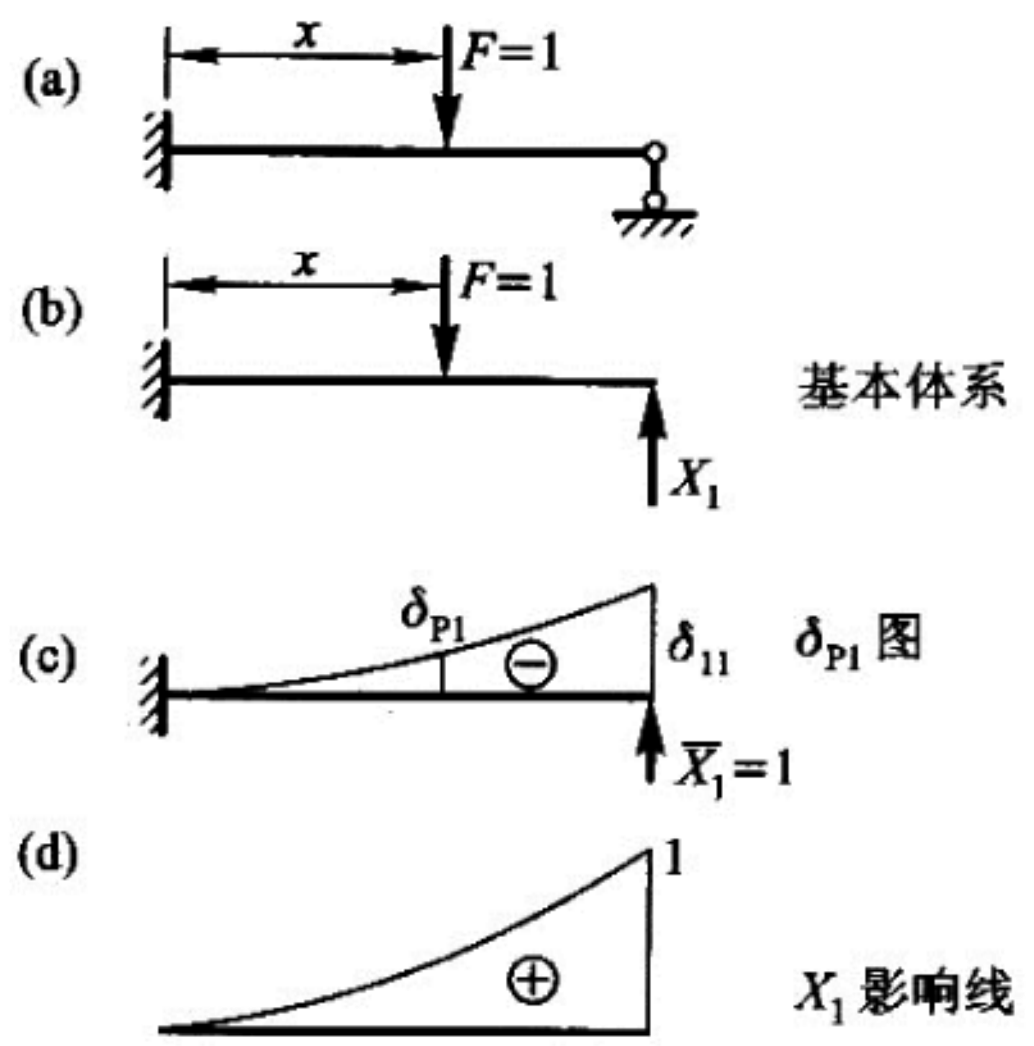


图 11-1-21

（1）利用位移互等定理 $\delta_{1p} = \delta_{p1}$ 得

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{P1}}{\delta_{11}} \tag{11-10}$$

式中，δ_{1p} 为基本结构在移动荷载 F＝1 作用下沿 X_1 方向的位移影响线；δ_{p1} 为基本结构在固定荷载 $\overline{X}_1 = 1$ 作用下沿 F＝1 方向的位移，由于 F＝1 是移动的，故 δ_{p1} 是基本结构在 $\overline{X}_1 = 1$ 作用下的竖向位移图（图 11-1-21（c））。

（2）位移图 δ_{1p} 除以常数 δ_{11}，反号便是 X_1 影响线（图 11-1-21（d））。

（3）求位移图 δ_{p1} 时，仍用图乘法，注意此时 $\overline{M}_1$ 图应是实际状态，而 M_P 图则是虚拟状态，故有 $\delta_{p1} = \sum\int\frac{M_p\overline{M}_1 ds}{EI} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EI}$。结果与前面静力法中求得的 δ_{1p}（位移影响线）完全相同。

（4）设 δ_{11}＝1，则有 $X_1 = -\delta_{P1}$，表明此时的竖向位移图就代表 X_1 影响线，只是正负号相反。由于 δ_{p1} 向下为正，故当 δ_{p1} 向上时 X_1 为正。，

（5）两种机动法的异同

①相同点

都是以去掉与所求未知力相应的联系后，体系沿未知力正向发生单位位移时所得的竖向位移图来表示该力影响线的。

②不同点

a．对于静定结构，去掉一个联系后就成为具有一个自由度的几何可变体系，故其位移图是由刚体位移的直线段组成；

b．超静定结构去掉一个多余联系后仍为几何不变体系，其位移图则是在所求多余未知力作用下的弹性曲线。

（6）机动法的优点

超静定结构弹性曲线的轮廓一般可凭直观勾绘出来，故在具体计算之前即可迅速确定其大致形状，给实际工作带来很大方便。

5．机动法在多次超静定结构中的应用

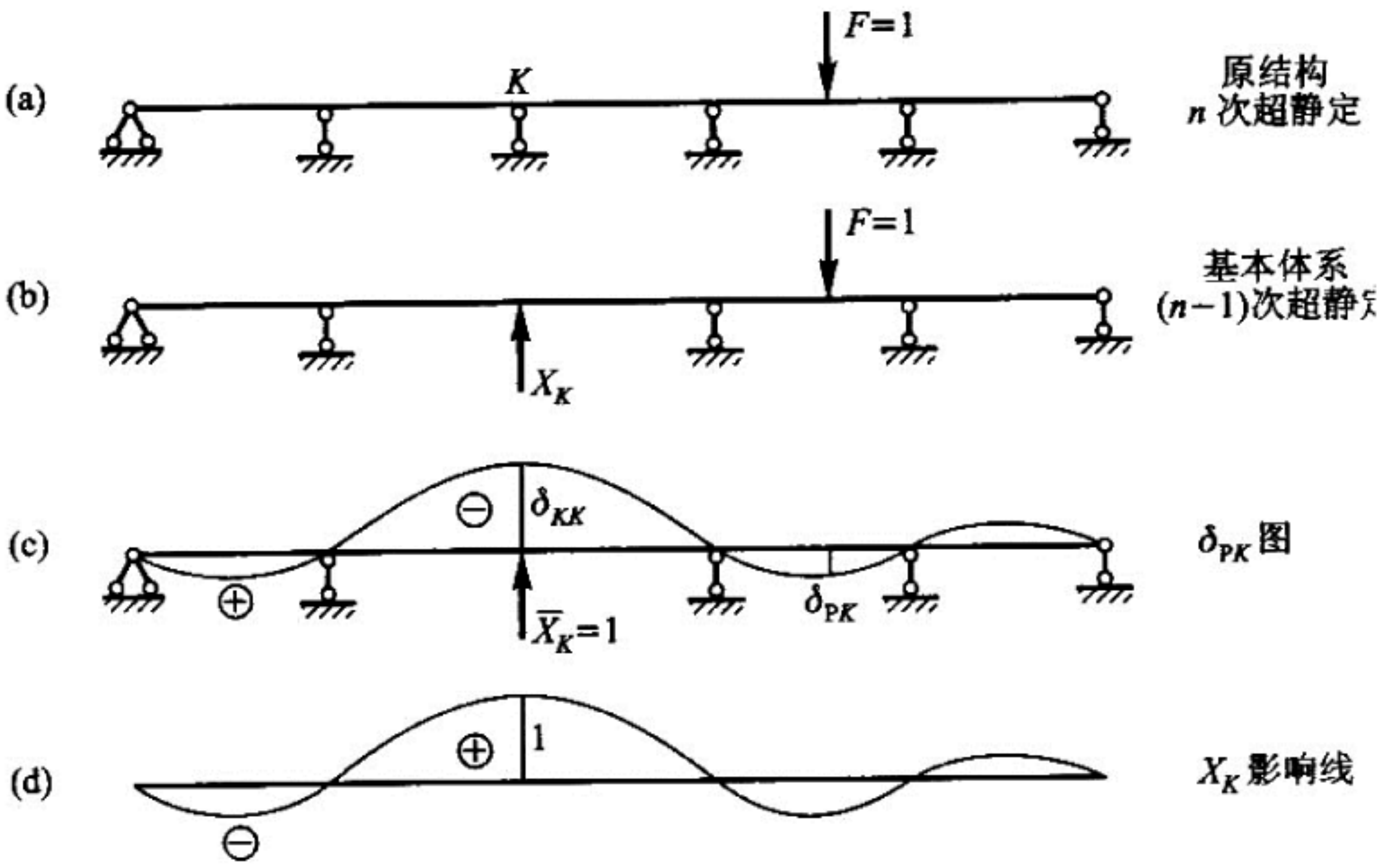


图 11-1-22

如图 11-1-22（a）所示连续梁为 n 次超静定结构，求反力 X_K 影响线。

（1）去掉相应的联系，以 X_K 代替（假设向上为正），得到 $(n-1)$ 次超静定结构（图 11-1-22（b））。

（2）根据位移条件，建立典型方程

$$\delta_{KK}X_K+\delta_{KP}=0$$

（3）根据位移互等定理 $\delta_{KP}=\delta_{PK}$，得

$$X_K=-\frac{\delta_{KP}}{\delta_{KK}}=-\frac{\delta_{PK}}{\delta_{KK}}$$

式中，δ_{KK} 为基本结构上由于 $\overline{X}_K=1$ 作用引起的沿 X_K 方向的位移，它恒为正且是常数；δ_{PK} 则为基本结构在 $\overline{X}_K=1$ 作用下的竖向位移图（图 11-1-22（c））。

（4）将位移图 δ_{PK} 的竖标乘以常数 $\dfrac{1}{\delta_{KK}}$，反号得到所求的 X_K 影响线（图 11-1-22（d））。δ_{KK} 和 δ_{PK} 都是 $(n-1)$ 次超静定基本结构的位移，须按求超静定结构位移的方法求出。

（5）假设 $\delta_{KK}=1$，则有 $X_K=-\delta_{PK}$ 即体系在 X_K 作用下沿 X_K 方向的位移若为单位值时，所得的竖向位移图即为 X_K 影响线（图 11-1-22（d））。可根据位移图 δ_{PK} 的轮廓（图 11-1-22（c）），大致了解 X_K 影响线的形状。

十四、连续梁的均布活载最不利位置及包络图

1．连续梁包络图

逐一作出各截面的内力影响线，然后利用影响线计算在恒载和活载共同作用下各截面的最大、最小内力，最后绘出内力包络图，以此作为设计的依据。

2．简化情况

（1）在均布活载作用下某内力的最不利荷载位置

只需绘出其影响线的轮廓即可确定。根据公式 $S = qA_{\omega}$，当均布活载布满影响线正号面积部分时，该内力产生最大值；反之，当均布活载布满影响线的负号面积部分时，该内力产生最小值。轮廓根据机动法便可直观绘出。

（2）连续梁各截面的内力影响线

连续梁各截面的内力影响线大多是在某一跨内不变号的，如图 11-1-23 所示。其相应最大、最小值的最不利荷载位置，大多是在若干跨内布满荷载。剪力 F_{SC} 影响线在其截面所在跨度内要变号，求最大、最小值时不应在该跨满跨加载。

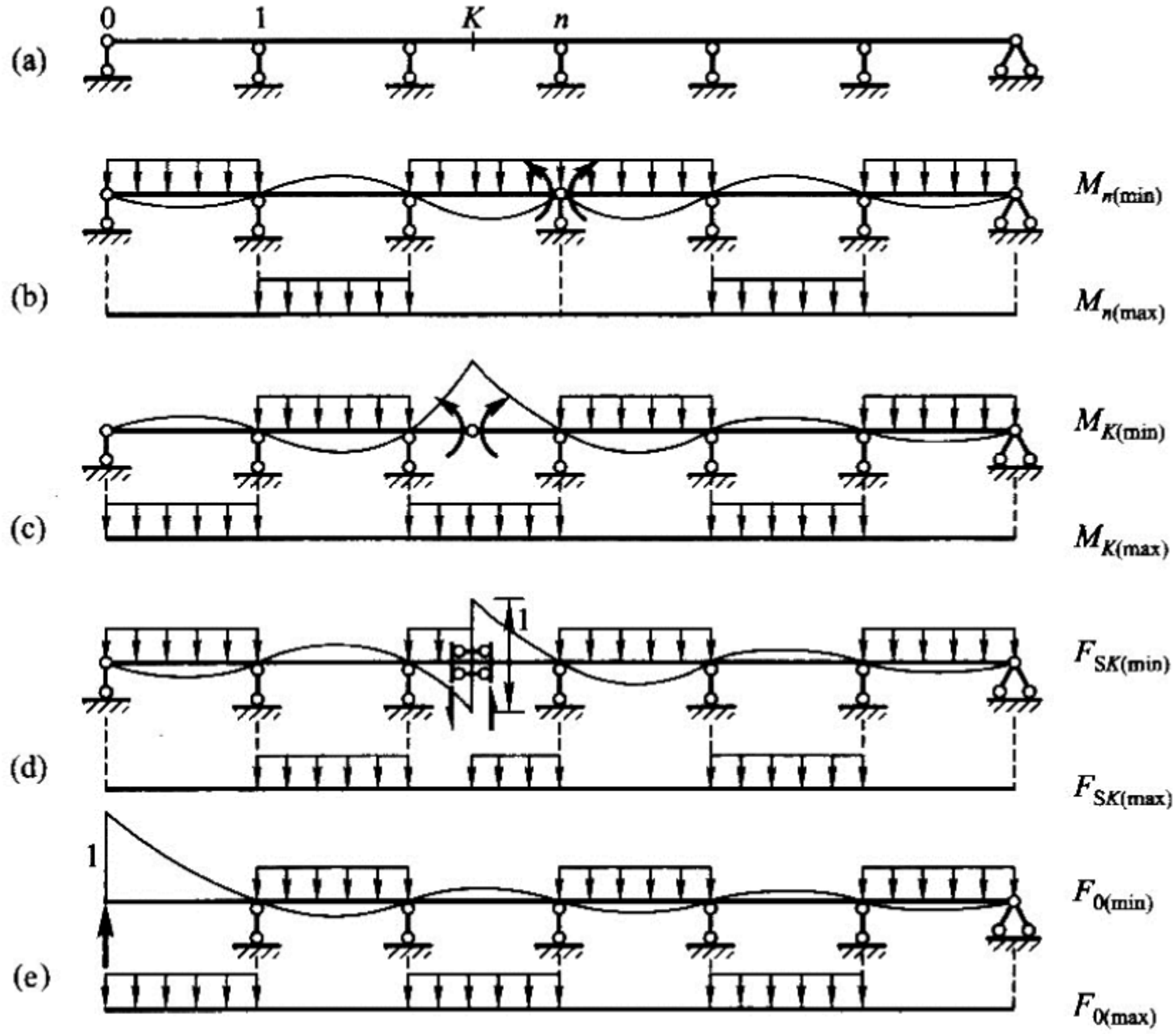


图 11-1-23

（3）包络图的作法

①把每一跨单独布满活载时的内力图逐一作出；

②对于任一截面，将这些内力图中对应的所有正值相加，便得到该截面在活载下的最大内力。将对应的所有负值相加，便得到该截面在活载下的最小内力；

③将它们分别与恒载作用时对应的内力相加，便得到该截面总的最大、最小内力；

④绘出内力包络图。

以上所述连续梁在均布活载下最不利荷载位置的判断及最大（最小）内力的计算方法，称为逐跨加载组合法。

3．多层多跨刚架

多层多跨刚架任一截面产生最大（最小）内力时，为在若干跨上满布荷载。

（1）先逐一求出每一跨单独满布荷载时全结构的内力；

（2）进行内力组合，即对于任一截面内力，将各种情况中对应的所有的正值相加即得其最大内力，将对应的所有负值相加即得其最小内力。

11.2 课后习题详解

复习思考题

1．什么是影响线？影响线上任一点的横坐标与纵坐标各代表什么意义？

答：（1）影响线是指当一个指向不变的单位集中荷载（通常是竖直向下的）沿结构移动时，表示某一指定量值变化规律的图形。

（2）横坐标代表单位集中荷载 F＝1 的位置；纵坐标代表研究的一个反力或某一截面的某一项内力的量值。

2．用静力法作某内力影响线与在固定荷载作用下求该内力有何异同？

答：用静力法作某内力影响线与在固定荷载作用下求该内力的异同点分别为：

（1）相同点

两者所用方法完全相同，即都是取隔离体由平衡条件来求该反力或内力。

（2）不同点

用静力法作某内力影响线时，作用的荷载是一个移动的单位荷载，因而所求得的该反力或内力是荷载位置 x 的函数，即影响线方程；而在固定荷载作用下求该内力时，所求的就是某处的内力值。

3．在什么情况下影响线方程必须分段列出？

答：当荷载作用在结构的不同部分上所求量值的影响线方程不同时，应将它们分段写出，并在作图时注意各方程的适用范围。

4．为什么静定结构内力、反力的影响线一定是由直线组成的图形？

答：因为对于静定结构，其内力和反力影响线方程都是 x 的一次函数，故静定结构的反力和内力影响线都是由直线所组成的。

5．何谓间接荷载？如何做间接荷载下的影响线？

答：（1）间接荷载是指对主梁来说，直接作用在其上面纵梁上的荷载。

（2）绘制间接荷载作用下影响线的步骤：

①作出直接荷载作用下所求量值的影响线；

②取各结点处的竖标，并将其顶点在每一纵梁范围内连以直线。

6．机动法作影响线的原理是什么？其中 δ_P 代表什么意义？

答：（1）机动法作影响线的理论依据是虚位移原理，即刚体体系在力系作用下处于平衡的必要和充分条件是：在任何微小的虚位移中，力系所作的虚功总和为零。

（2）δ_P 则为荷载 F＝1 的作用点沿其方向的位移，由于 F＝1 是移动的，因而 δ_P 就是荷载所沿着移动的各点的竖向虚位移图。

7．某截面的剪力影响线在该截面处是否一定有突变？突变处左右两竖标各代表什么意义？突变处两侧的线段为何必定平行？

答：（1）截面的剪力影响线在该截面处一定有突变。

（2）突变处左右两竖标分别代表截面左右两侧的绝对竖向位移。

（3）突变两侧的线段必定平行。因为采用机动法时，截面两侧刚片间是用两根平行链杆相连，它们之间只能做相对的平行移动，故在虚位移图中截面两侧应为平行直线，亦即该截面处剪力影响线的左右两直线是相互平行的。

8．桁架影响线为何要区分上弦承载还是下弦承载？在什么情况下两种承载方式的影响线是相同的？

答：（1）因为荷载 F＝1 沿上弦移动和沿下弦移动两种情况下所作出的影响线有时是不相同的。

（2）在绘制斜腹杆的轴力影响线时，两种承载方式的影响线是相同的；在绘制竖直腹杆的轴力影响线时，一般情况下，两种承载方式的影响线是不同的。

9．恒载作用下的内力为何可以利用影响线来求？

答：影响线横坐标代表单位集中荷载 F＝1 的位置；影响线纵坐标代表研究的一个反力或某一截面的某一项内力的量值。故计算恒载作用下的内力，只需将恒载数值乘以影响线的纵坐标，应用叠加原理即可求得。

10．如何利用影响线求图 11-2-1 所示伸臂梁 B 支座左侧截面的剪力？

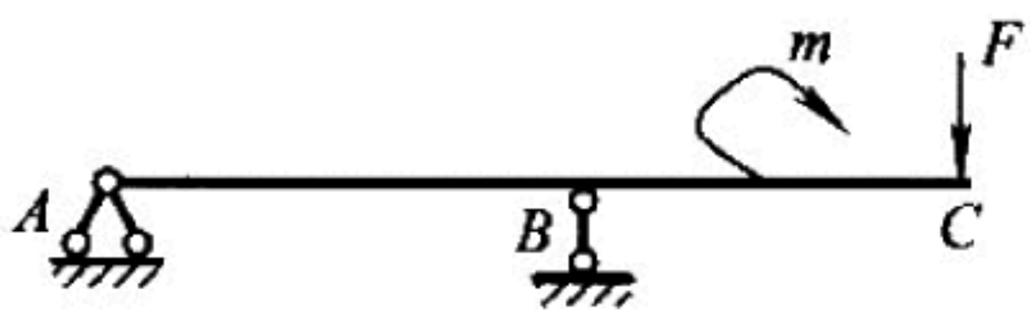


图 11-2-1

答：首先需要绘制出 B 支座左侧截面在单位集中荷载下的影响线和单位集中力偶下的影响线，然后分别用 F 和 m 乘以相应影响线对应位置处的纵坐标叠加在一起即得到 B 支座左侧截面的最终剪力。

11．何谓最不利荷载位置？何谓临界荷载和临界位置？

答：（1）最不利位置是指某一量值发生最大（或最小）值的荷载位置。

（2）临界荷载是指能使 $\sum F_{Ri}\tan\alpha_i$ 变号的集中荷载；临界位置是指临界荷载对应的荷载位置。

12 为什么当影响线竖标有突变时，不能用判别式（11-2）～式（11-5）来判断临界位置？

答：因为判别式（11-2）～式（11-5）判断临界位置时是应用变化率 $\frac{\Delta S}{\Delta x}=\sum_{i=1}^{n}F_{Ri}\tan\alpha_i$ 的正负来判断的，这要求影响线的方程是连续的，当影响线竖标发生突变时，则该位置为跳跃间断点，不再连续，故此时不能再用判别式（11-2）～式（11-5）来判断临界位置。

13．利用影响线确定行列荷载下量值 S 的最不利荷载位置时，为何用增量的比值 $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ 而不用导数 $\frac{dS}{dx}$ 来求量值 S 的极值？

答：量值 S 影响线在图形的尖点（如三角形的顶点）处连续但导数不存在，此时 $\frac{dS}{dx}$ 无意义，即判别不了此时的最不利荷载位置；而增量的比值 $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ 在图形的尖点处可以利用极限得出，即可以判断此时的最不利荷载位置。

14．简支梁的绝对最大弯矩与跨中截面最大弯矩是否相等？什么情况下二者会相等？

答：（1）简支梁的绝对最大弯矩与跨中截面最大弯矩通常情况不相等。

（2）只有当梁上移动荷载系的合力与临界荷载共线时（或梁上荷载对临界荷载是左右对称布置时），两者才相等，此时简支梁的绝对最大弯矩就是跨中截面最大弯矩。

15．何谓内力包络图？它与内力图、影响线有何区别？三者各有何用途？

答：（1）内力包络图是指联结各截面的最大、最小内力的图形。

（2）内力包络图与内力图、影响线的区别：

①内力图是指在恒载作用下结构各个截面对应内力值连接成的图形，其纵坐标是指在恒载作用下结构各个截面对应的内力量值；

②内力包络图是指联结各截面的最大、最小内力的图形，其纵坐标是指结构各个截面在单位移动荷载作用下产生的内力的最值；

③影响线是指在一个指向不变的单位集中移动荷载作用下表示某一指定量值变化规律的图形，其纵坐标是指单位移动荷载作用下某一截面内力的量值。

（3）内力图、影响线以及内力包络图的用途：

①内力图是用来对恒载作用下的结构进行受力分析；

②影响线是用来确定最不利荷载的位置；

③内力包络图可以直观表现出结构最大内力值，是作为结构设计和检算的依据。

16．试述用机动法作超静定结构内力（反力）影响线的原理与步骤，它与静定结构的机动法作影响线有何异同？

答：（1）以 n 次超静定结构说明其内力（反力）影响线的原理与步骤如下：

①去掉相应的联系，以 X_K 代替（假设向上为正），得到 $(n-1)$ 次超静定结构；

②根据位移条件，建立典型方程：$\delta_{KK}X_K+\delta_{KP}=0$；

③根据位移互等定理 $\delta_{KP}=\delta_{PK}$，得 $X_K=-\dfrac{\delta_{KP}}{\delta_{KK}}=-\dfrac{\delta_{PK}}{\delta_{KK}}$，式中 δ_{KK} 为基本结构上由于 $\overline{X}_K=1$ 作用引起的沿 X_K 方向的位移，它恒为正且是常数；δ_{PK} 则为基本结构在 $\overline{X}_K=1$ 作用下的竖向位移图；

④将位移图 δ_{PK} 的竖标乘以常数 $\dfrac{1}{\delta_{KK}}$，并反号得到所求的 X_K 影响线。δ_{KK} 和 δ_{PK} 都是 $(n-1)$ 次超静定基本结构的位移，须按求超静定结构位移的方法求出；

⑤假设 $\delta_{KK}=1$，则有 $X_K=-\delta_{PK}$ 即体系在 X_K 作用下沿 X_K 方向的位移若为单位值时，所得的竖向位移图即为 X_K 影响线。可根据位移图 δ_{PK} 的轮廓，大致了解 X_K 影响线的形状。

（2）超静定结构与静定结构机动法的异同

①相同点

两者都是以去掉与所求未知力相应的联系后，体系沿未知力正向发生单位位移时所得的竖向位移图来表示该力影响线。

②不同点

a．对于静定结构，去掉一个联系后就成为一个自由度的几何可变体系，故其位移图是由刚体位移的直线段组成；

b．超静定结构去掉一个多余联系后仍为几何不变体系，其位移图则是在所求多余未知力作用下的弹性曲线。

17. 为什么可以采用比原结构超静定次数低的超静定结构作为力法基本结构？此时典型方程的意义是什么？系数、自由项的含义是什么？怎样求得？

答：(1) 因为比原结构超静定次数低的超静定结构仍然可以做出在去掉约束处未知力作用下的弯矩图和外荷载作用下的弯矩图。

（2）典型方程的意义：基本结构在部分多余未知力和荷载的共同作用下，在去掉多余联系处后，沿该多余未知力方向的位移，应与原结构相应的位移相等。

（3）系数、自由项的含义分别为：

①主系数 δ_{ii} 的含义：单位多余未知力 $X_i=1$ 单独作用时所引起的沿其本身方向上的位移；

②副系数 δ_{ij} 的含义：单位多余未知力 $X_j=1$ 单独作用时所引起的沿 X_i 方向上的位移。

③自由项 Δ_{iP} 的含义：荷载 F 单独作用时所引起的沿 $X_i=1$ 方向上的位移。

（4）系数、自由项的计算分别为：

①主系数 δ_{ii} 的计算：超静定的基本结构在 $X_i=1$ 单独作用时弯矩图的自乘；

②副系数 δ_{ij} 的计算：超静定基本结构在 $X_i=1$ 单独作用时弯矩图与 $X_j=1$ 单独作用时弯矩图图乘；

③自由项 Δ_{iP} 的计算：超静定基本结构在荷载 F 单独作用时弯矩图与超静定的基本结构在 $X_i=1$ 单独作用时弯矩图图乘。

习题

11-1　图 11-2-2（a）为一简支梁在 C 点有竖向单位力作用时的弯矩图，图（b）为此简支梁 C 截面的弯矩影响线。试指出图中 y_1 和 y_2 各代表的具体意义。

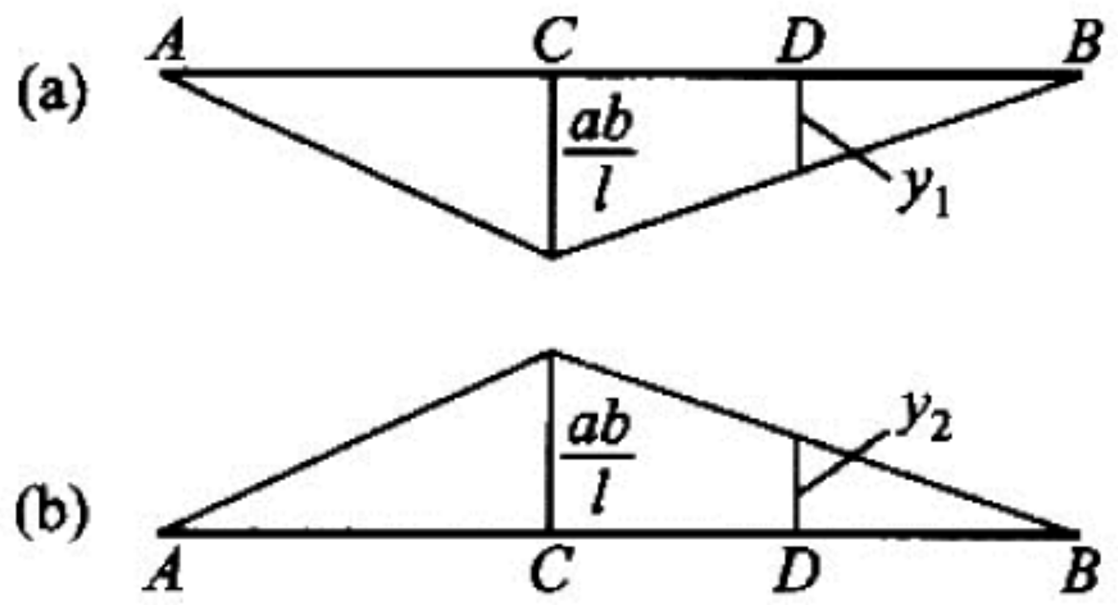


图 11-2-2（题 11-1）

答：（a）中 y_1 指当 C 处作用单位力时，D 点的弯矩值大小。

（b）中 y_2 指当单位荷载 F＝1 移动到 D 点时，C 点的弯矩值大小。

11-2　试作图示悬臂梁的反力 F_{AV}、F_{AH}、M_A 及内力 F_{SC}、M_C 影响线。

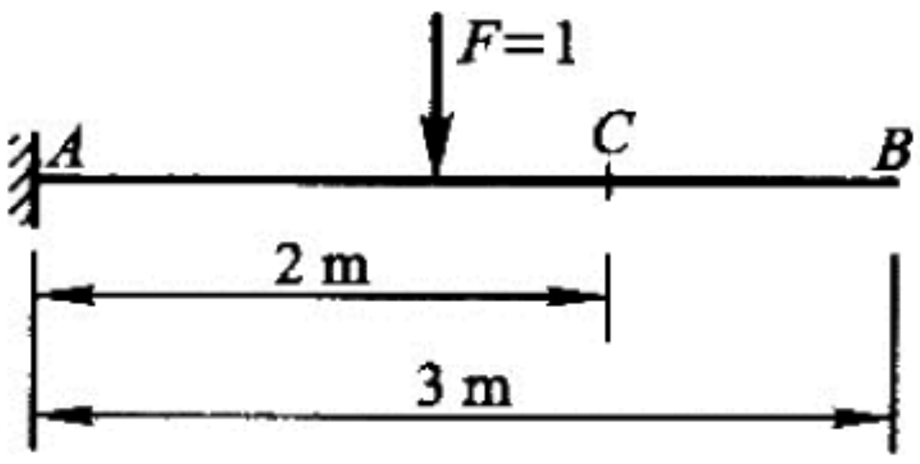


图 11-2-3（题 11-2）

解：采用机动法绘制影响线。

首先去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使得体系沿 S 的正向发生单位位移，此时根据每一刚片的位移为直线，以及在每一段支座处竖向支座大小为零，便可迅速绘出各反力和内力的影响线图形，如图 11-2-4 所示。

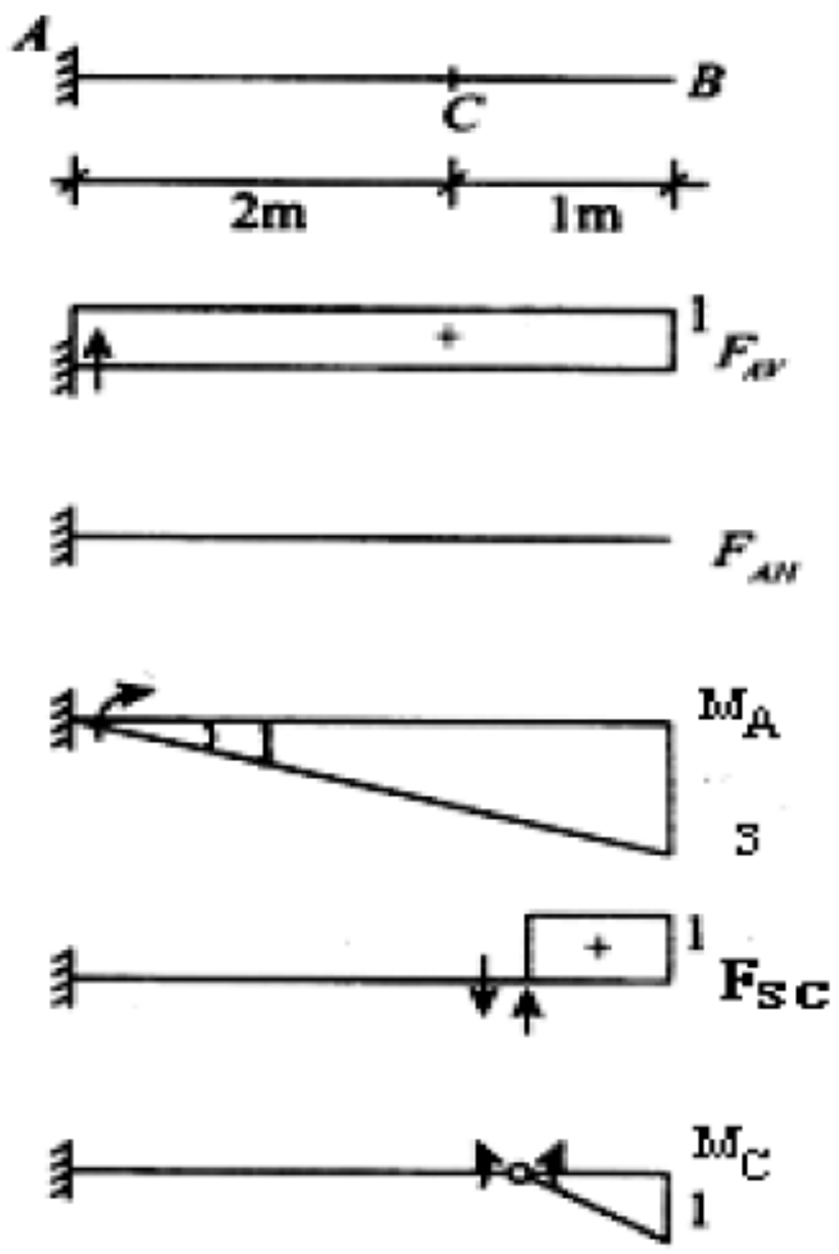


图 11-2-4

11-3　试作图示伸臂梁F_B、M_C、F_{SC}、M_B、F_{SB}^L和F_{SB}^R影响线。

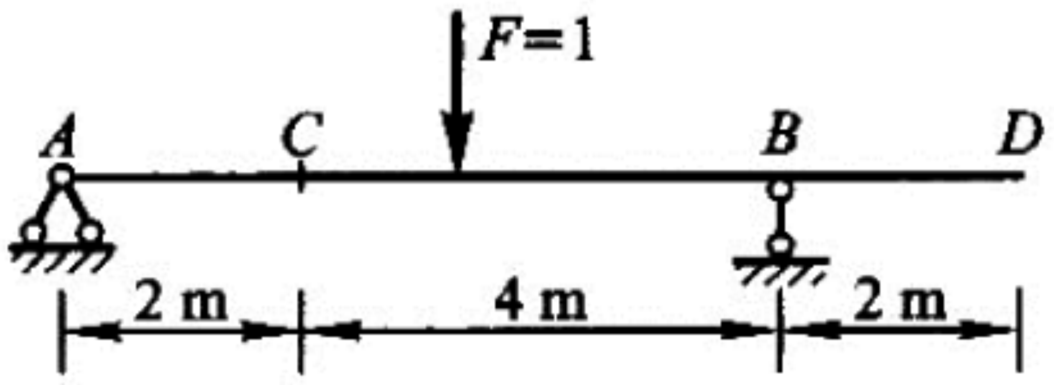


图 11-2-5（题 11-3）

解：用机动法绘制影响线。

去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使得体系沿 S 的正向发生单位位移，此时根据每一刚片的位移为直线，以及在每一支座竖向位移为零，便可迅速画出各内力和反力影响线图形，如图 11-2-6 所示。

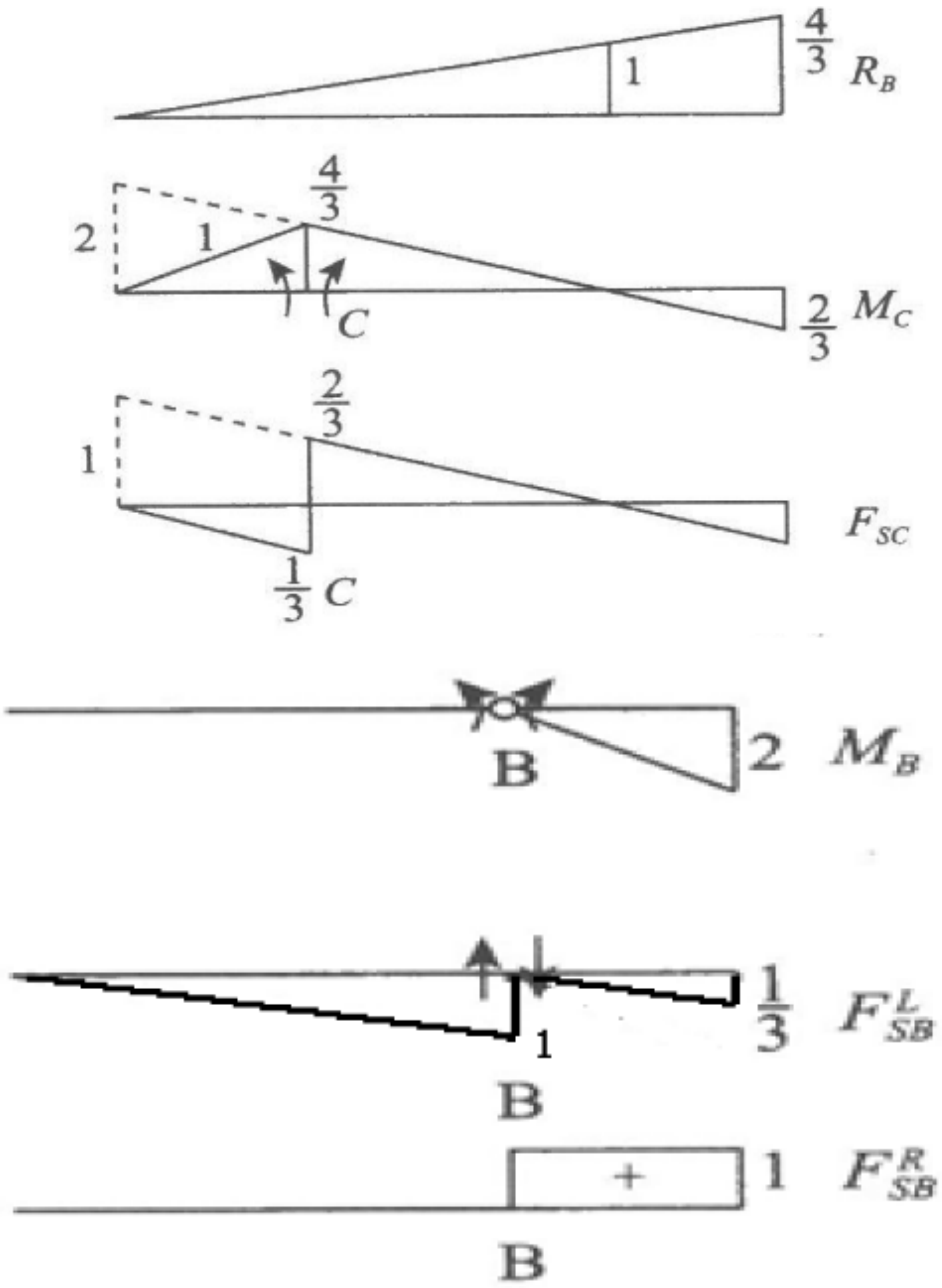


图 11-2-6

11-4　试作图示结构中下列量值影响线：F_{NBC}、M_D、F_{SD}、F_{ND}。$F=1$在 AE 部分移动。

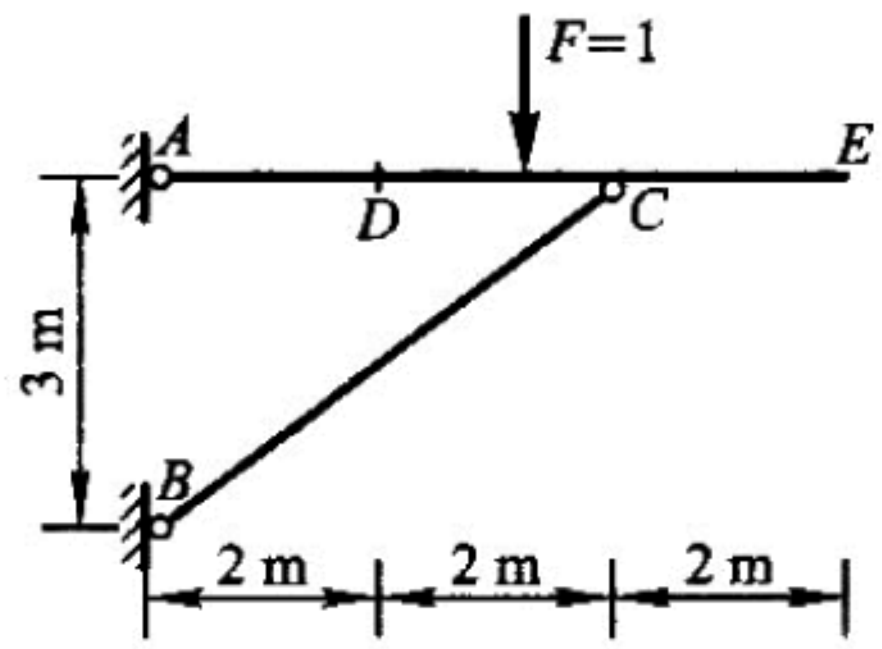


图 11-2-6（题 11-4）

解：用机动法求出所求各量的影响线。

去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使得体系沿 S 的正向发生单位位移，则由此得到的荷载作用点

的竖向位移即为 S 影响线。

由几何关系

$$F_{NBC}=\frac{5}{3}F_{NBCy},\quad F_{ND}=-F_{NBC}\cdot\frac{4}{5}\cdot$$

由此画出影响线图形，如图 11-2-7 所示。

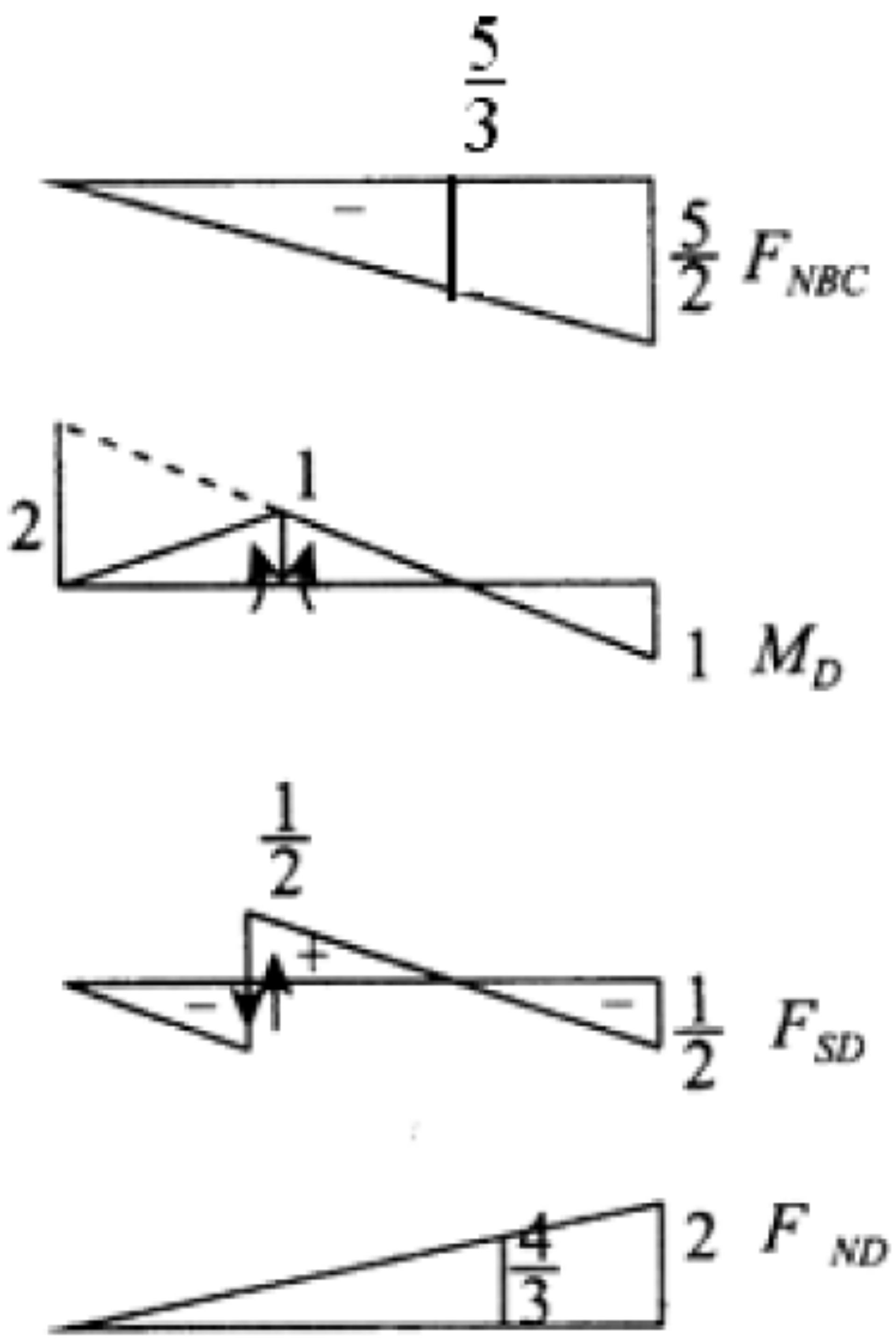


图 11-2-7

11-5 试作斜梁F_{AV}、F_B、M_C、F_{SC}、F_{NC}影响线。

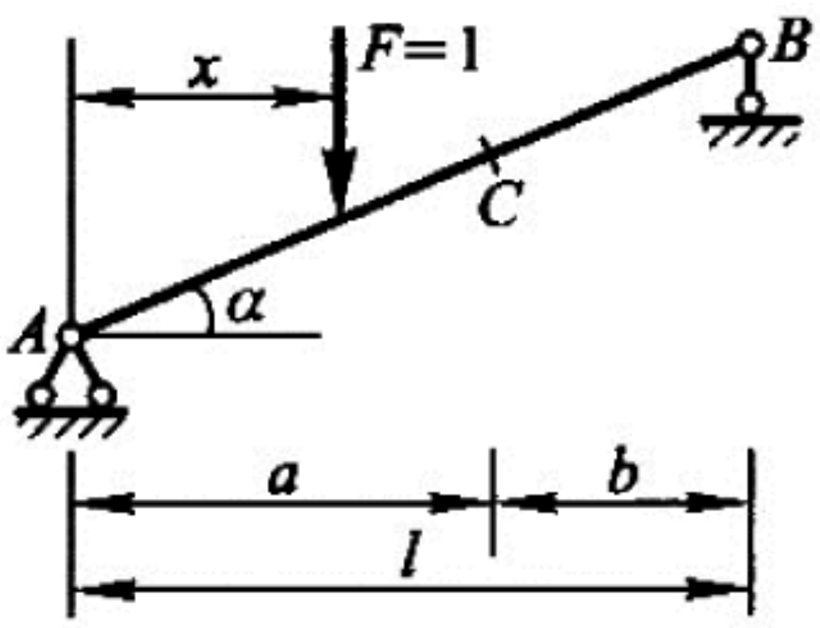


图 11-2-8（题 11-5）

解：用机动法求各量的影响线。

去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使得体系沿 S 的正向发生单位位移，则由此得到的荷载作用点的竖向位移即为 S 影响线。

由几何关系易知该斜梁的 V_A、V_B、M_C 与梁水平时相同，且有如下关系式

$$F_{SC}=Q_C\cos\alpha$$

$$F_{NC}=Q_C\ \sin\alpha$$

由此画出影响线图形，如图 11-2-9 所示。

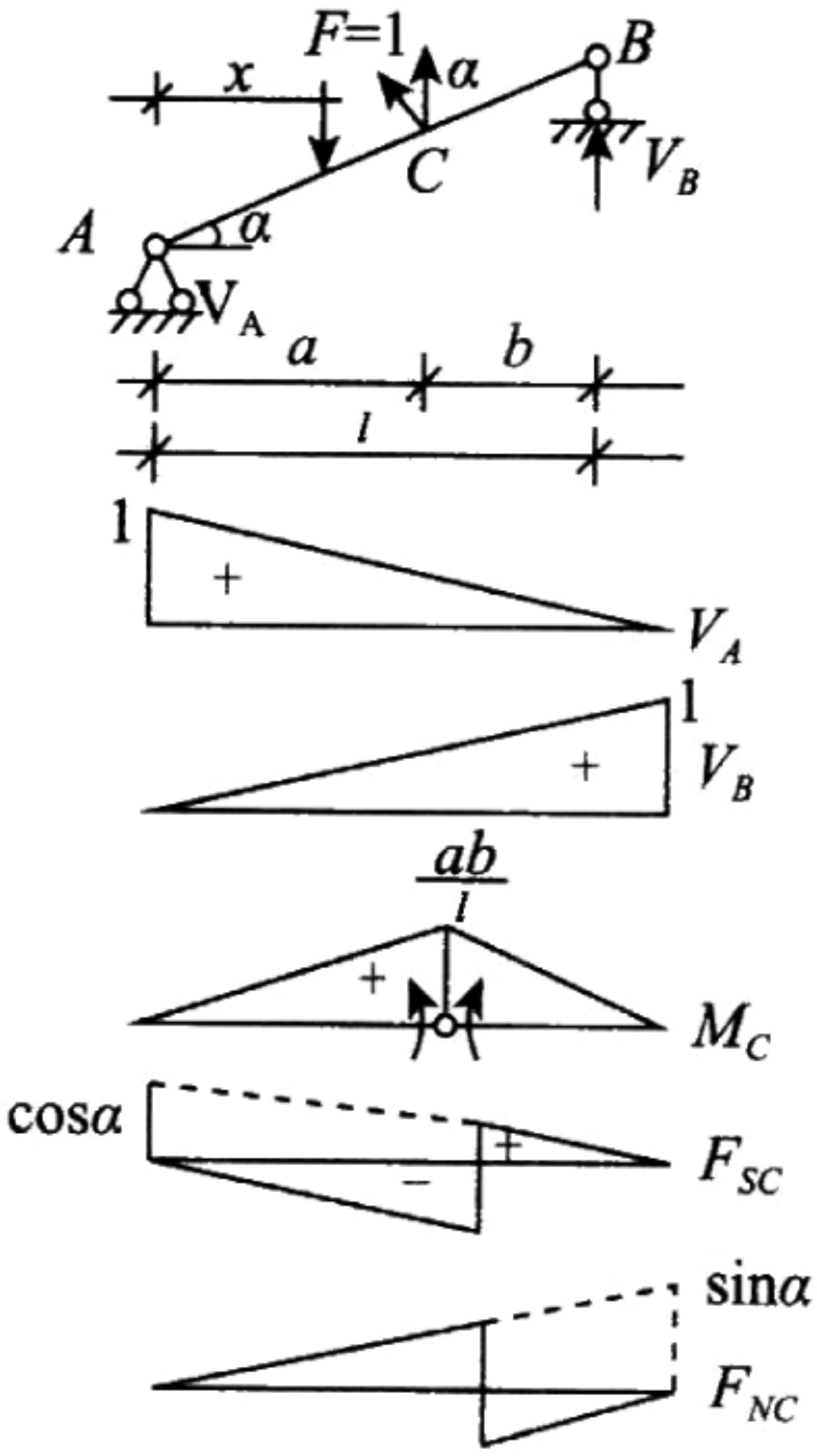


图 11-2-9

11-6　试作图示梁 F_{SC}、M_C 影响线。

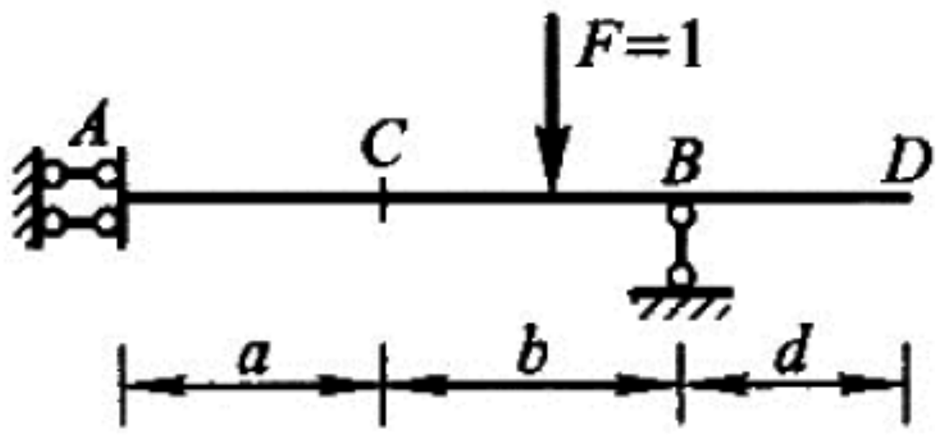


图 11-2-10（题 11-6）

解：用机动法求各量影响线。

去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使得体系沿 S 的正向发生单位位移，则由此得到的荷载作用点的竖向位移即为 S 影响线。

由于 A 支座是滑动支座，故不能提供剪力，因此有 $F_{AV}=0$，故 $F_B=1$。

当 F=1 作用在 C 左侧时，$M_C=F_B\cdot b=b$，故可绘出影响线图形，如图 11-2-11 所示。

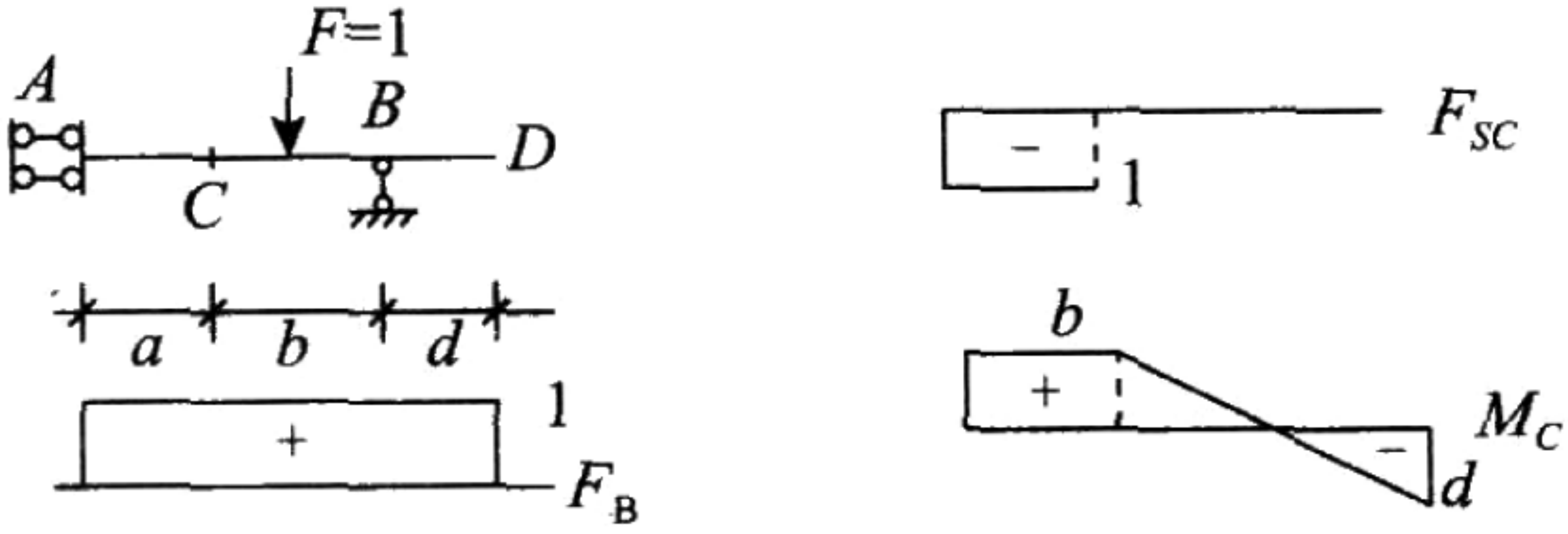


图 11-2-11

11-7　试作M_C、F_{SC}影响线，F=1 在 DE 部分移动。

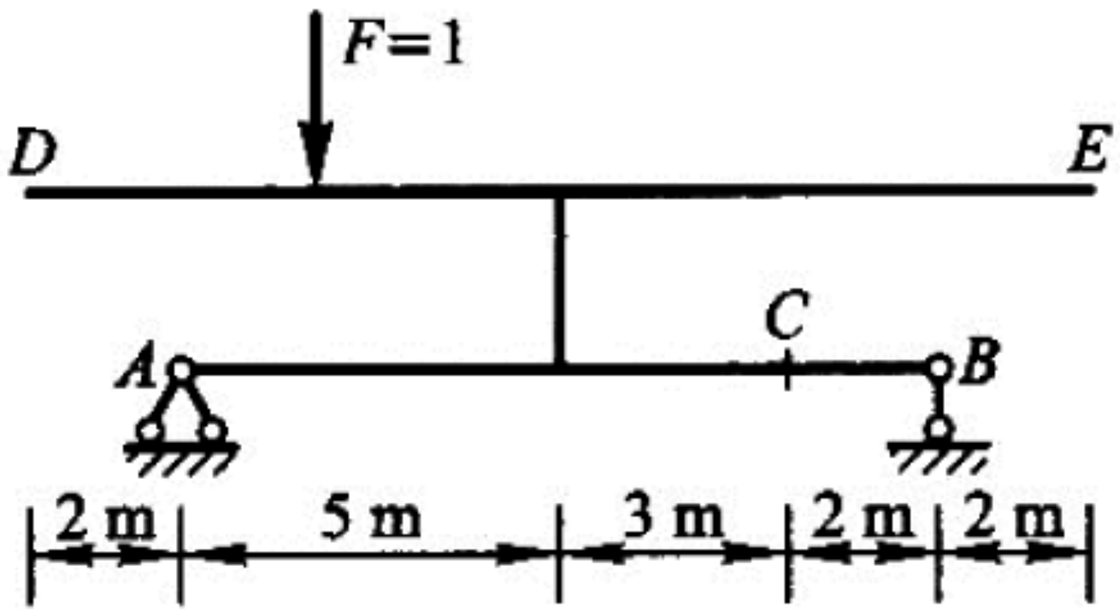


图 11-2-12（题 11-7）

解：此题欲求 M_C、F_{SC}的影响线，可转化为求 F_B的影响线，利用 $M_C=F_B\cdot 2$，$F_{SC}=-F_B$，绘制最后的影响线图形。

用机动法求 F_B的影响线，将支座去掉，代替反力并使内力 F_B正方向发生单位位移。由此可得到荷载作用点的竖向位移图，即 F_B影响线图形，根据 M_C、F_{SC}与 F_B的关系式进一步绘制出 M_C、F_{SC}的影响线，如图 11-2-13 所示。

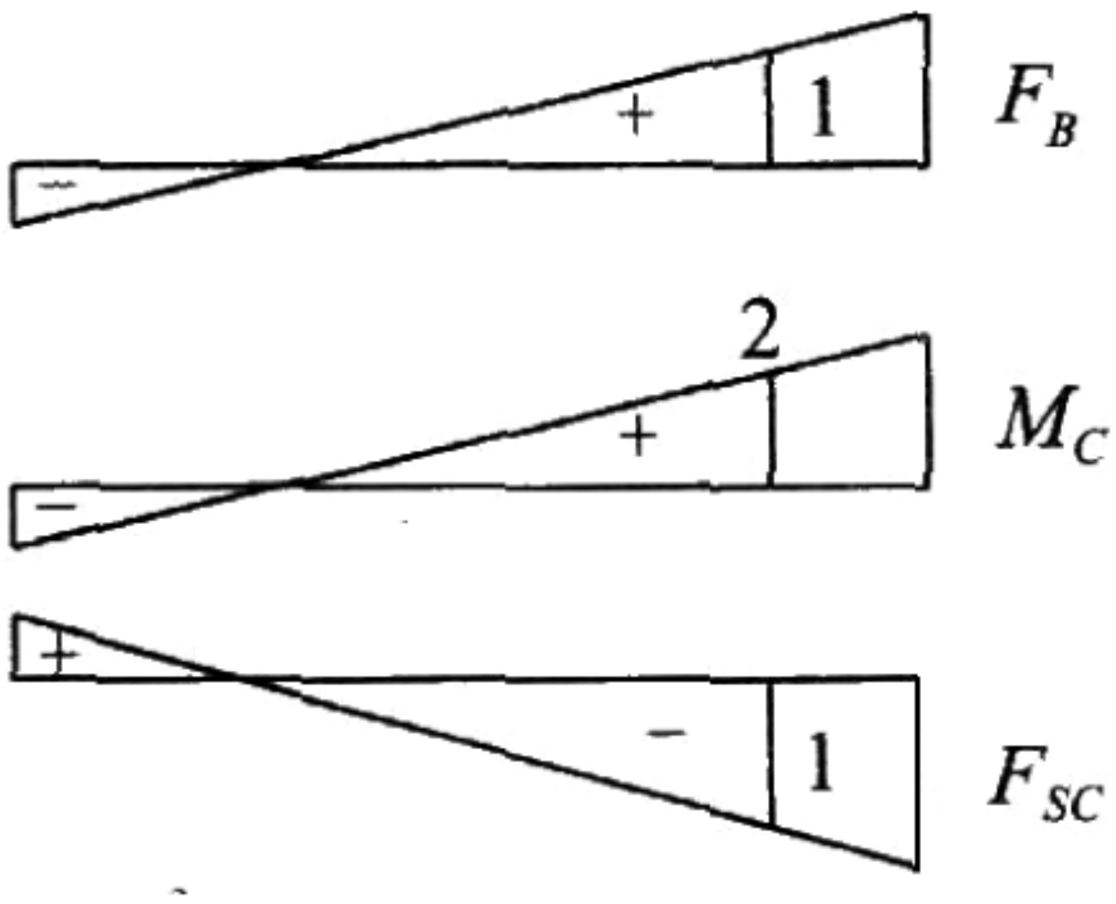


图 11-2-13

11-8　试作M_K、F_{SK}、F_{NK}影响线。F=1 在 AB 部分移动。

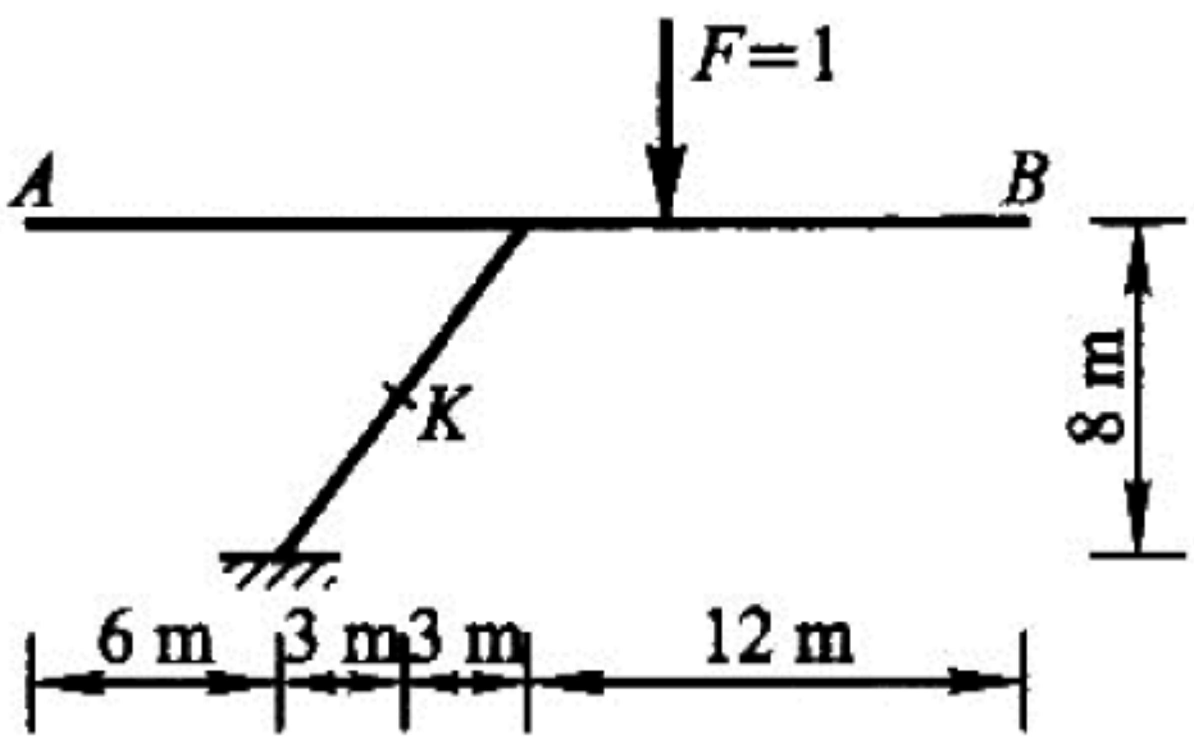


图 11-2-14（题 11-8）

解：当 F=1 在 K 点正上方时，$M_K=0$。

当 F=1 在水平杆 B 端时，$M_K=-1\times15=-15$（以 K 截面左侧受拉为正）；在 A 端时，$M_K=1\times9=9$。

当 F=1 作用在 AB 杆上时，$F_{yk}=1$，$F_{Sk}=F_{yk}\cdot\frac{3}{5},F_{Nk}=-\frac{4}{5}F_{yk}$。

可绘出影响线图形如图 11-2-15 所示。

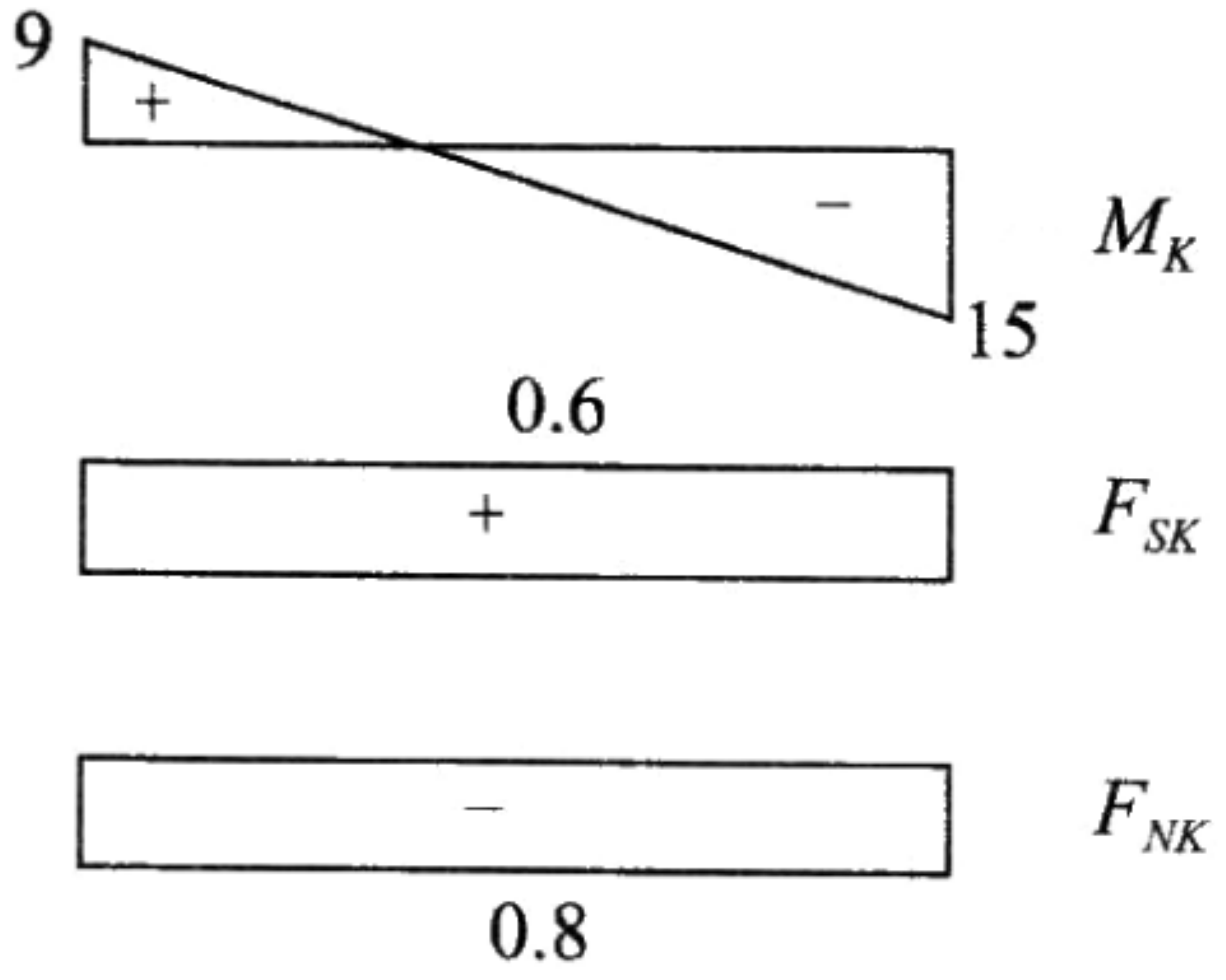


图 11-2-15

11-9 试作主梁 F_B、M_D、F_{SD}、F_{SC}^L、F_{SC}^R 影响线。

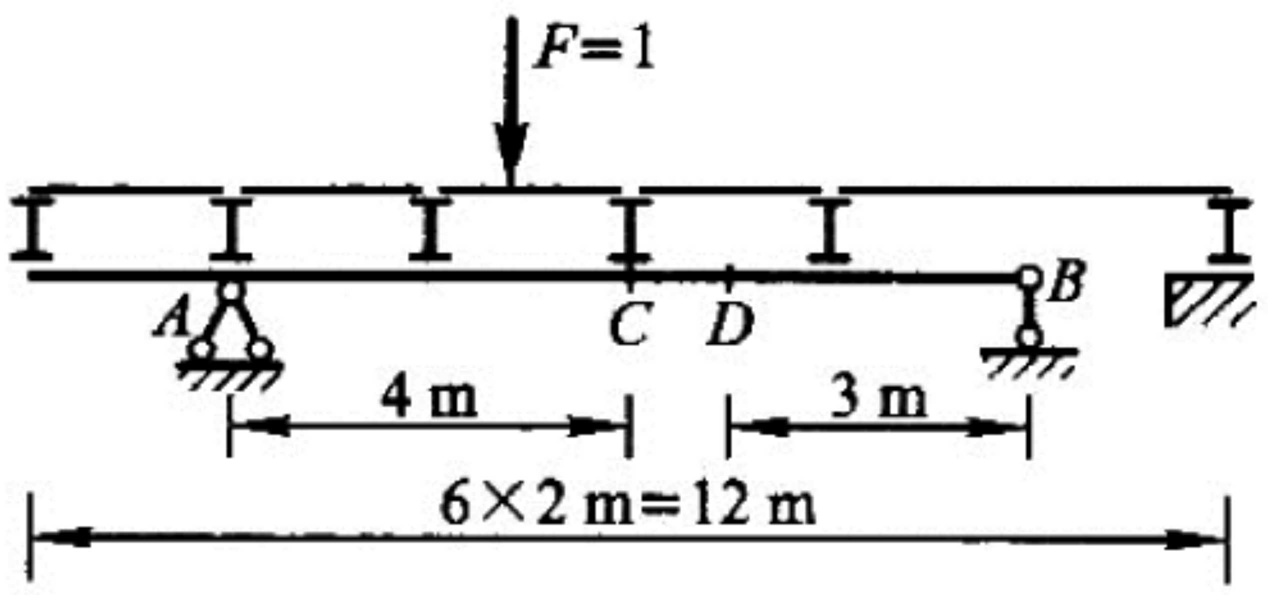


图 11-2-16（题 11-9）

解：本题为求间接荷载作用下的影响线。

先作出直接荷载作用下所求量值的影响线，取各点处的竖标，再将其顶点在每一纵梁范围内连以直线，即得到间接荷载作用下的影响线，如图 11-2-17 所示。

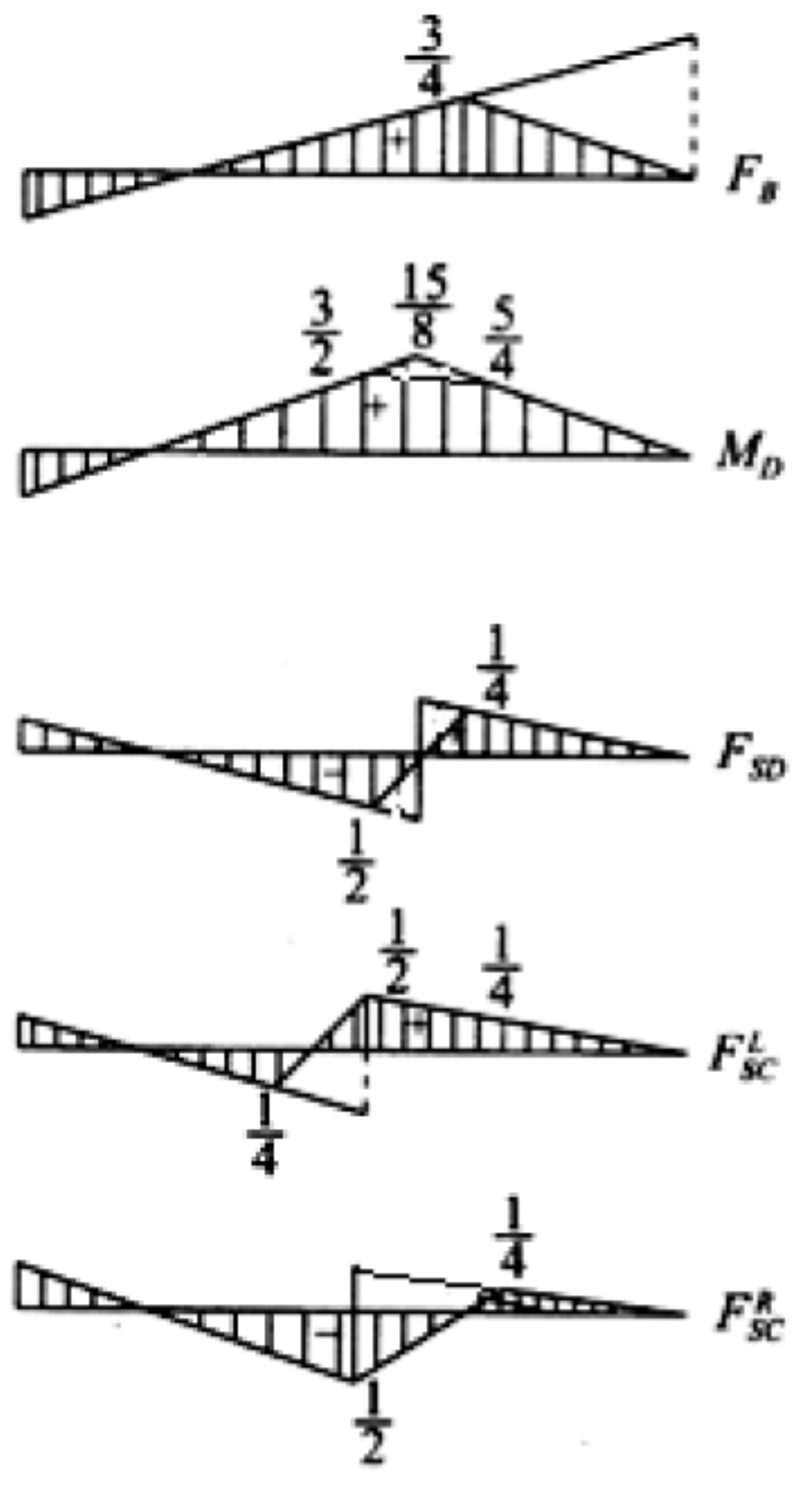


图 11-2-17

11-10　试作图示结构中指定量值影响线。

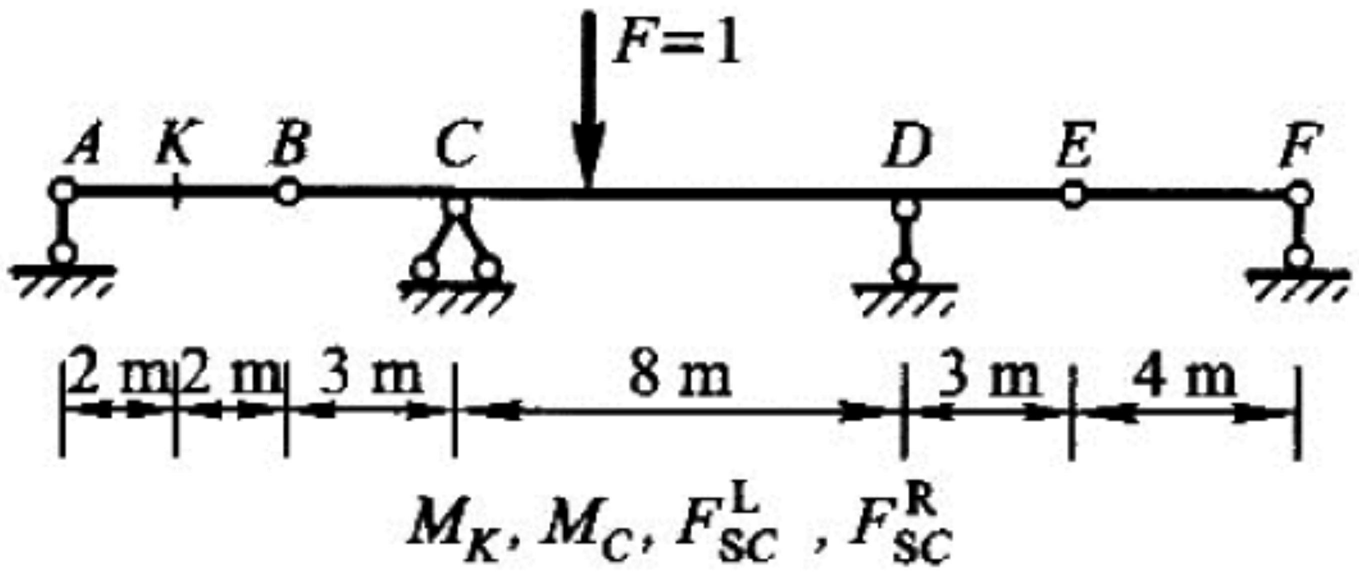


图 11-2-18（题 11-10）

解：用机动法求此梁影响线。

首先去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使所得体系沿 S 的正向发生单位位移，此时根据每一刚片的位移为一直线，以及在每一个支座处竖向位移为零，便可绘出各部分位移图，即影响线图形，如图 11-2-19 所示。

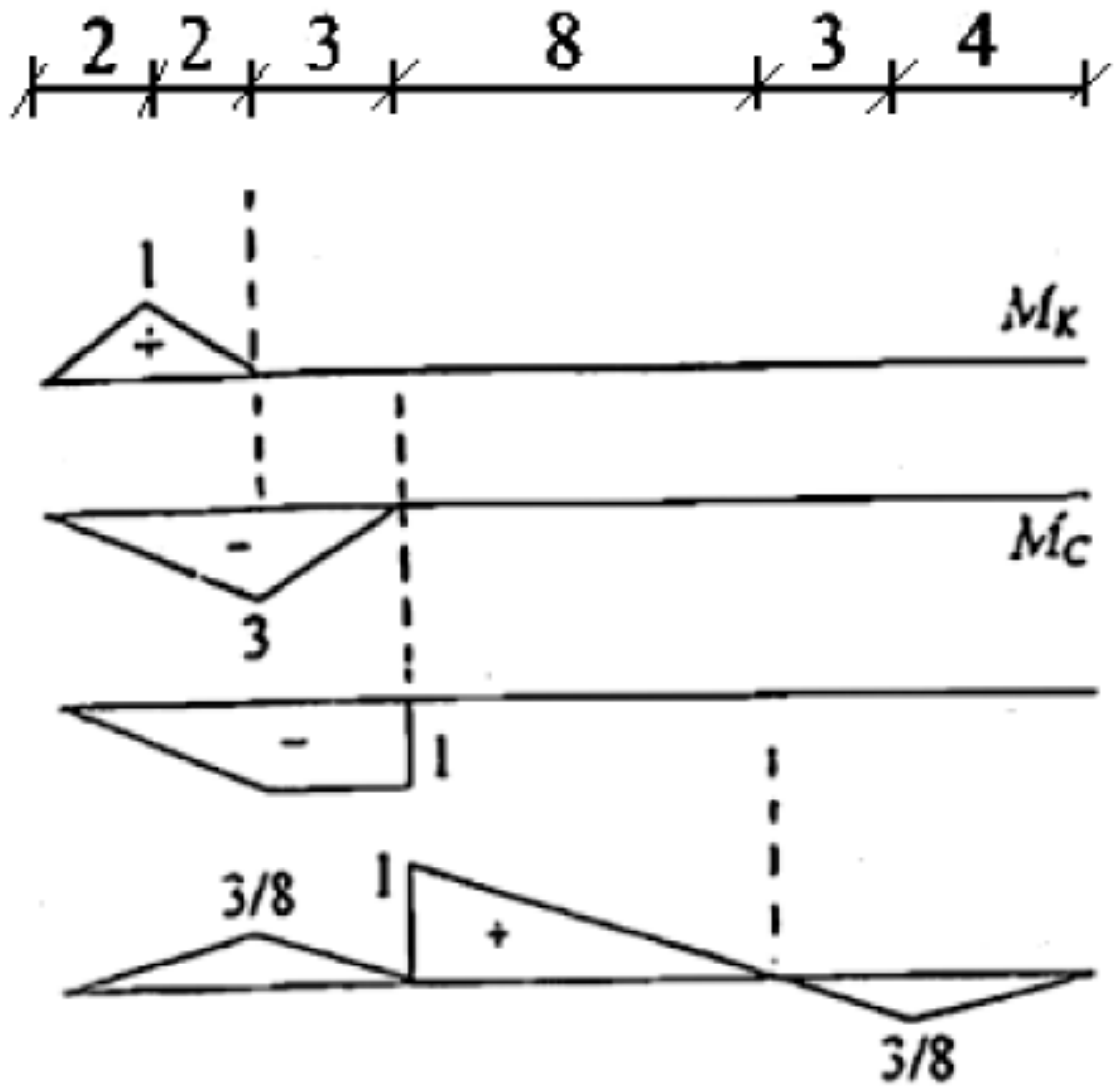


图 11-2-19

11-11　试作图示结构中指定量值影响线。

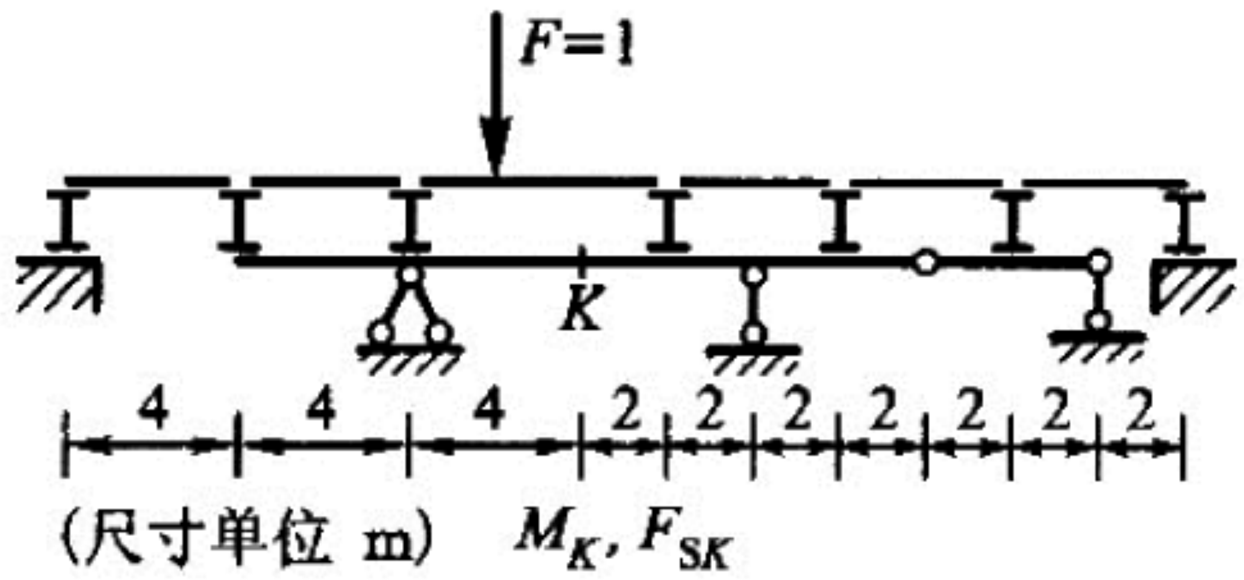


图 11-2-20（题 11-11）

解：本题要求绘制间接荷载作用下的影响线。

先作出直线荷载作用下所求量值的影响线，取各点处竖标，将其顶点在一纵梁范围内连以直线即得间接荷载作用下的影响线，如图 11-2-21 所示。

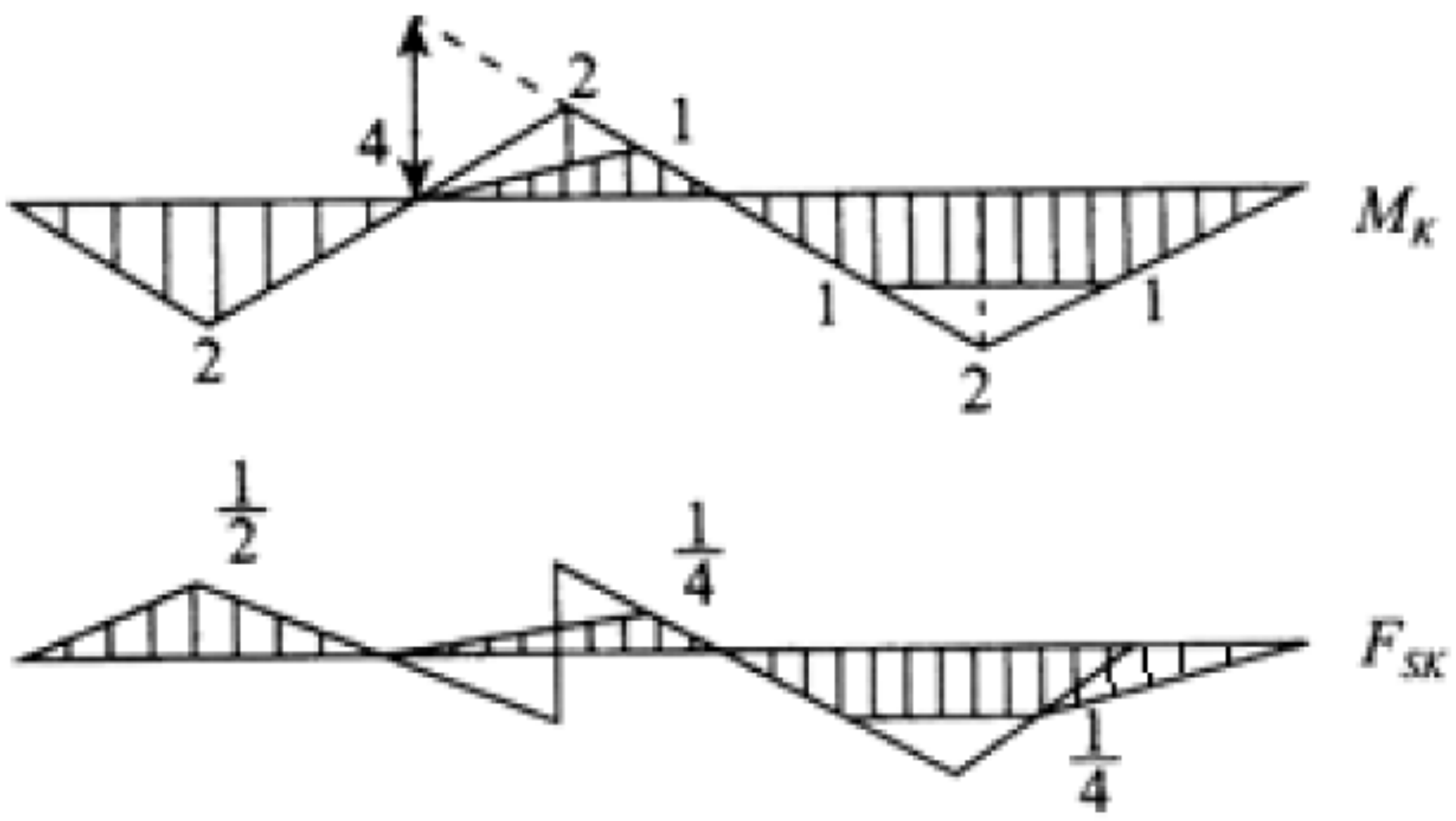


图 11-2-21

11-12　试作图示结构中指定量值影响线。

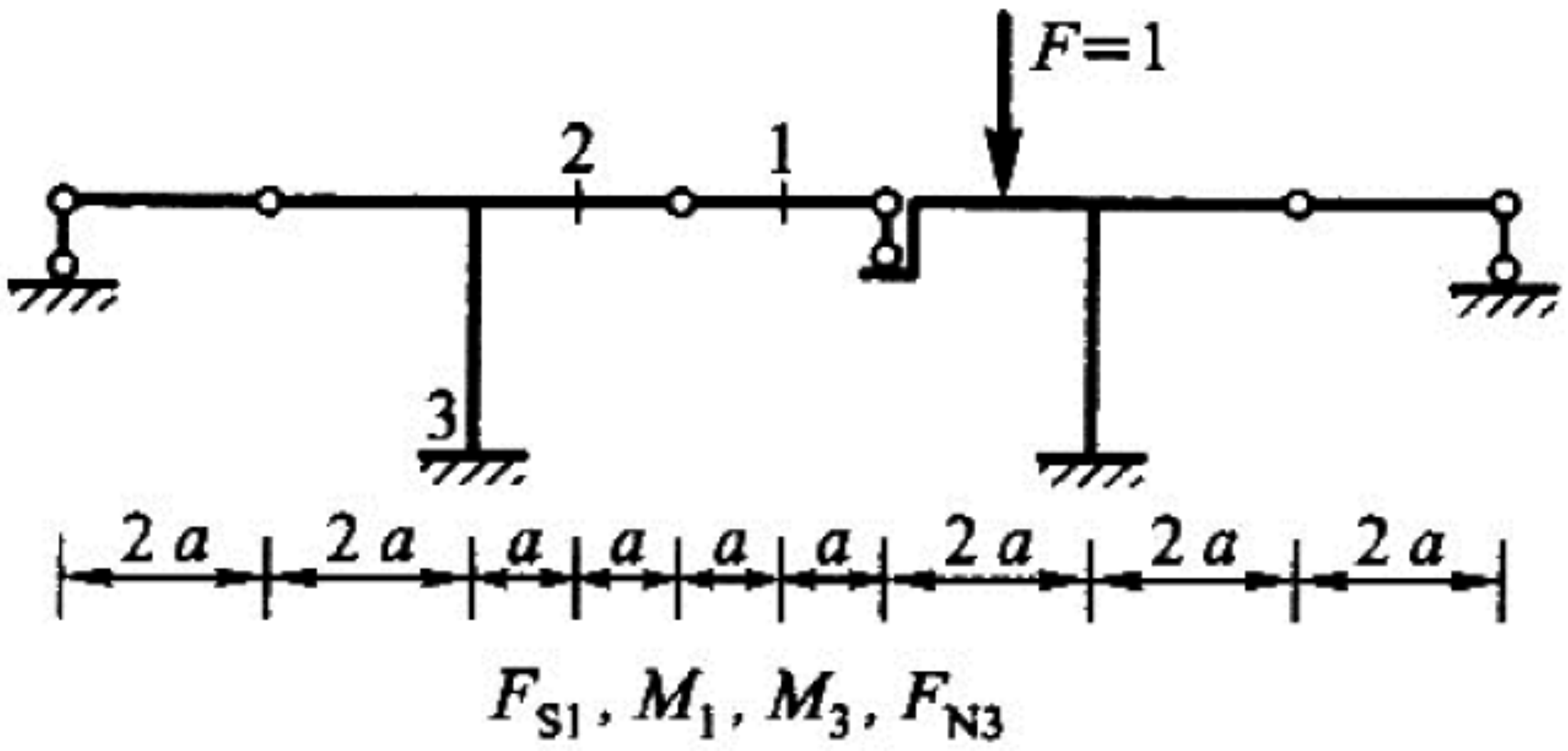


图 11-2-22（题 11-12）

解：用机动法求此梁影响线。

首先去掉与所求反力或内力 S 相应的联系，然后使所得体系沿 S 的正向发生单位位移，此时根据每一刚片的位移为一直线，以及在每个支座处竖向位移为零，便可绘出各部分位移图，即影响线图形，如图 11-2-23 所示。

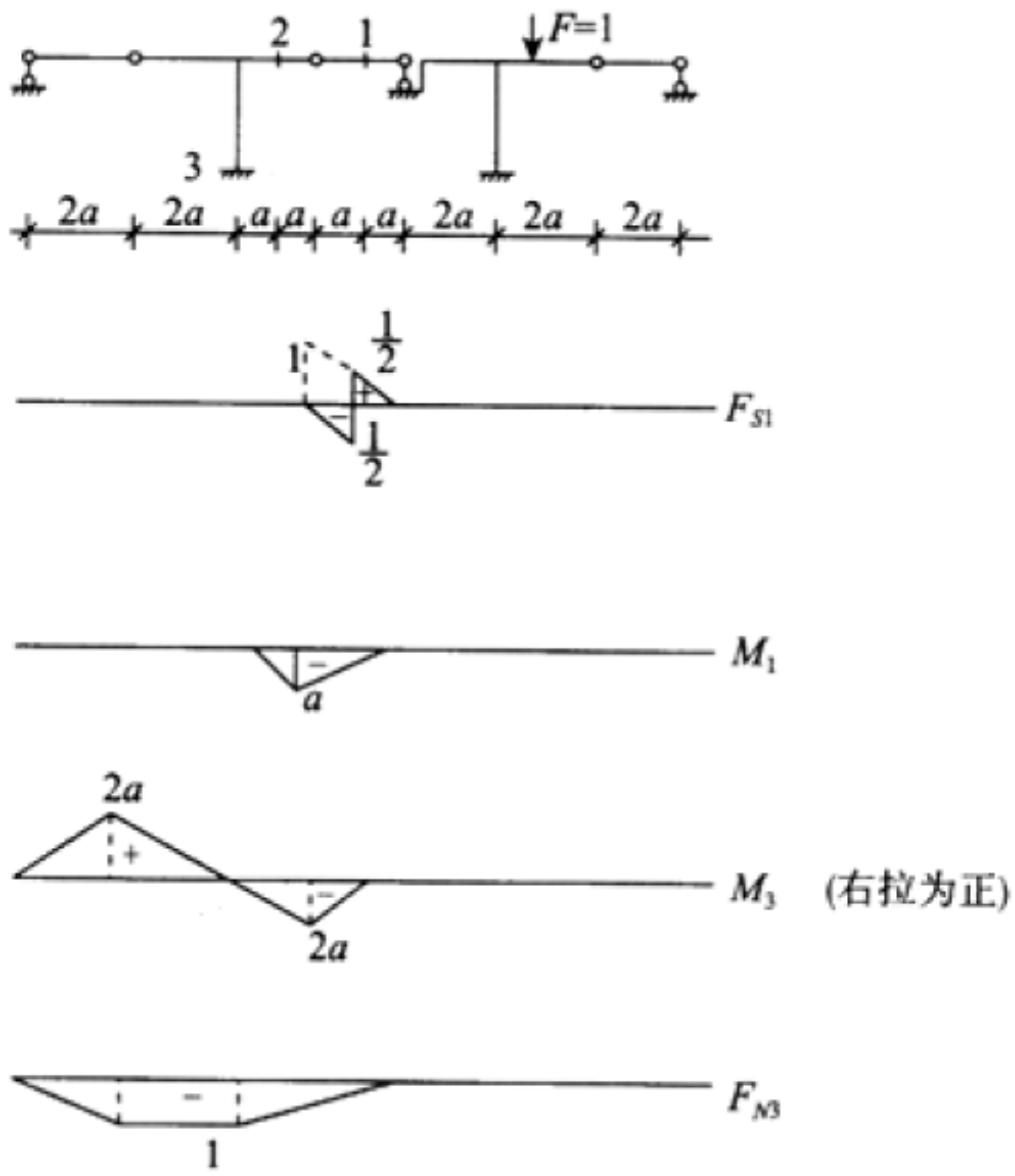


图 11-2-23

11-13　选择题图中绘出的两量值影响线的形状是：（1）图 b 对，图 c 错；（2）图 b 错，图 c 对；（3）二者皆对；（4）二者皆错。

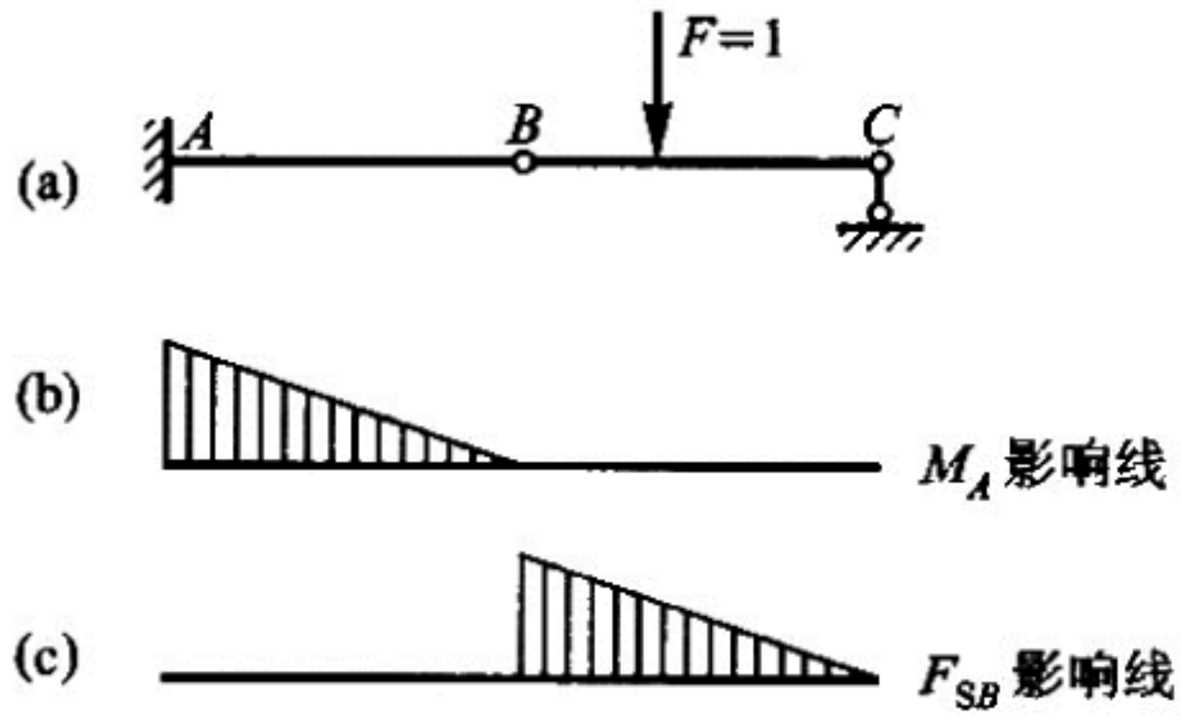


图 11-2-24（题 11-13）

答：选（2）。BC 段为附属结构，当 F＝1 作用在 AB 段时，铰 B 处剪力为零，故图（c）正确；当 F＝1 作用在 BC 段时，力会通过铰 B 传递到 AB 段，因此 M_A 不为零，故图（b）错误。

11-14　选择题图中绘出的两量值影响线的形状是：（1）图 b 对，图 c 错；（2）图 b 错，图 c 对；（3）二者皆对；（4）二者皆错。

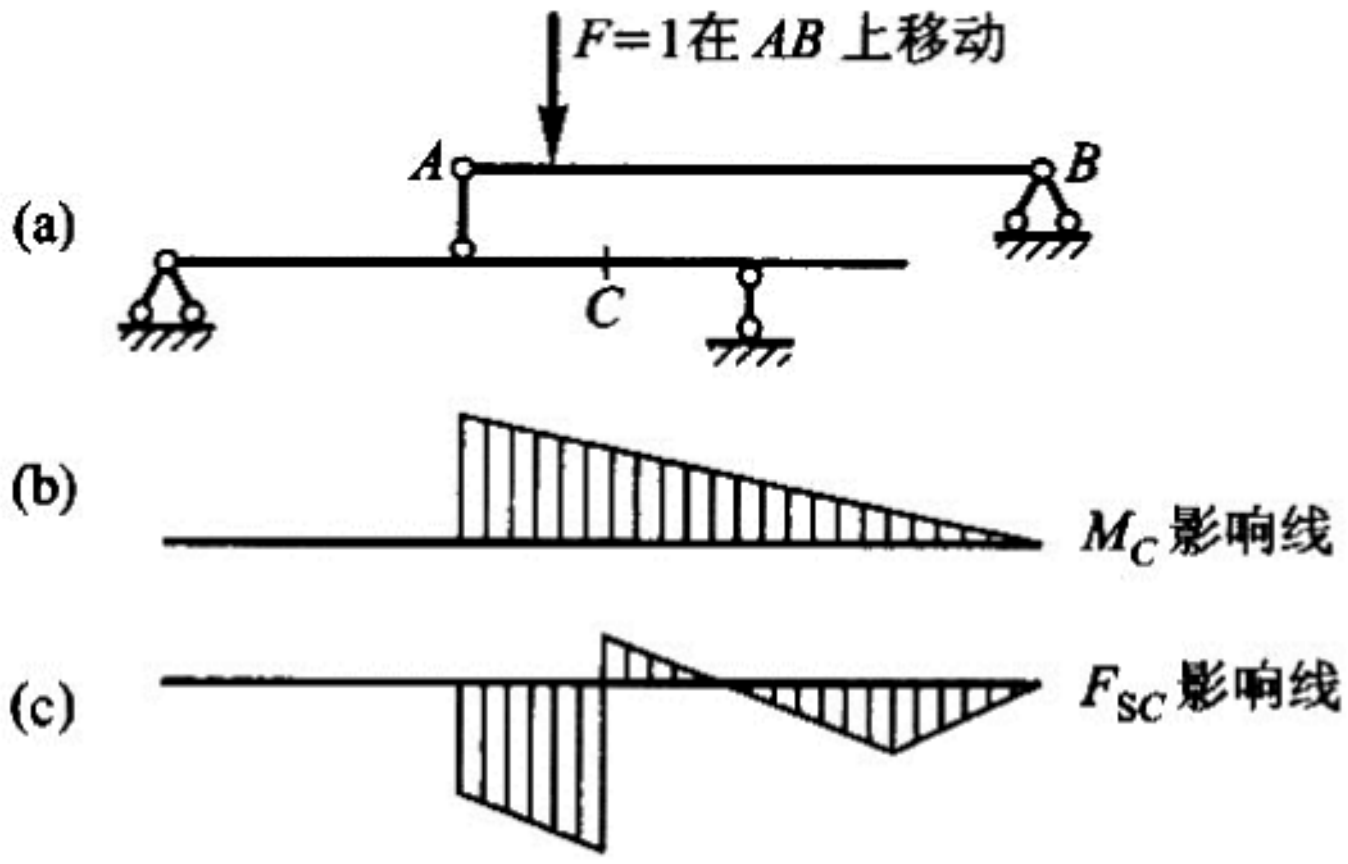


图 11-2-25（题 11-14）

答：选（1）。AB 段为附属结构，当 F＝1 在 AB 上移动时，算出 M_C 与 F_A 的函数关系，故图（b）正确，此时 F_{SC} 影响线应该为一直线，故图（c）错误。

11-15　试作图示桁架中指定各杆的内力（或其分力）影响线。

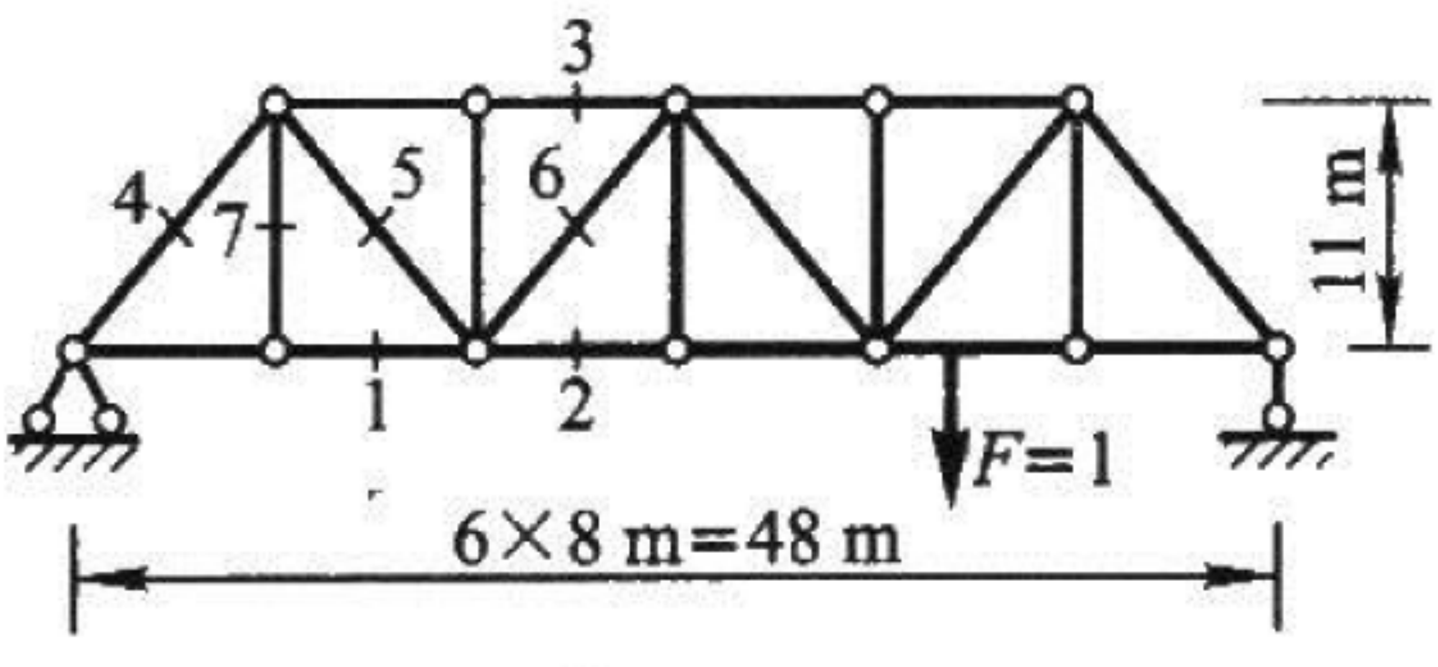


图 11-2-26（题 11-15）

解：本题为简支桁架。在桁架中，荷载一般通过纵梁和横梁作用在桁架结点上。如题图，已知 F＝1 在下弦移动。

分别利用 F＝1 在截断节间以左、右移动，用桁架基本解法计算出桁架力与已知影响线关系，则影响线如图 11-2-27 所示。

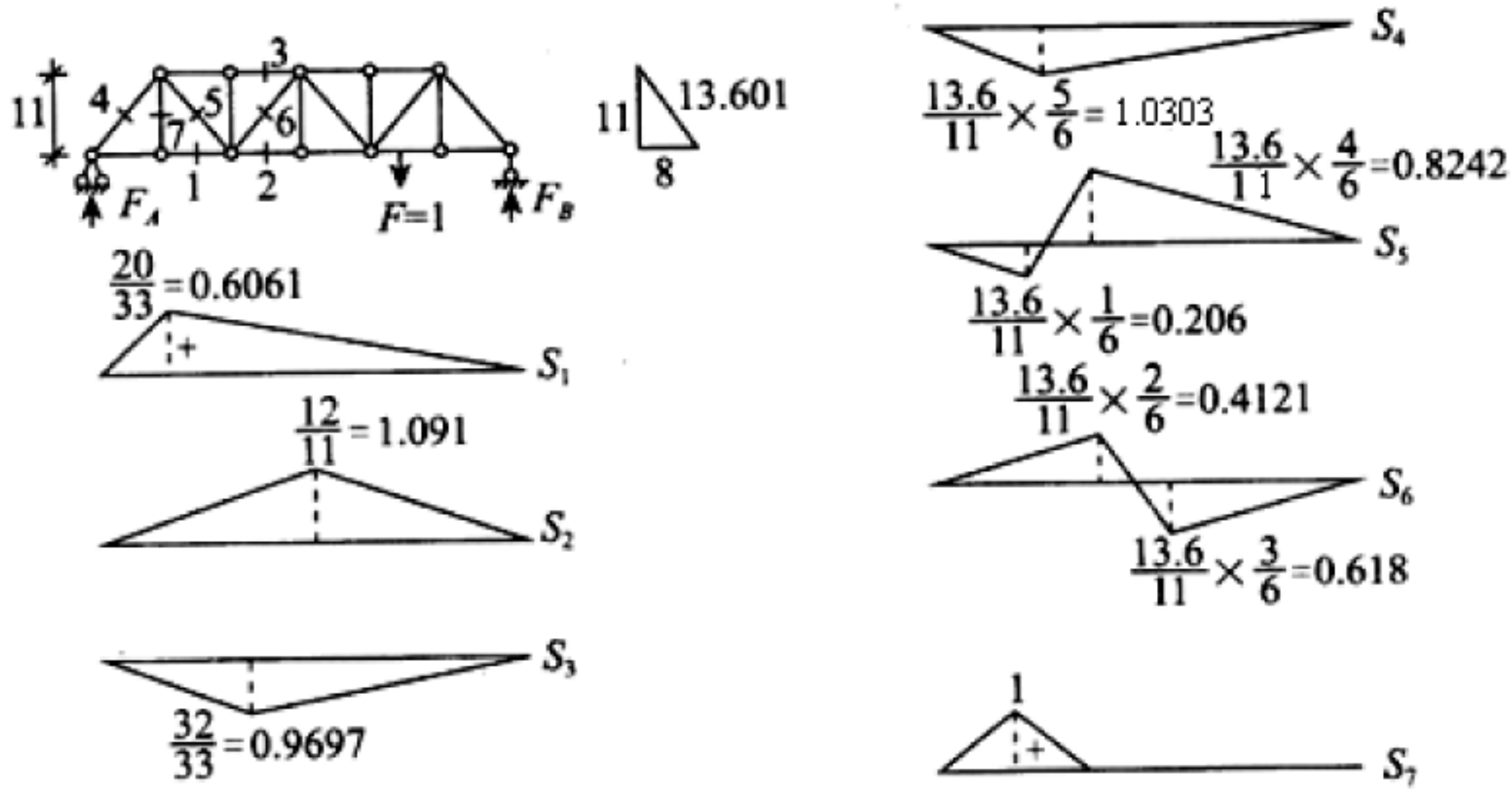


图 11-2-27

11-16 试作指定杆件内力（或其分力）影响线，分别考虑荷载 F＝1 在上弦和在下弦移动。

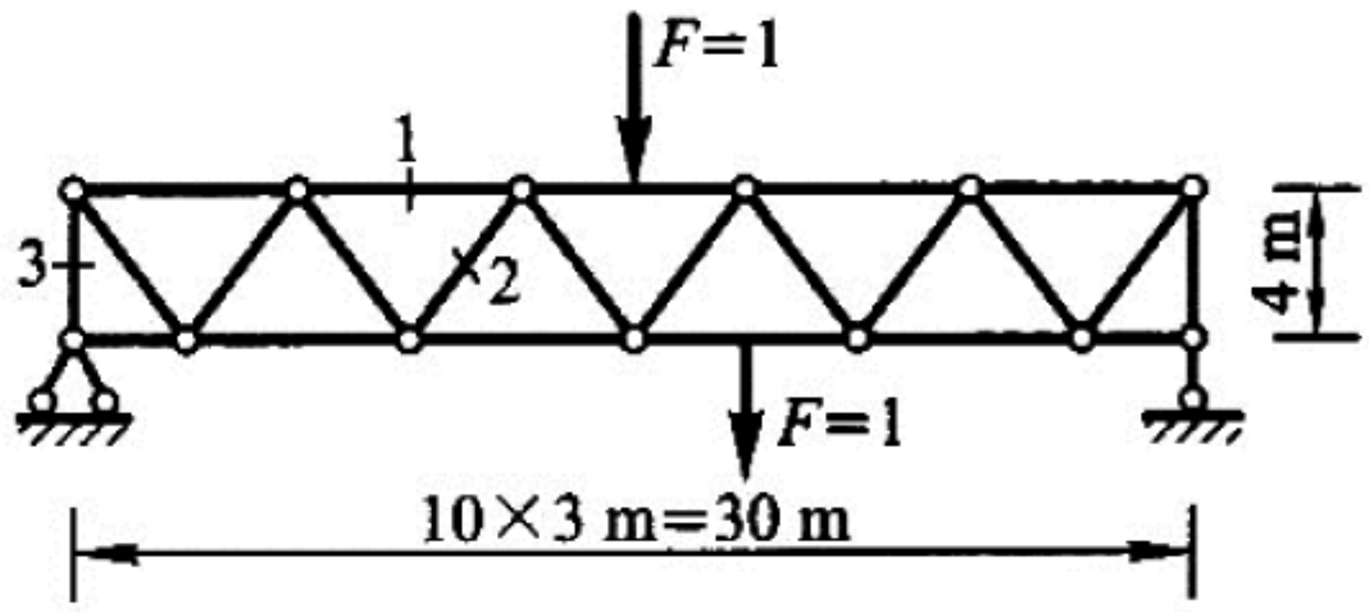


图 11-2-28（题 11-16）

解：本题为简支桁架。当 F＝1 在上弦、下弦之间移动时，纵梁和横梁所处位置不同，故顶点在每一纵梁桁架范围内所连直线不同。

分别用 F＝1 在上弦和下弦移动，在截断节间以左、右移动，用桁架基本知识解出与已知影响线关系，则影响线如图 11-2-29 所示。

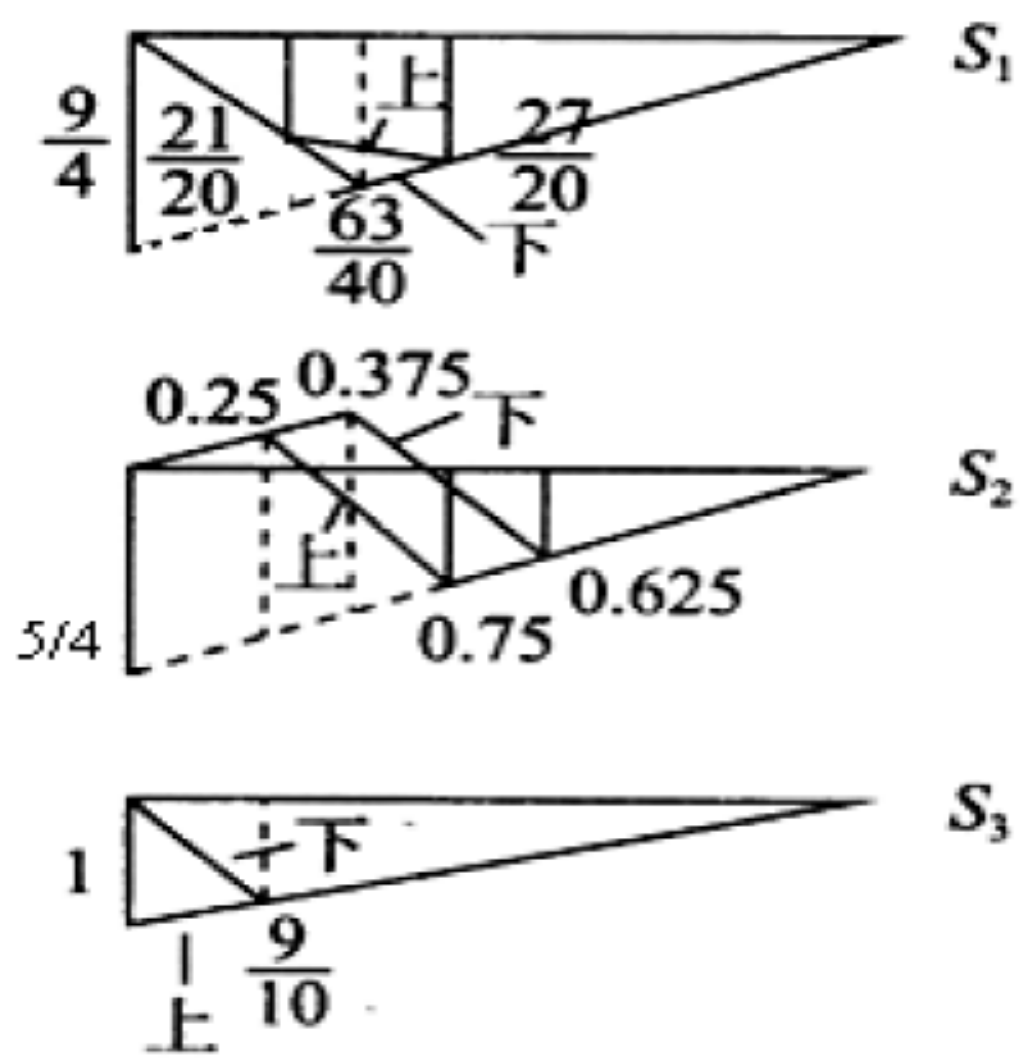


图 11-2-29

11-17 试作桁架指定杆件内力（或其分力）影响线。

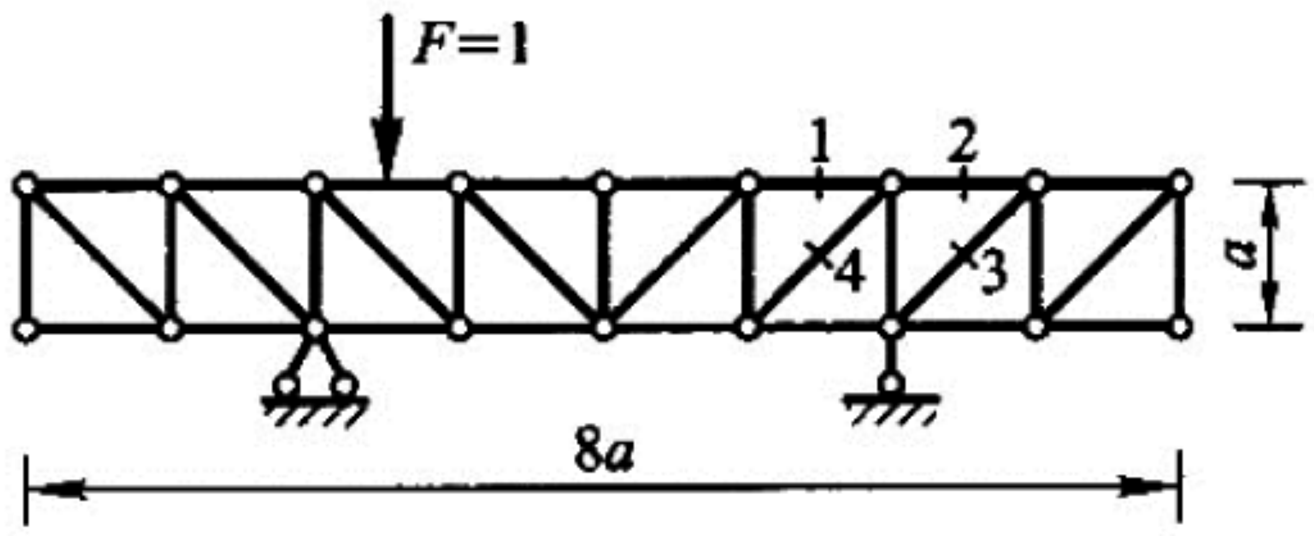


图 11-2-30（题 11-17）

解：利用结点法分别取隔离体，易解出 S_1、S_2、S_3、S_4 与已知影响线关系。

按影响线在各节间内应为直线的性质，即可绘出影响线图形，如图 11-2-31 所示。

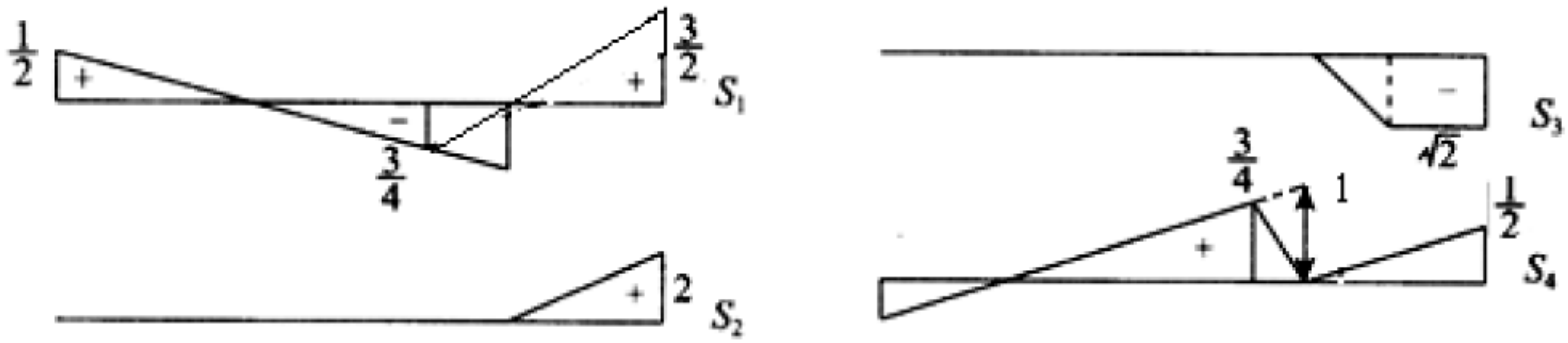


图 11-2-31

11-18　试作桁架指定杆件内力（或其分力）影响线。

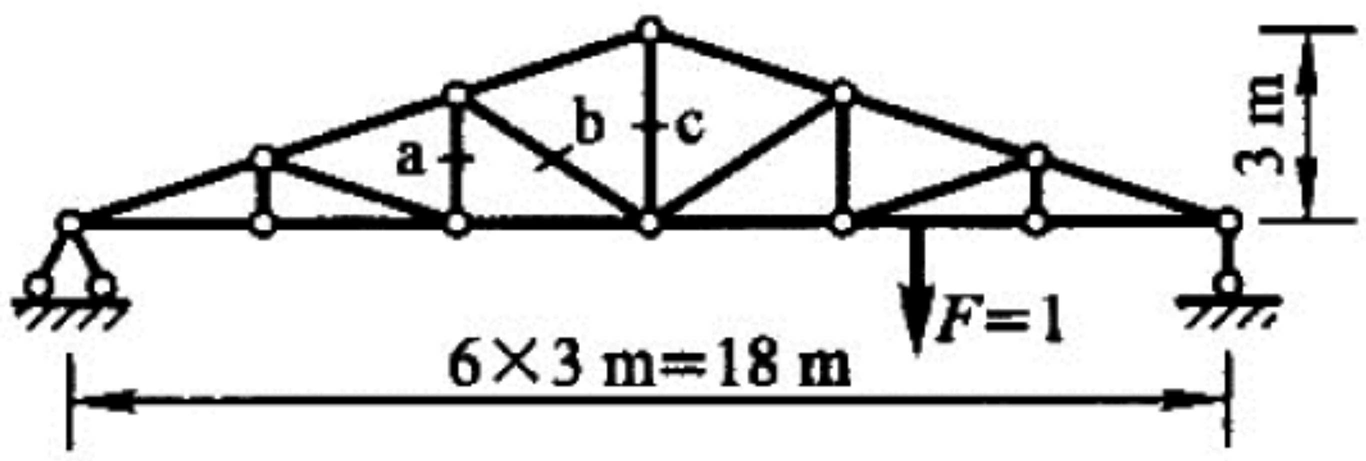


图 11-2-32（题 11-18）

解：用截面法易求出 S_a 与 Y_b。

下面简介 S_c 求法：用结点法，取结点 3。当 F＝1 不在铰结点 3 时，有 S_c＝-（Y_b＋Y_d）；当 F＝1 在铰结点 3 时，有 S_c＝-（Y_b＋Y_d）＋1＝-（0＋0）＋1＝1。

截面法求解示意图及最终得到的影响线图形如图 11-2-33 所示。

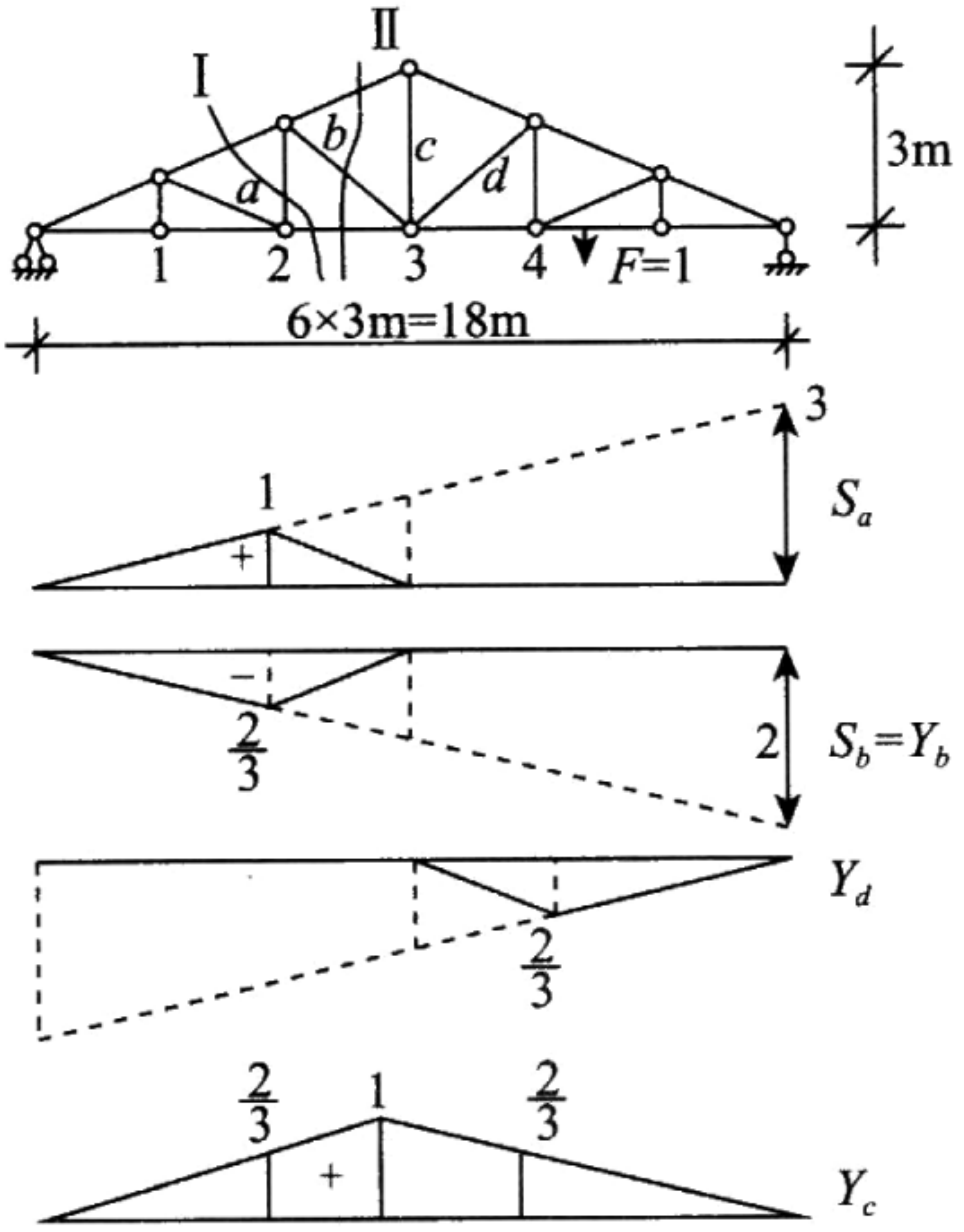


图 11-2-33

11-19　试作桁架指定杆件内力（或其分力）影响线。

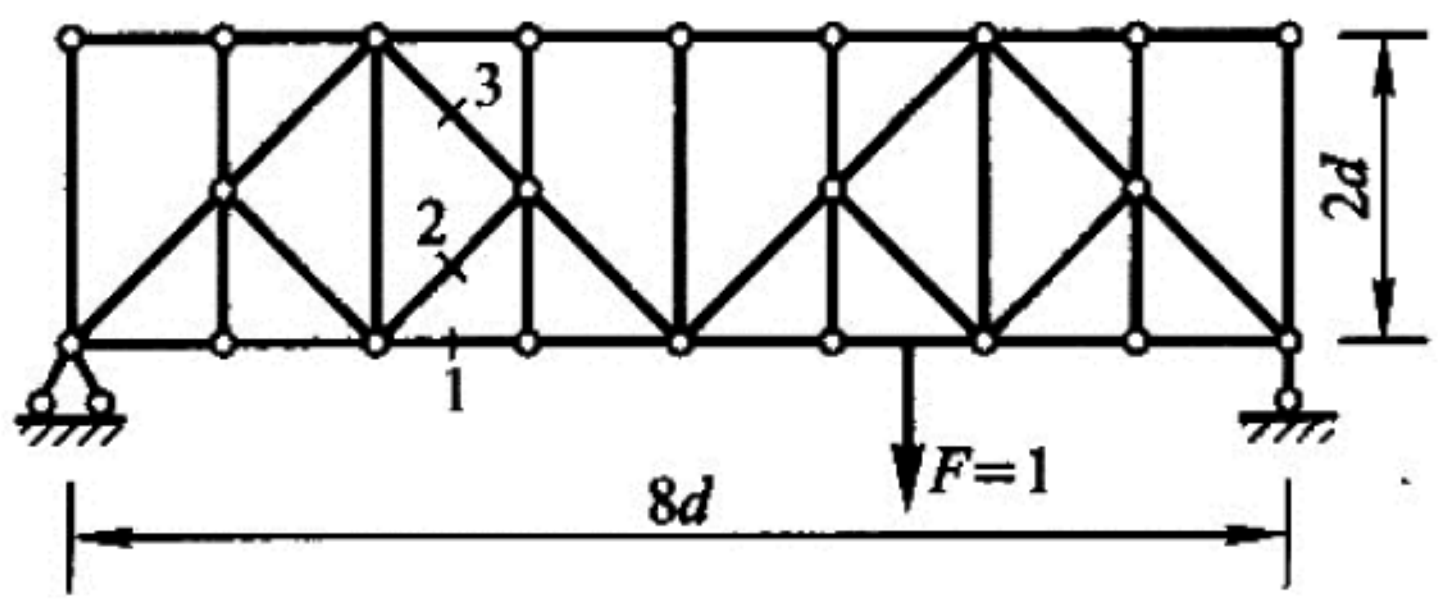


图 11-2-34（题 11-19）

解：将 F＝1 分别作用在截断节间以左、右移动时，用截面法易求出 S_1、S_2、S_3。利用已知影响线关系以及结点间为直线的性质，即可作出 S_1、S_2、S_3 影响线，如图 11-2-35 所示。

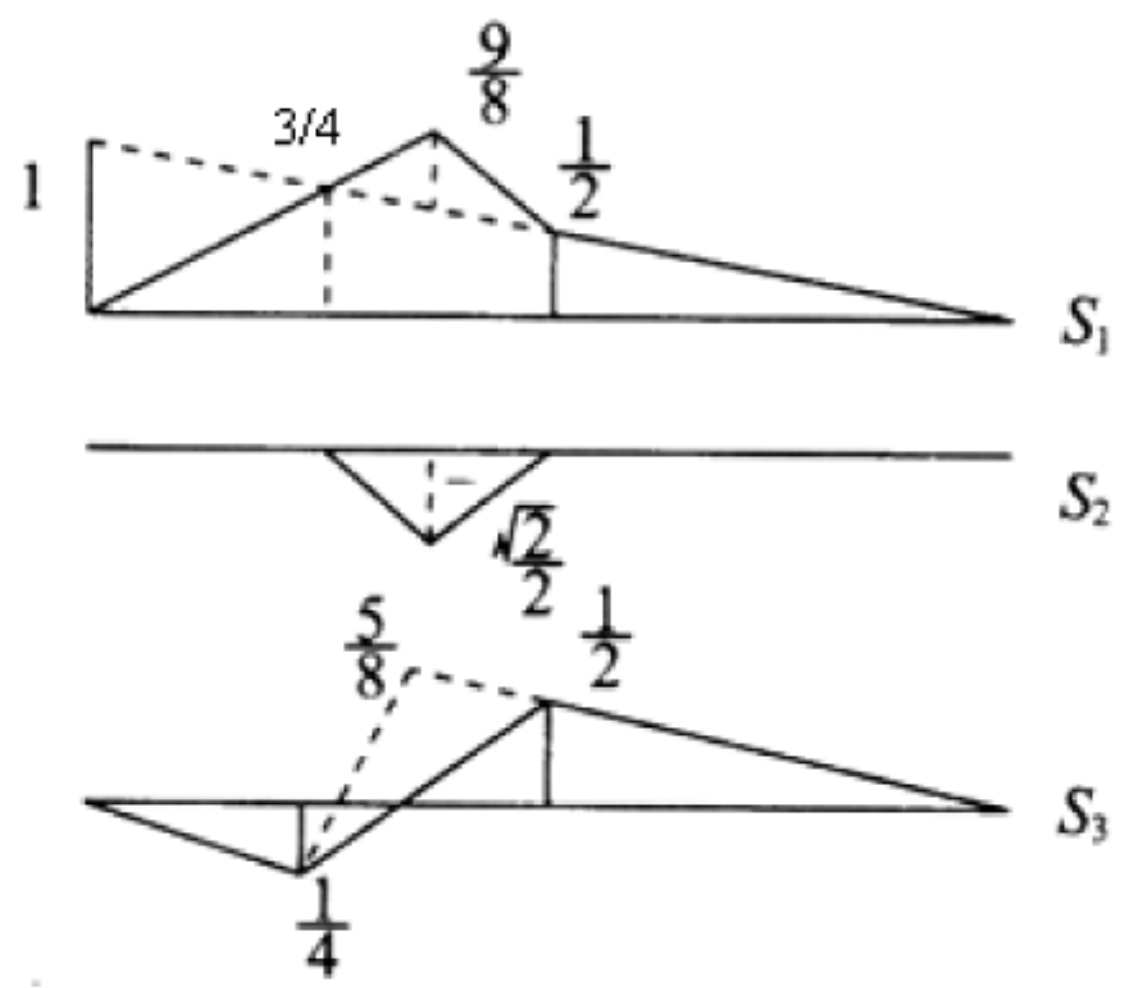


图 11-2-35

11-20　试作桁架指定杆件内力（或其分力）影响线。

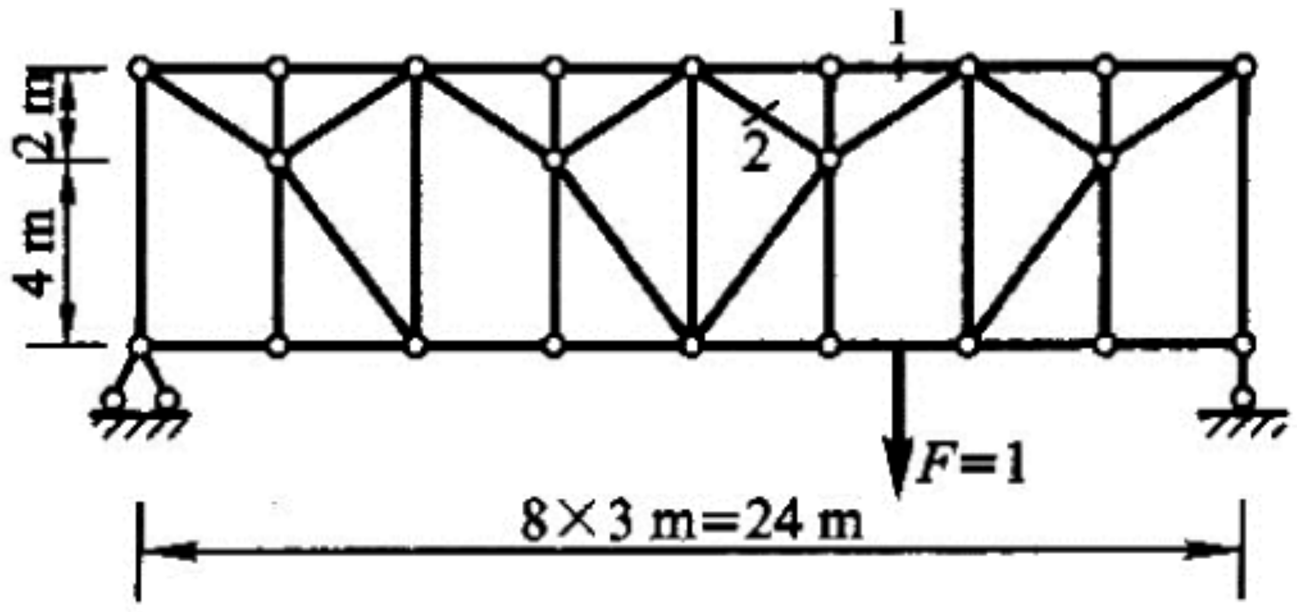


图 11-2-36（题 11-20）

解：如图 11-2-37（a）所示，作截面 II 对 C 点取矩，则求出 S_3 影响线；对节点受力分析，易知 $S_1=S_3$，则画出 S_1 和 S_3 的影响线如图 11-2-37（b）所示。

S_2 作法：当 F＝1 在 AD 段时取截面 II 右侧，由 $\sum M_D=0$，算得 $X_2=-2R_B-S_3$；取截面 II 左侧，$\sum M_D=0$，算得 $X_2=-2R_A-S_3$。由此可计算出各控制点竖标，即可得到 S_2 的影响线，如图 11-2-37（c）所示。

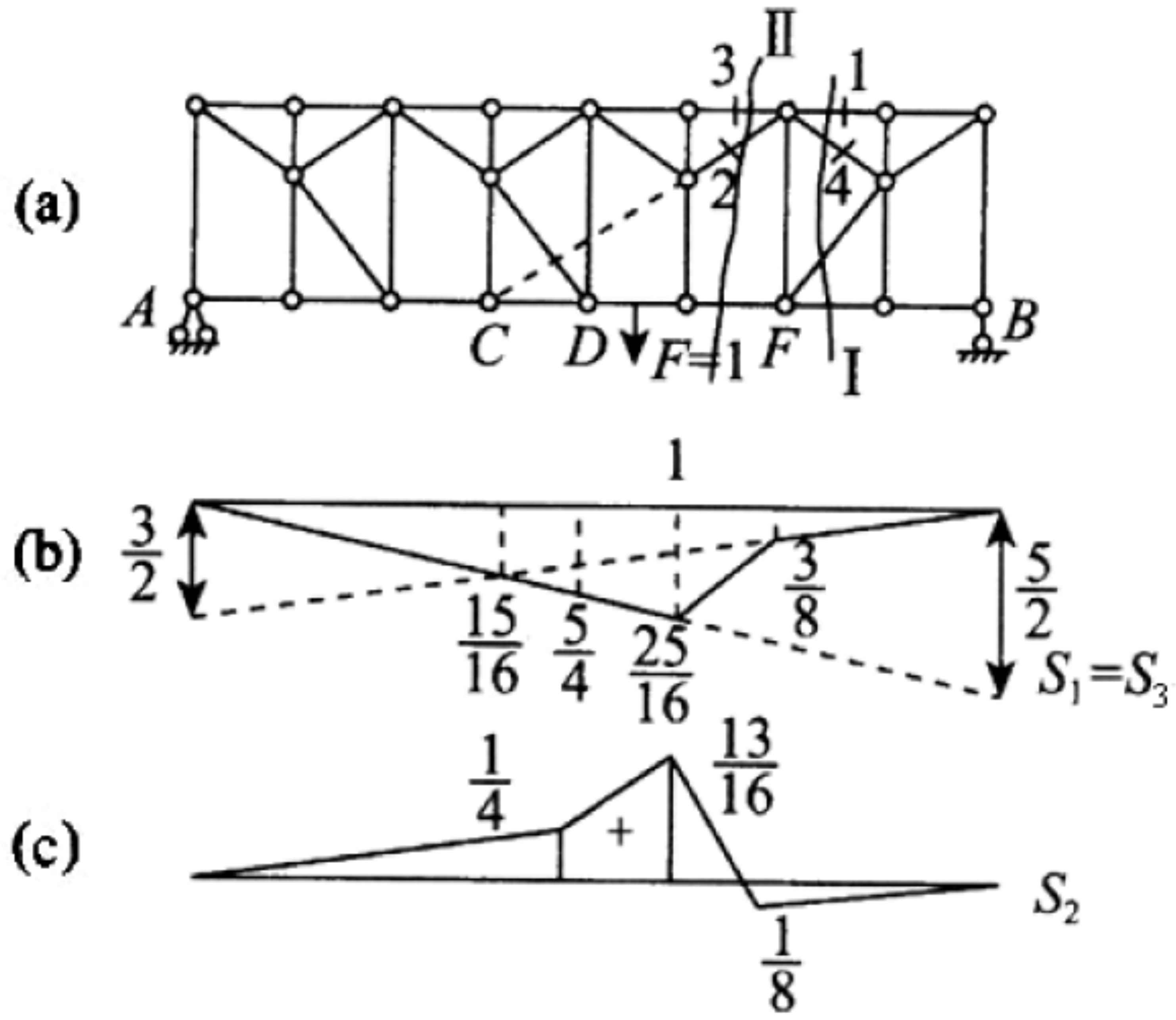


图 11-2-37

11-21　试求图示简支梁在所给移动荷载作用下截面 C 的最大弯矩。

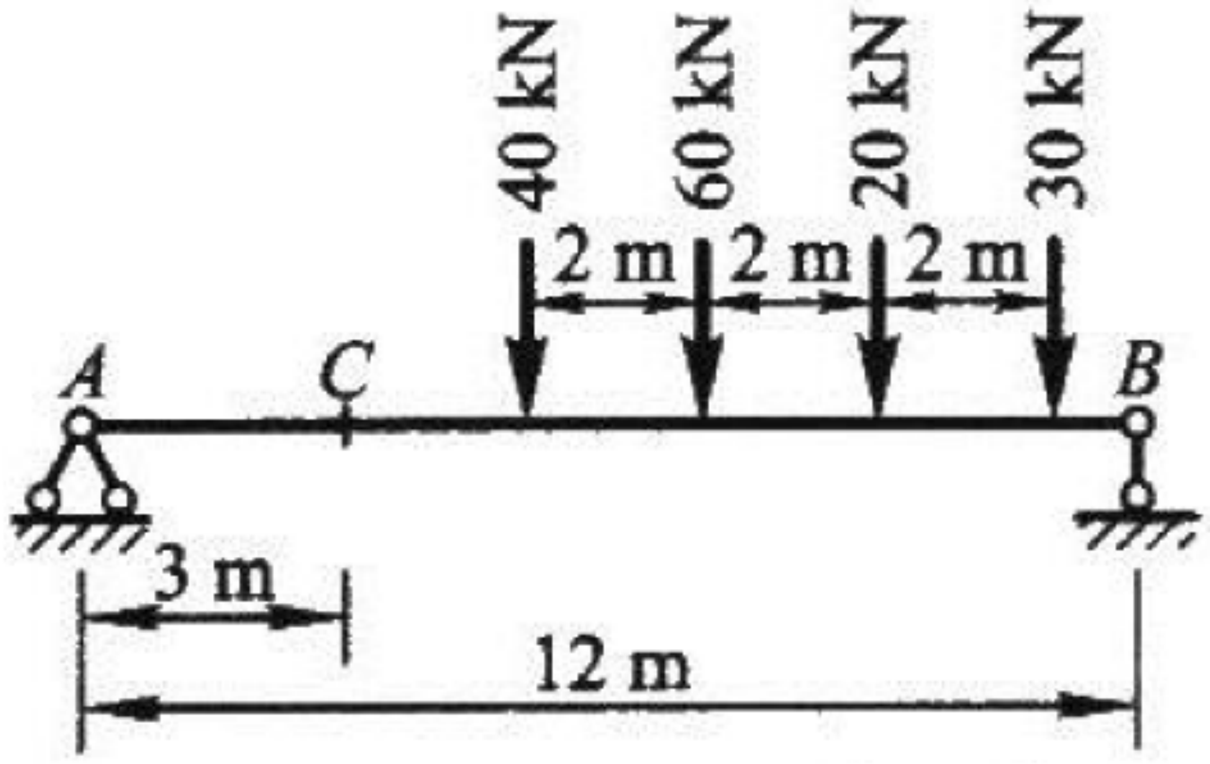


图 11-2-38（题 11-21）

解：先绘制出截面 C 弯矩的影响线，如图 11-2-39（a）所示。

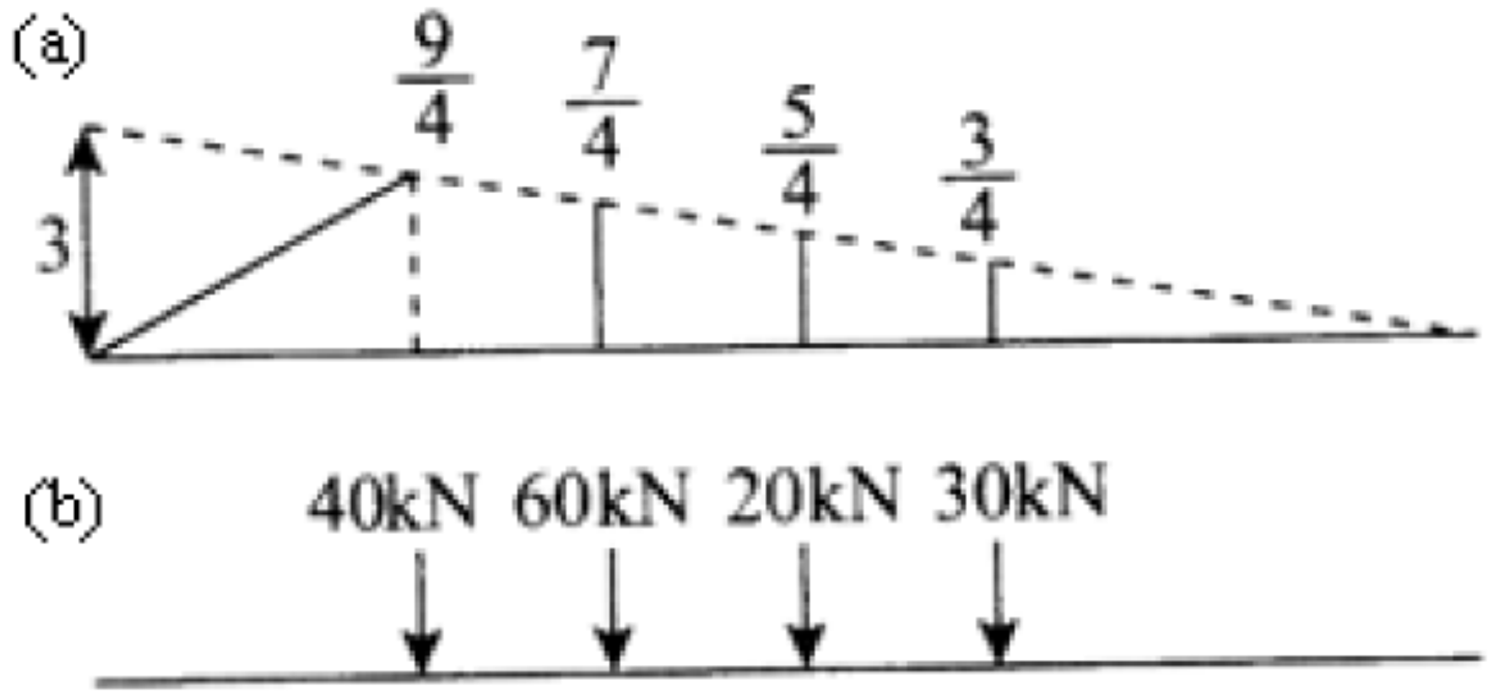


图 11-2-39

荷载作用于图 11-2-39（b）位置时，有

$$\frac{40}{3}>\frac{110}{9}$$

$$\frac{0}{3}<\frac{40+110}{9}$$

判别条件满足，得出截面 C 的最大弯矩

$$M_{C(\max)}=40\times\frac{9}{4}+60\times\frac{7}{4}+20\times\frac{5}{4}+30\times\frac{3}{4}$$
$$=242.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

11-22　试求图示简支梁在中—活载作用下 M_C 的最大值及 F_{SD} 的最大、最小值。要求按判别式确定最不利荷载位置。

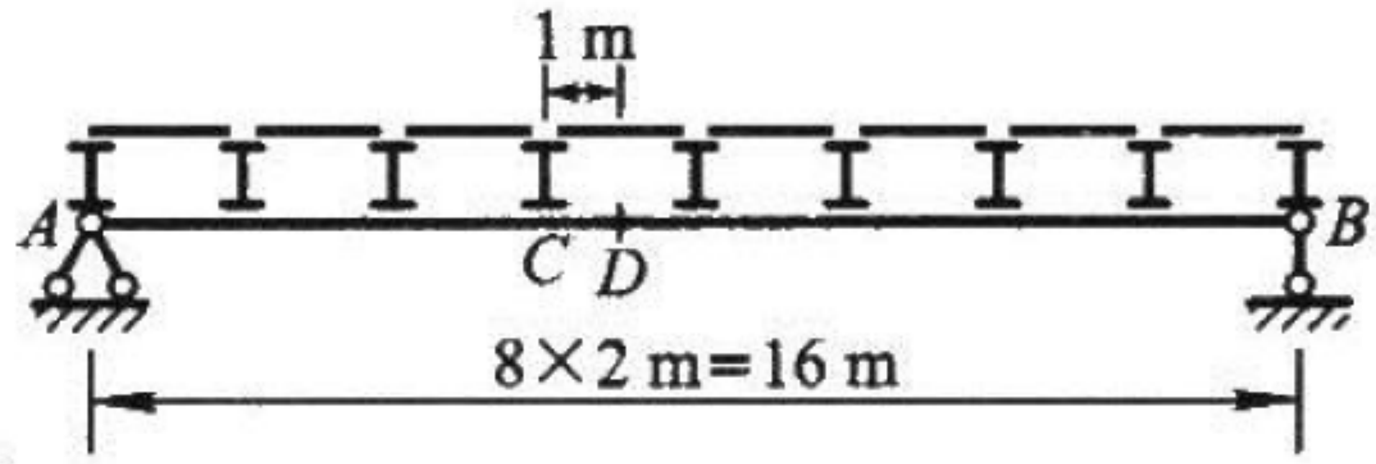


图 11-2-40（题 11-22）

解：（1）求 $M_{C\,(\max)}$

先绘制 M_C 的影响线，如图 11-2-41（a）所示，列车向左开行，第三轮位于顶点时，如图 11-2-41（b）所示。

$$\frac{440+220}{6}>\frac{440+92\times5.5}{10}$$

$$\frac{440}{6}<\frac{220+440+92\times5.5}{10}$$

判别条件满足，故可算 $M_{C\,(\max)}$ 如下

$$M_{C(\max)}=220\times\left(\frac{1}{8}\right)\times(15+22.5+30+25.5+21)$$
$$=3657\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

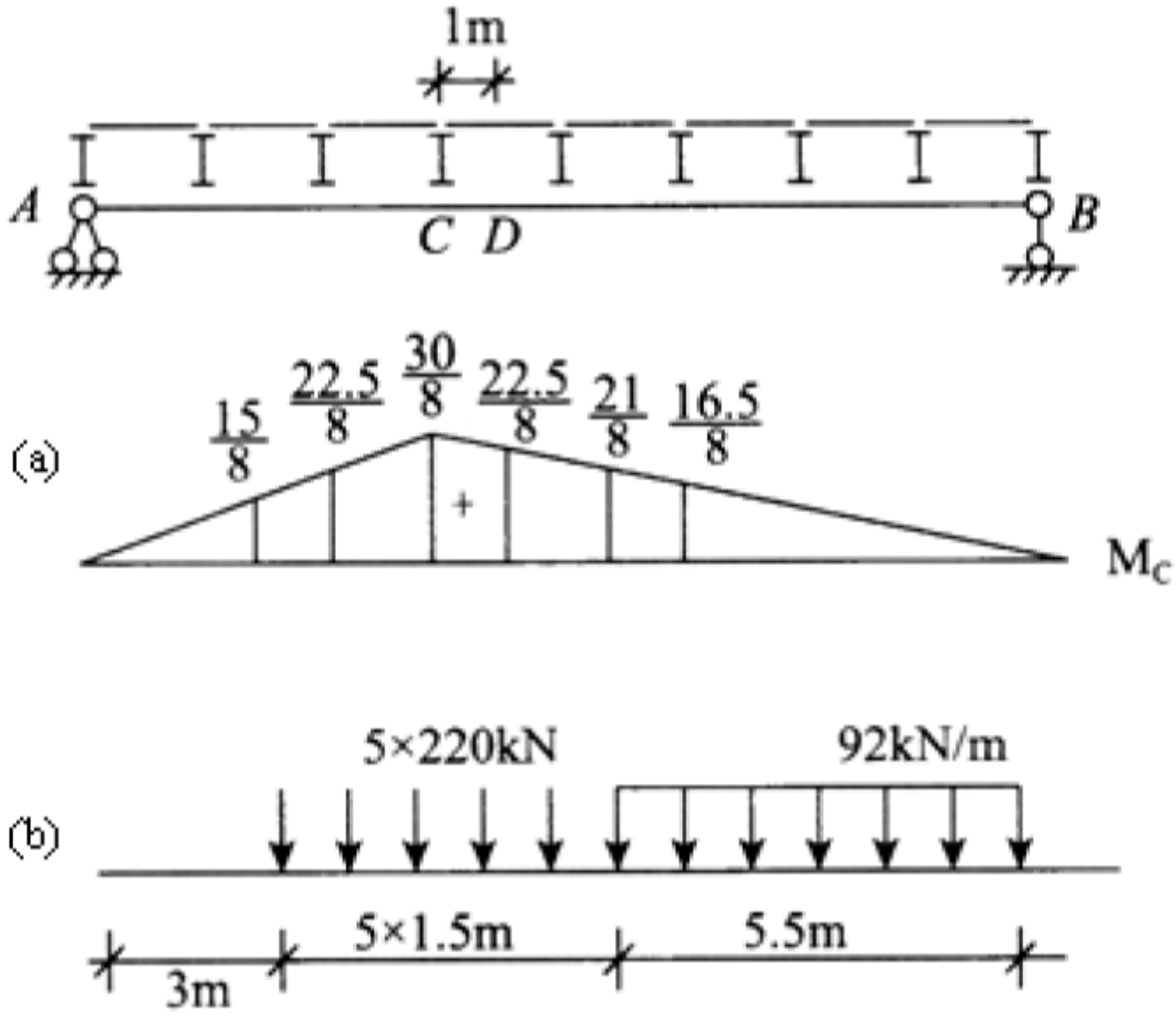


图 11-2-41

（2）求 $F_{SD(max)}$

先绘制 F_{SD} 的影响线如图 11-2-42（a）所示，当荷载在图 11-2-42（b）所示位置时，有

$$\frac{220}{1.143} > \frac{880+92\times0.5}{8}$$

$$\frac{0}{1.143} < \frac{220+880+92\times0.5}{8}$$

判别条件满足，故可算 $F_{SD(max)}$ 如下

$$F_{SD(\max)} = 1100\times\frac{5}{16} + 92\times\frac{1}{2}\times(0.5)\times\frac{1}{32} = 344.5kN$$

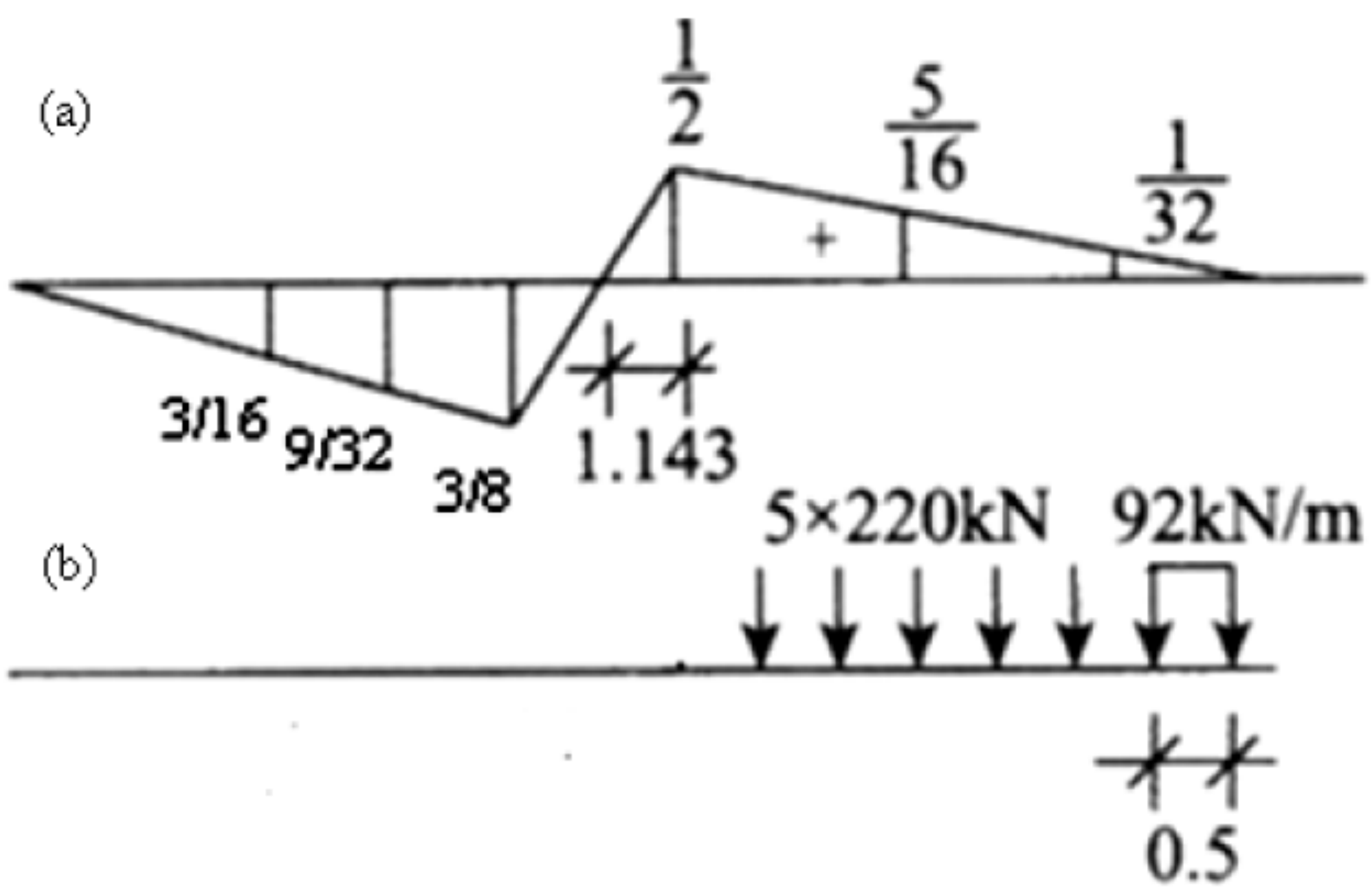


图 11-2-42

（3）求 $F_{SD(min)}$

荷载位置可直观判断如图 11-2-43 所示，因此有如下计算

$$普通活载\ F_{SD(\min)} = 1100 \times (-\frac{3}{16}) = -206.25kN$$

$$特种活载\ F_{SD(\min)} = 750 \times (-\frac{9}{32}) = -210.9kN$$

$$故取\ F_{SD(\min)} = -210.9kN$$

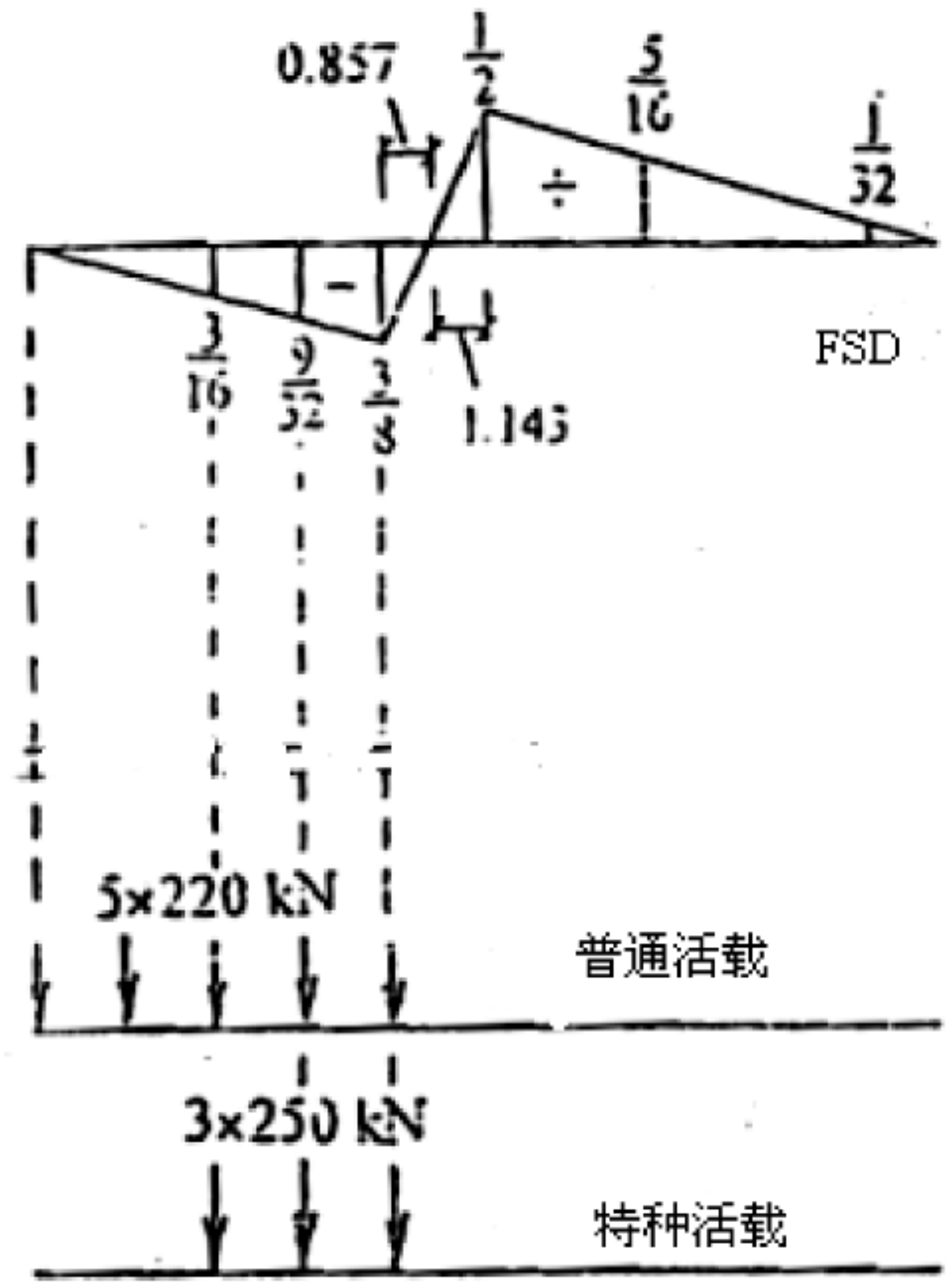


图 11-2-43

11-23　试判断最不利荷载位置并求出图示简支梁 F_A 的最大值及 F_{SC} 的最大、最小值：（a）在中—活载作用下；（b）在公路—II 级汽车荷载作用下。

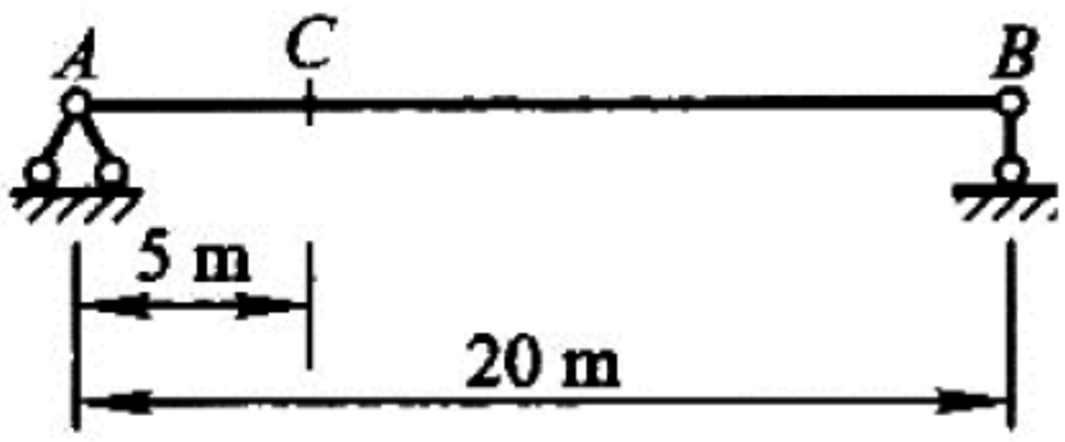


图 11-2-44（题 11-23）

解：先绘制出 F_A 和 F_{SC} 的影响线图形，如图 11-2-42（a）、（b）所示。

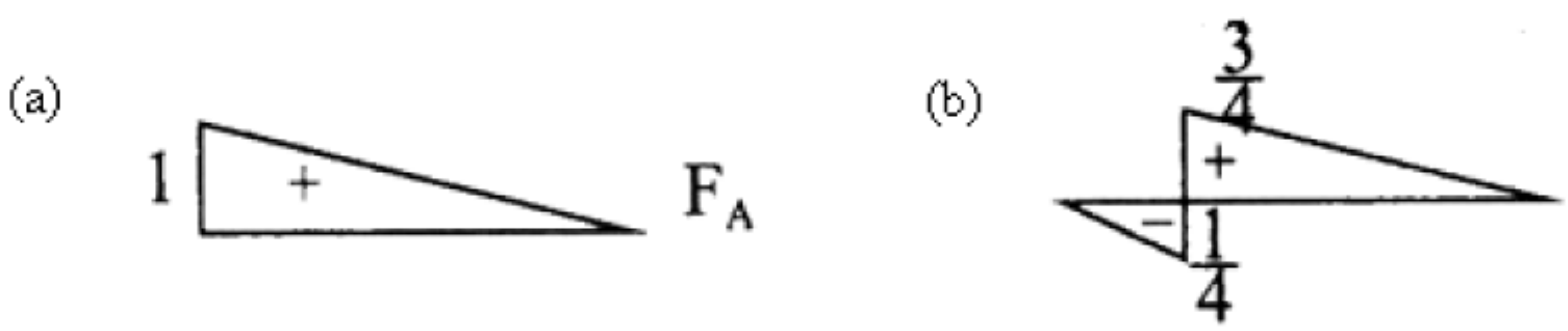


图 11-2-45

（1）中—活载

当荷载的分布如图 11-2-46（a）、图 11-2-47（a）、（b）时可算得简支梁 F_A 的最大值及 F_{SC} 的最大、最小值如

下

$$F_{A(\max)}=1100\times\frac{17}{20}+92\times\frac{1}{2}\times12.5\times\frac{12.5}{20}=1294kN$$

$$F_{SC(\max)}=1100\times\frac{12}{20}+92\times\frac{1}{2}\times7.5\times\frac{7.5}{20}=789kN$$

$$F_{SC(\min)}=750\times(-\frac{1}{4})\times(\frac{3.5}{5})=-131kN$$

（2）公路—II 级汽车荷载

①车道荷载

当荷载分布如图 11-2-46（b）、图 11-2-47（c）（d）时，可算得简支梁 F_A 的最大值及 F_{SC} 的最大、最小值如下

$$F_{A(\max)}=7.875\times20\times\frac{1}{2}+180\times1=258.75kN$$

$$F_{SC(\max)}=7.875\times15\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+180\times\frac{3}{4}\times1.2=215.2kN$$

$$F_{SC(\max)}=7.875\times5\times(-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}\times1.2+180\times(-\frac{1}{4})\times1.2=-59.9kN$$

②车辆荷载

当荷载分布如图 11-2-46（c）、图 11-2-47（e）（f）时，可算得简支梁 F_A 的最大值及 F_{SC} 的最大、最小值如下

$$F_{A(\max)}=70\times1+130\times\frac{16}{20}+50\times\frac{11}{20}+100\times\frac{7}{20}=236.5kN$$

$$F_{SC(\max)}=70\times(-\frac{1}{20})+130\times\frac{3}{4}+50\times\frac{10}{20}+100\times\frac{6}{20}=149kN$$

$$F_{SC(\min)}=130\times(-\frac{1}{4})+70\times(-\frac{1}{20})=-36kN$$

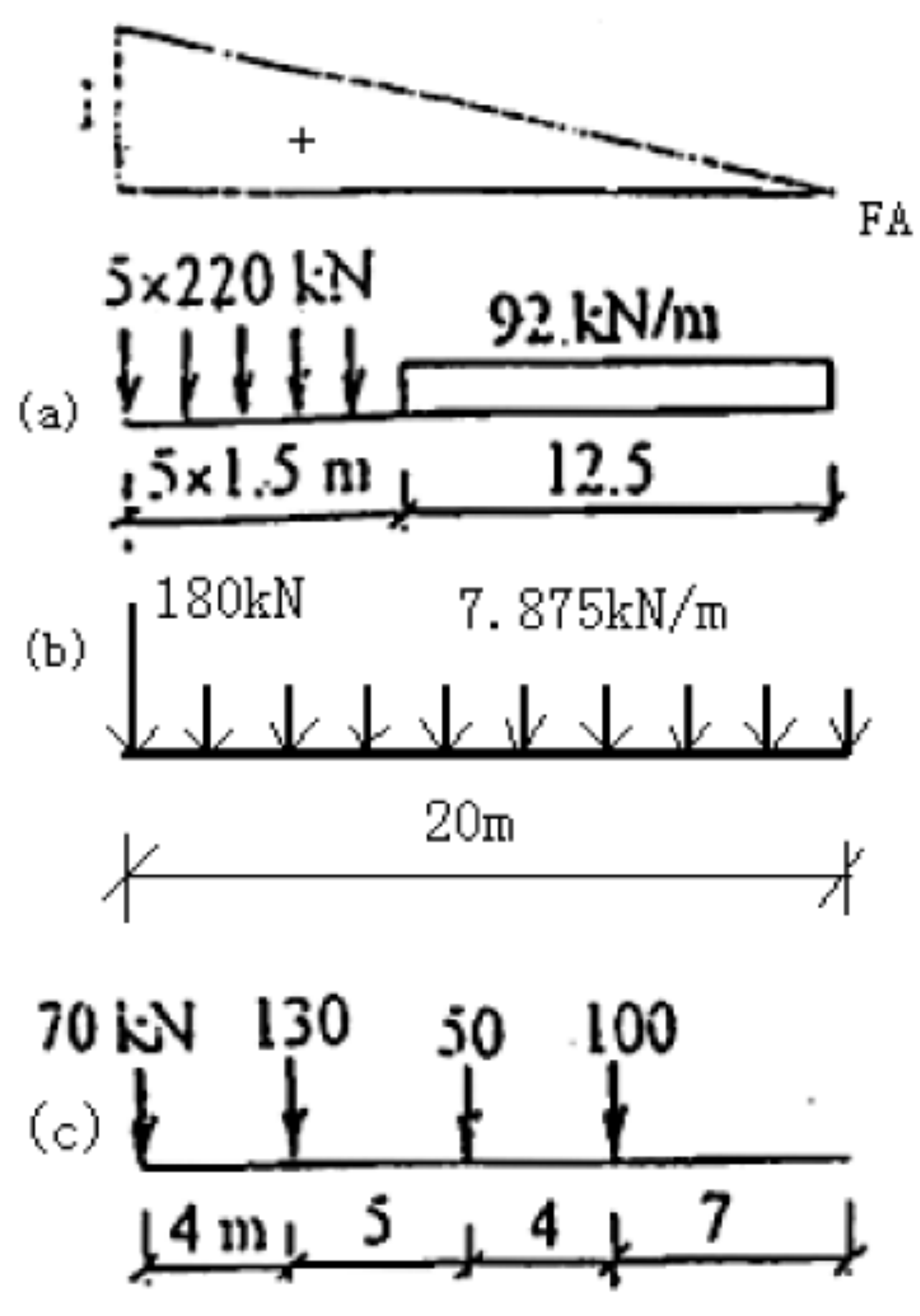


图 11-2-46

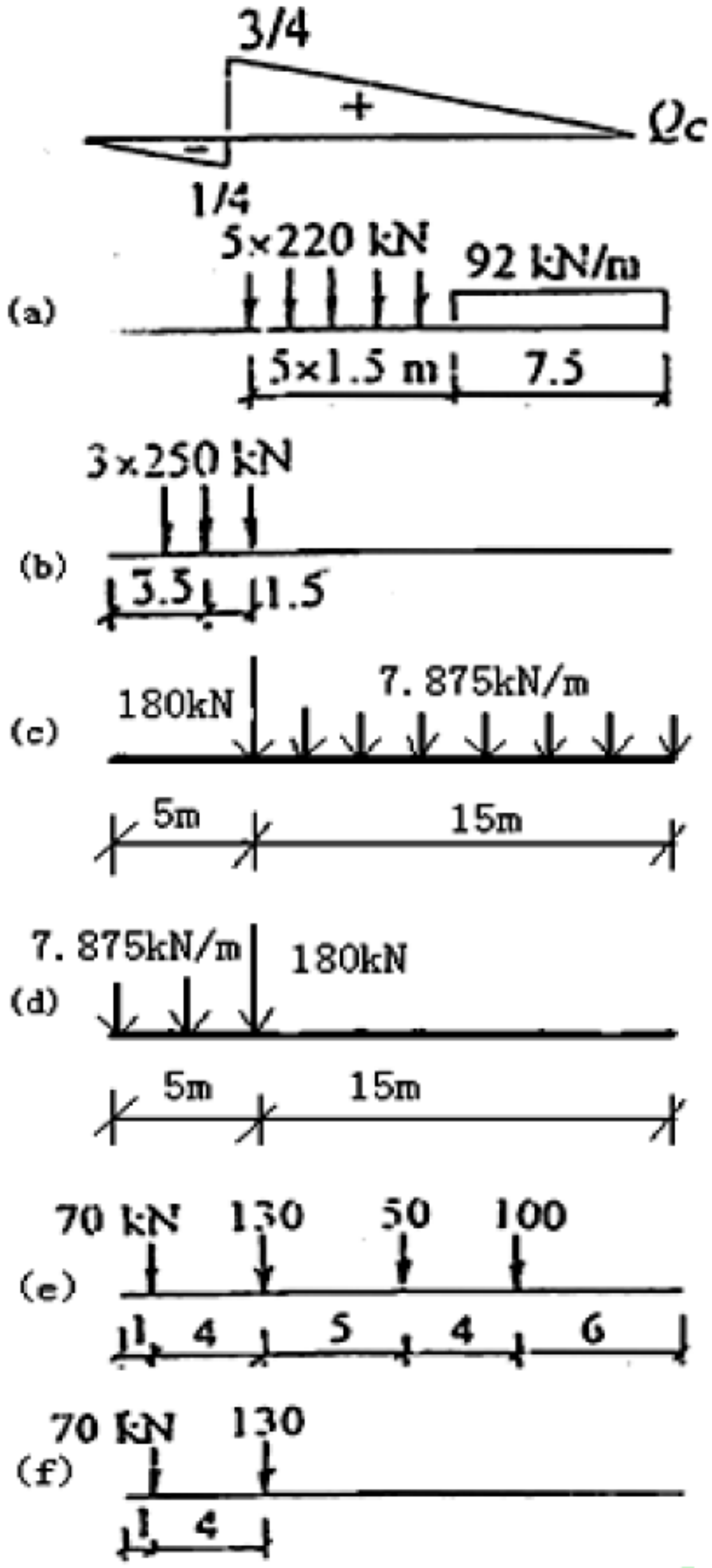


图 11-2-47

11-24　利用换算荷载表计算题 11-22。

解：利用换算表计算过程如下

$$M_C: l=16m，\ \alpha=\frac{3}{8}，\ K=121.9kN/m$$

$$M_{C1(\max)}=121.9\times\frac{1}{2}\times16\times\frac{30}{8}=3675kN\cdot m$$

$$最大 F_{SD}: l=9.143m，\ \alpha=\frac{1}{8}，\ K=150.7kN/m$$

$$F_{SD(\max)}=150.7\times\frac{1}{2}\times9.143\times\frac{1}{2}=344.5kN\cdot m$$

$$最小 F_{SD}: l=6.857m，\ \alpha=\frac{1}{8}，\ K=164.2kN/m$$

$$F_{SD(\min)}=164.2\times\frac{1}{2}\times6.857\times(-\frac{3}{8})=-211.1kN\cdot m$$

11-25　试求图示简支梁在垂直吊车荷载作用下，C 截面的最大弯矩和最大、最小剪力。已知第一台吊车轮压为 $F_1=F_2=195kN$，第二台吊车轮压为 $F_3=F_4=118kN$。

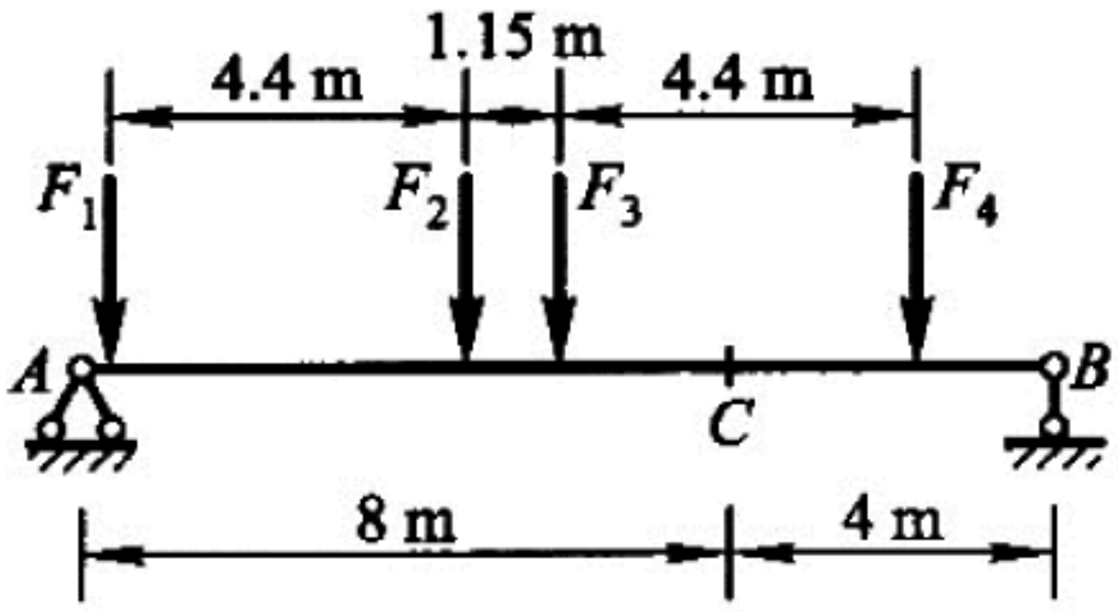


图 11-2-48（题 11-25）

解：（1）求 $M_{C(\max)}$

先作出 M_C 的影响线如图 11-2-49 所示，各段直线斜率为

$$\tan\alpha_1=\frac{1}{6},\tan\alpha_2=-\frac{1}{2}$$

将 F_2 置于 C 点，有判别式如下

$$\frac{F_1+F_3+F_2}{8}\succ\frac{F_4}{4}，\text{即}\frac{195+118+195}{8}\succ\frac{118}{4}$$

$$\frac{F_1+F_3}{8}\prec\frac{F_2+F_4}{4}，\text{即}\frac{195+118}{8}\prec\frac{195+118}{4}$$

故知这是一个临界位置，算出截面 C 的最大弯矩如下

$$M_{C_1\max}=195\times\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\times\frac{4-1.15}{4}\times118+\frac{12-4.4}{12}\times195\times\frac{8}{3}$$
$$=978.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

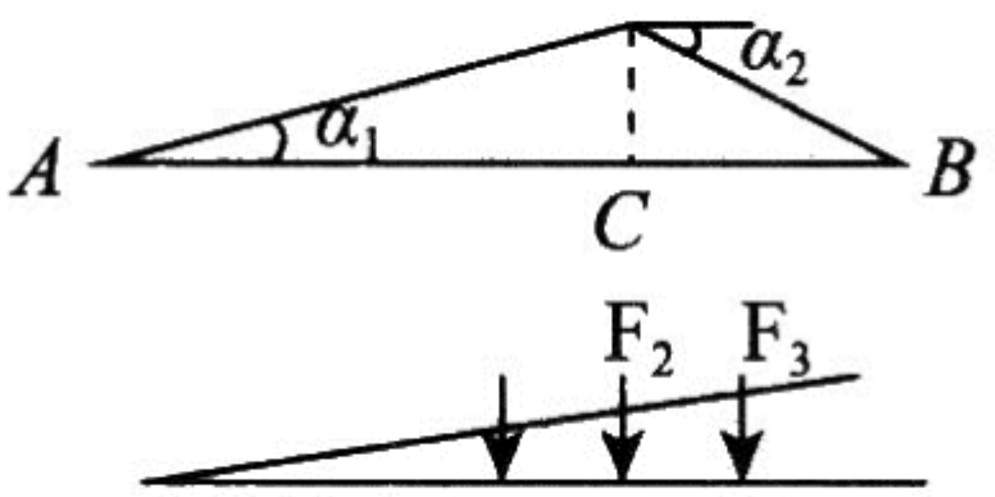


图 11-2-49

（2）求 C 截面的最大、最小剪力，先绘出 F_{SC} 的影响线如图 11-2-50 所示。

①求 $F_{SC(\max)}$

a．当将 F_1 作用在 1/3 时

$$F=\frac{1}{3}\times195=65\ \text{kN}$$

b．当将 F_2 作用在 1/3 处时

$$F=\frac{1}{3}\times195-195\times\frac{2}{3}\times\frac{6-4.4}{6}+118\times\frac{4-1.15}{4}\times\frac{1}{3}$$
$$=58.36\ \text{kN}<65\ \text{kN}$$

故 $F_{SC(\max)}=65\text{kN}$。

②求 $F_{SC(\min)}$

a．当 F_2 作用在 2/3 处时

$$F_{SC}=-195\times\frac{2}{3}-195\times\frac{8-4.4}{8}\times\frac{2}{3}+118\times\frac{1}{3}\times\frac{4-1.15}{4}$$
$$=-160.47\ \text{kN}$$

b．当 F_3 作用在 2/3 处时

$$F_{SC}=-118\times\frac{2}{3}-195\times\frac{8-1.15}{8}\times\frac{2}{3}-195\times\frac{8-1.15-4.4}{8}\times\frac{2}{3}$$
$$=-229.8\ \mathrm{kN}$$

故 $F_{SC(min)}$ =-229.8kN。

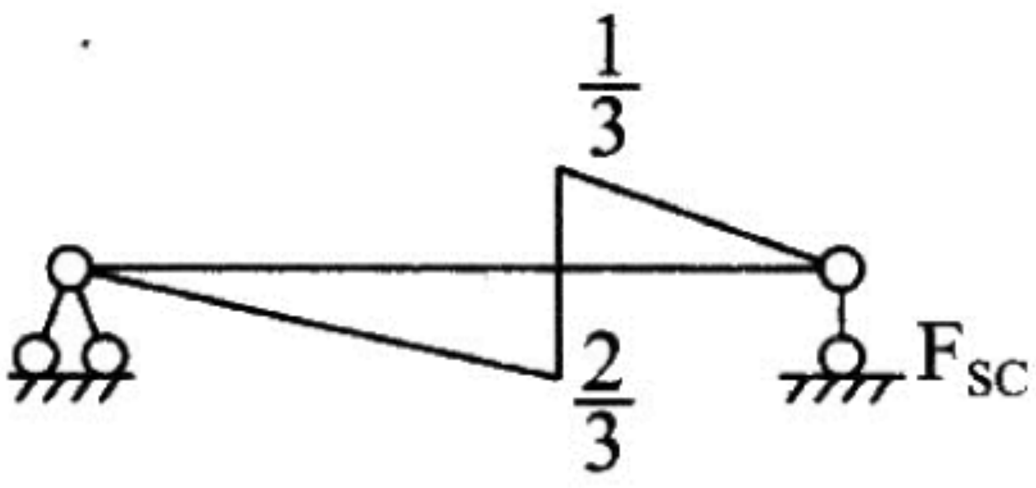


图 11-2-50

11-26　试求图示吊车梁在两台吊车轮压作用下，支座 B 的最大反力。

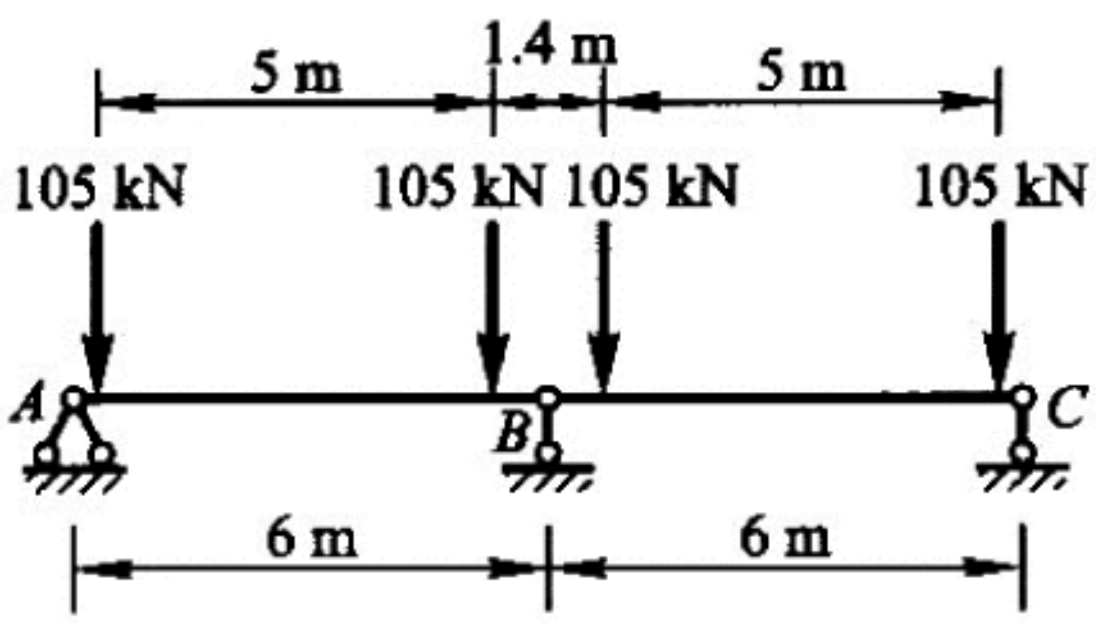


图 11-2-51（题 11-26）

解：作出支座 B 的反力影响线，如图 11-2-52（b）所示。

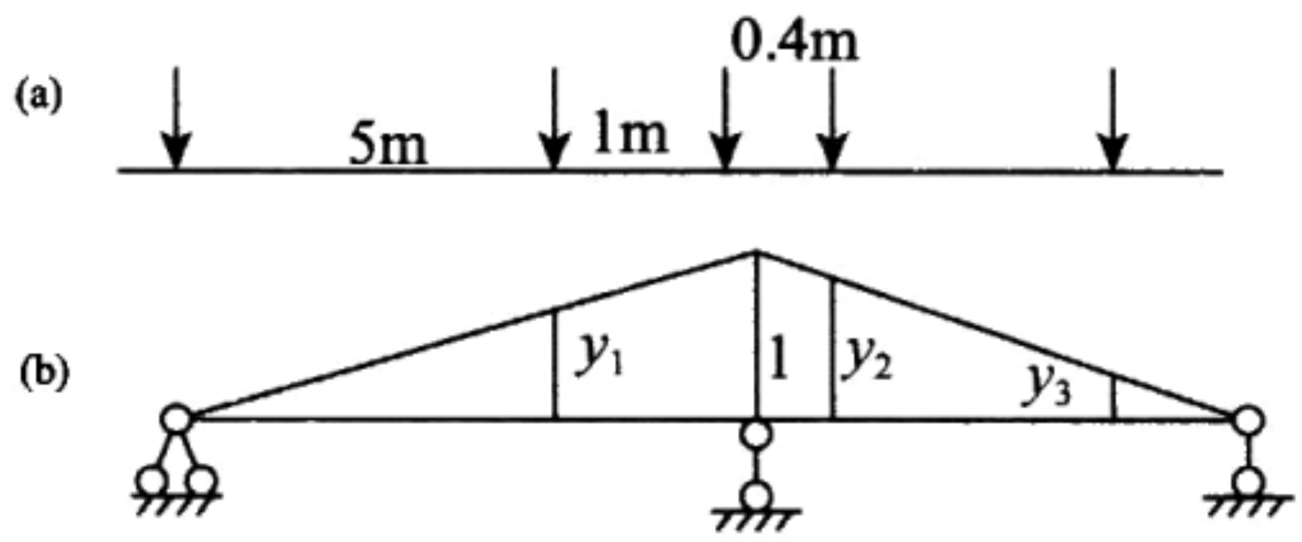


图 11-2-52

当力作用在如图 11-2-52（a）所示时，支座反力的最大值 F_B 计算如下

$$F_B=105\times y_1+105y_2+105y_3$$
$$=105\times\frac{5}{6}+105\times\frac{6-0.4}{6}+105\times\frac{6-5.4}{6}$$
$$=196\ \mathrm{kN}$$

（教材答案为 556.5kN）

11-27　图为两孔单线铁路钢筋混凝土简支梁桥，试分别计算：（a）一孔有车；（5）两孔有车时中间桥墩所承受的最大活载竖向压力（暂不考虑冲击力）。

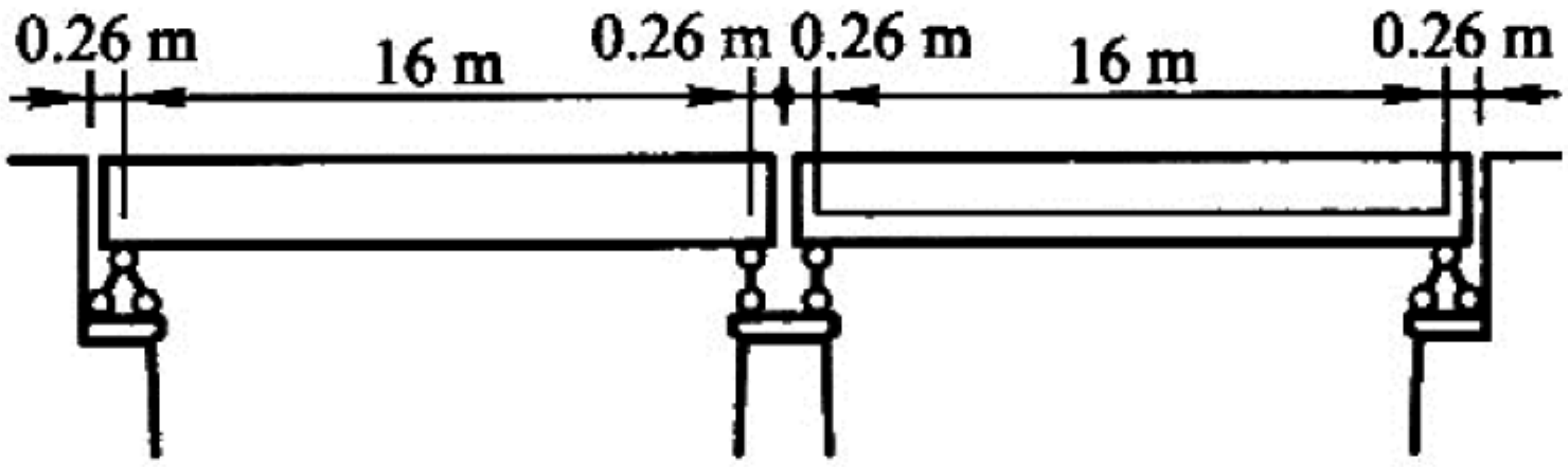


图 11-2-53（题 11-27）

解：画出中间桥墩竖向支撑力的影响线，如图 11-2-51 所示。

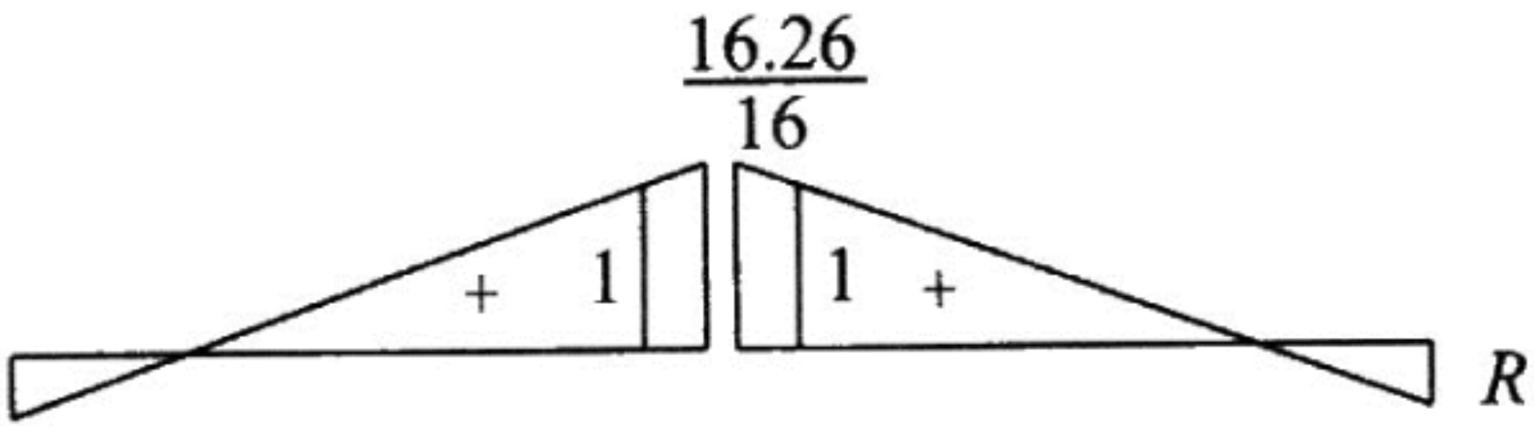


图 11-2-54

当一孔有车时

$$R = 137.1 \times \frac{1}{2} \times 16.26 \times \frac{16.26}{16} = 1133\text{kN}$$

当两孔有车时

$$R = 98.2 \times \frac{1}{2} \times 32.52 \times \frac{16.26}{16} = 1623\text{kN}$$

11-28　试求简支梁的绝对最大弯矩。

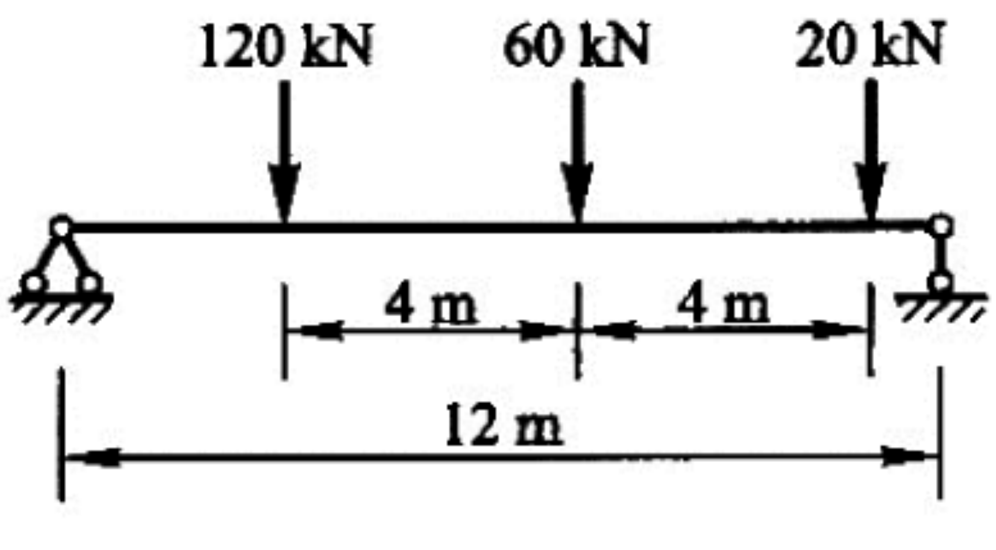


图 11-2-55（题 11-28）

解：当二力在梁上时，用换算荷载，如图 11-2-56 所示。

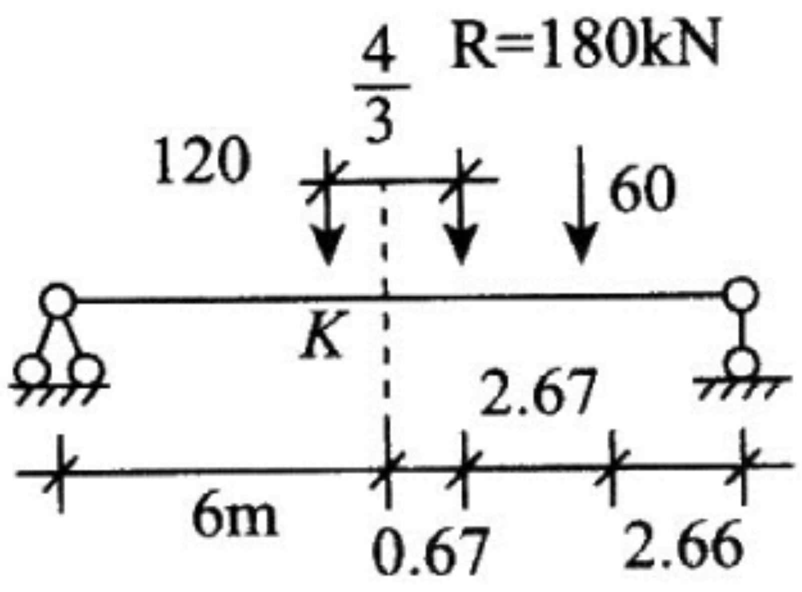


图 11-2-56

计算简支梁的绝对最大弯矩 M_{max}，如下

$$M_{max}=\frac{R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_k$$
$$=\frac{180}{12}\left(6-\frac{2}{3}\right)^2-0$$
$$=426.7\ kN\cdot m$$

11-29　试求简支梁的绝对最大弯矩。

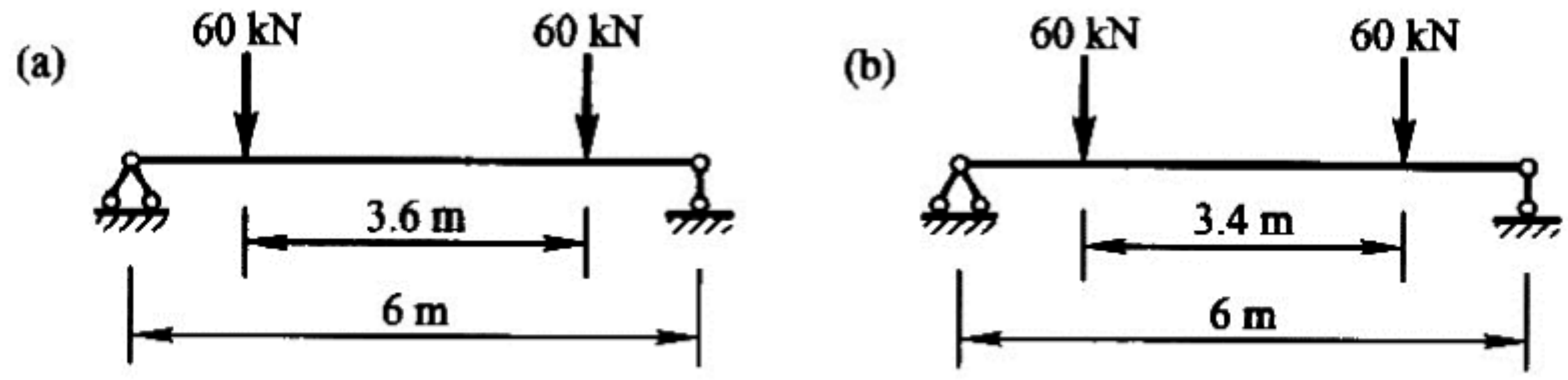


图 11-2-57（题 11-29）

解：（a）如图解 11-2-58（a）所示

当一力在梁上时

$$M_{(1)}=\frac{60\times 6}{4}=90\ kN\cdot m$$

当二力在梁上时

$$M_{(2)}=\frac{120}{6}\left(\frac{6}{2}-\frac{1.8}{2}\right)^2=88.2\ kN\cdot m$$

故取 M_{max}=90kN·m。

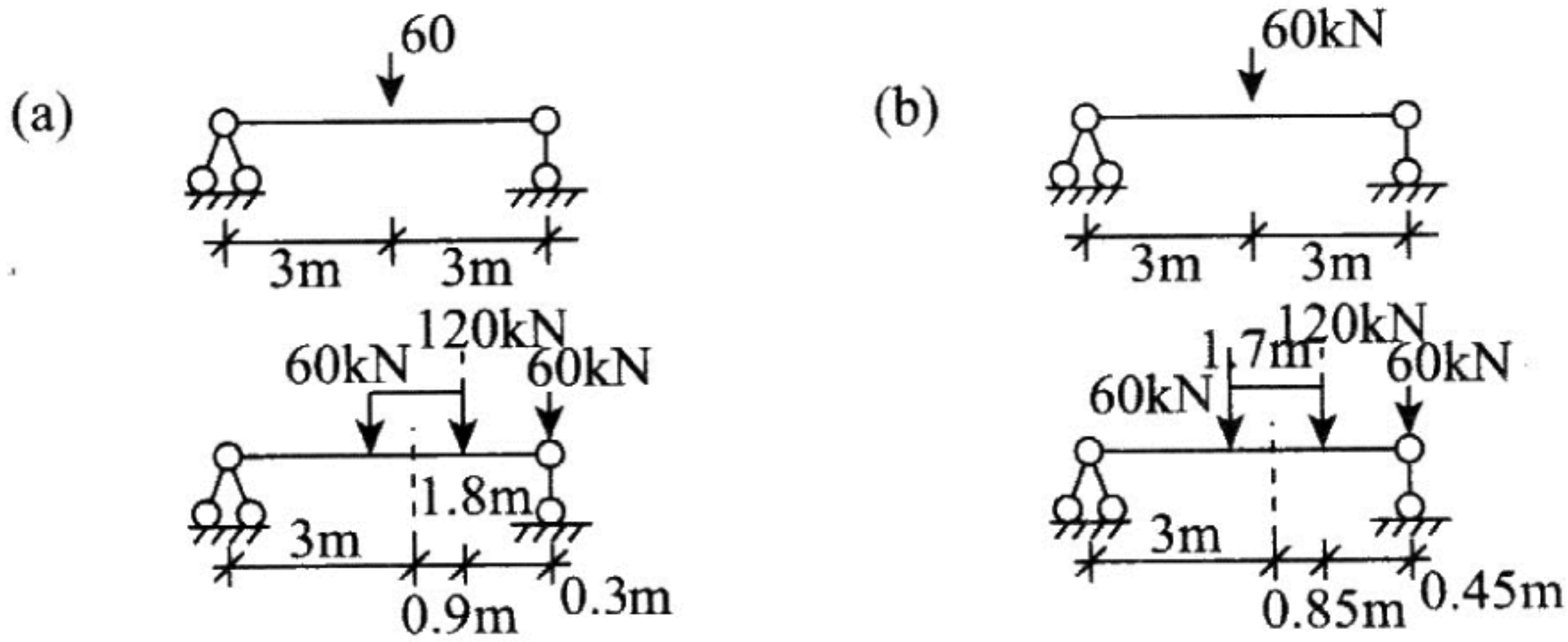


图 11-2-58

（b）如图解 11-2-58（b）所示

当一力在梁上时

$$M_{(1)}=\frac{60\times 6}{4}=90\ kN\cdot m$$

当二力在梁上时

$$M_{(2)}=\frac{120}{6}\left(\frac{6}{2}-\frac{1.7}{2}\right)^2=92.45\ kN\cdot m$$

故取 M_{max}=92.45kN·m。

11-30　图 11-2-59 所示连续梁 EI＝常数。（a）试绘制支座弯矩 M_B 影响线。要求：分跨求出影响线方程；将每跨 4 等分，求出各分点处竖标，连以曲线；（b）绘制出 M_K 影响线，求出上述各分点处竖标。（提示：用叠加

法作，由$\boldsymbol{M}=\overline{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{M}_P$有$\boldsymbol{M}_K=\overline{\boldsymbol{M}}_{K1}\boldsymbol{M}_B+\boldsymbol{M}_{KP}$，其中$\overline{\boldsymbol{M}}_{K1}=1/2$，$M_B$即为前面（a）已作出的多余未知力影响线，$M_{KP}$为基本结构上截面K的弯矩影响线。建议列表计算。）

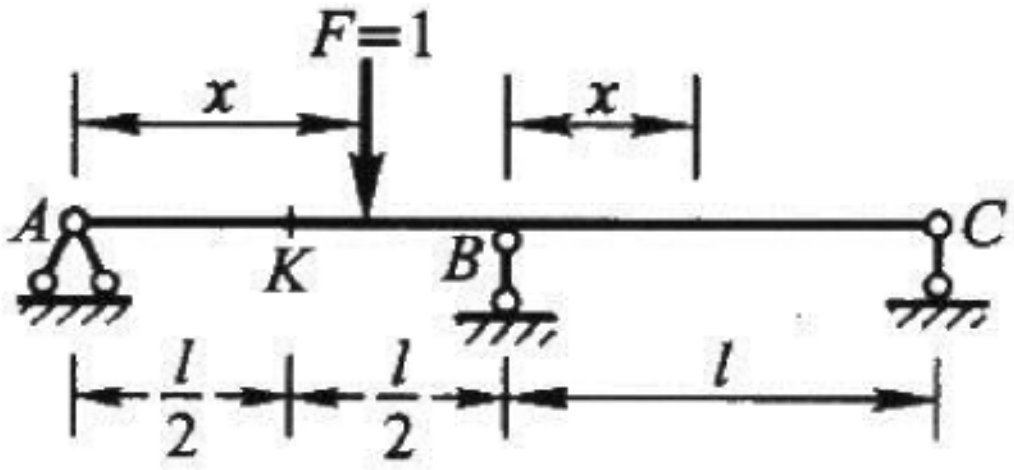


图 11-2-59（题 11-30）

解：（a）绘制支座弯矩M_B影响线方法如下

当F＝1在第一跨时，由力矩分配法

$$M_B=-\frac{l}{4}\frac{x}{l}\times\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

当F＝1在第二跨时，由力矩分配法

$$M_B=-\frac{l}{4}\frac{x}{l}\times\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(2-\frac{x}{l}\right)$$

将第一跨分成四份，各点的值如下表

将第二跨分成四份，各点的值如下表

x	0.25	0.5	0.75
y	-0.082	-0.0938	-0.0586

将四点分别用曲线连结，即可画出M_B影响线，如图11-2-57所示。

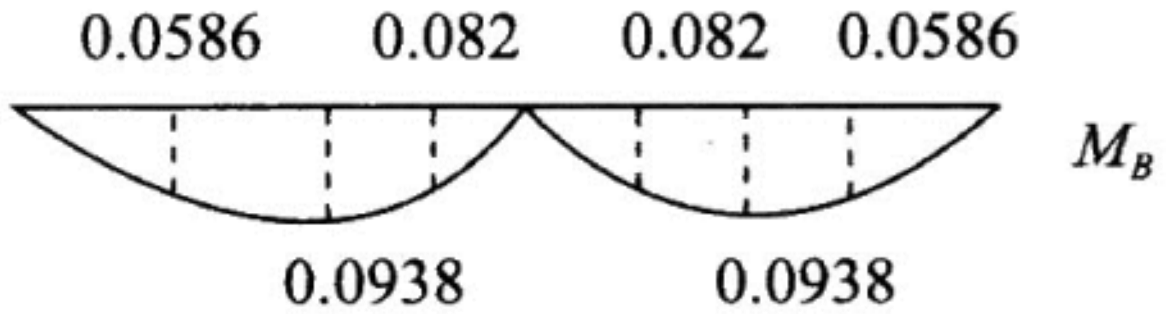


图 11-2-60

（b）用叠加法绘制M_K影响线，具体过程如下

由$M=\overline{M}_1X_1+M_P$，得到$M_k=\overline{M}_{k1}M_B+M_{KP}$，其中$\overline{M}_{K1}=\frac{1}{2}$，$M_B$即为前面所得影响线，$M_{KP}$为基本结构上截面K影响线，如图11-2-61所示。M_{KP}影响线故与$1/2M_B$影响线叠加即得M_K影响线，如图11-2-62所示。各点的值如下

F＝1在第一段

x	0.25	0.5	0.75
y	0.0957	0.2031	0.084

F＝1在第二段

x	0.25	0.5	0.75
y	-0.041	-0.0469	0.0293

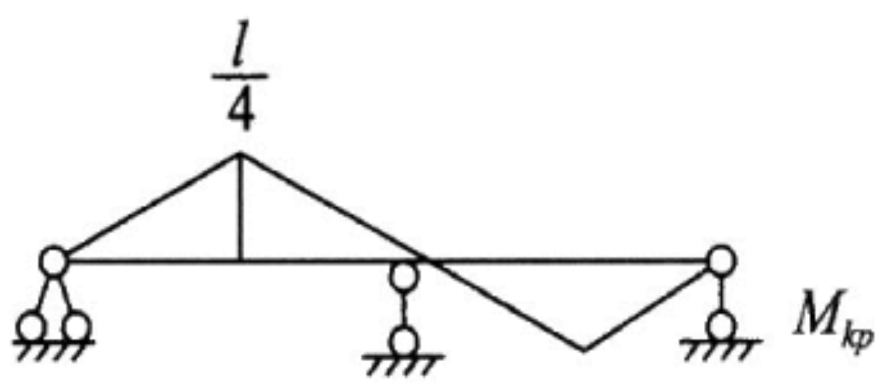


图 11-2-61

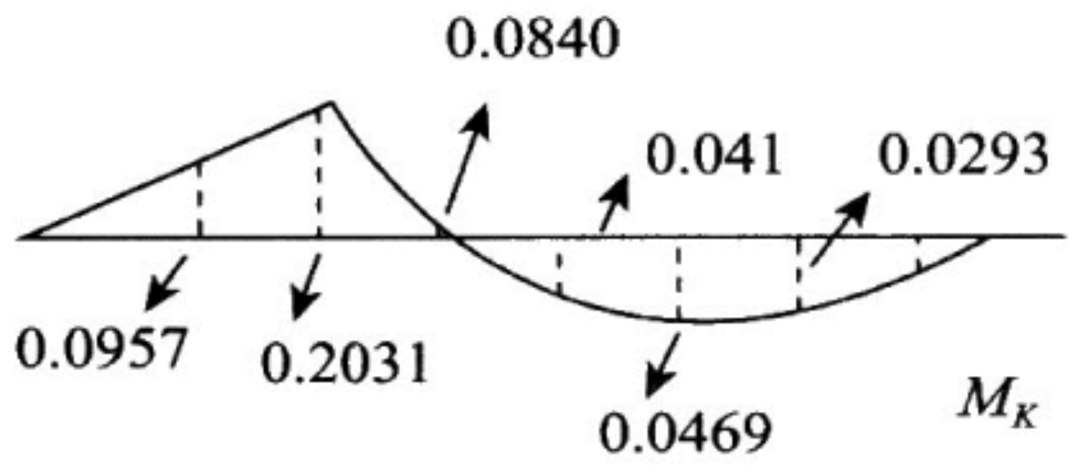


图 11-2-62

11-31　试绘出图示连续梁F_B、M_A、M_C、M_K、F_{SK}、F_{SB}^{L}、F_{SB}^{R}影响线形状。

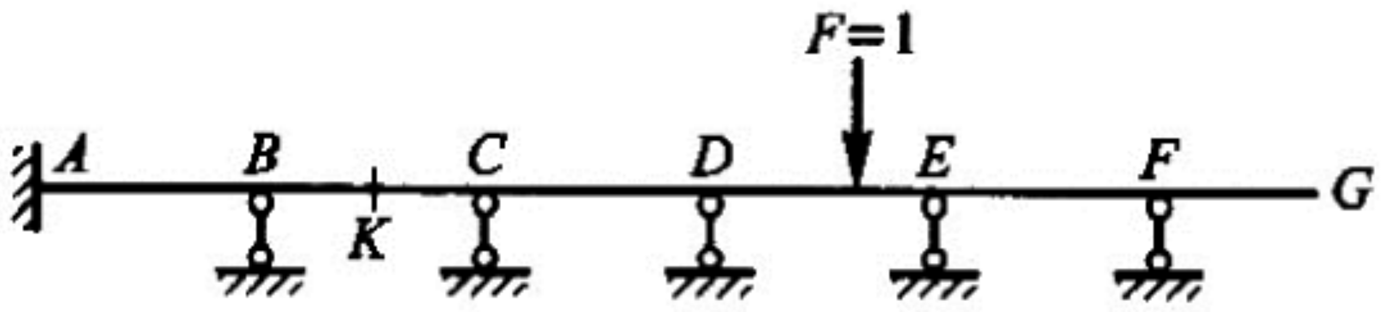


图 11-2-63（题 11-31）

解：固定端 A 处转角为零，伸臂 FG 不受力，位移图为直线。用机动法凭直观可画出各所求量值的影响线轮廓，如图 11-2-64 所示。

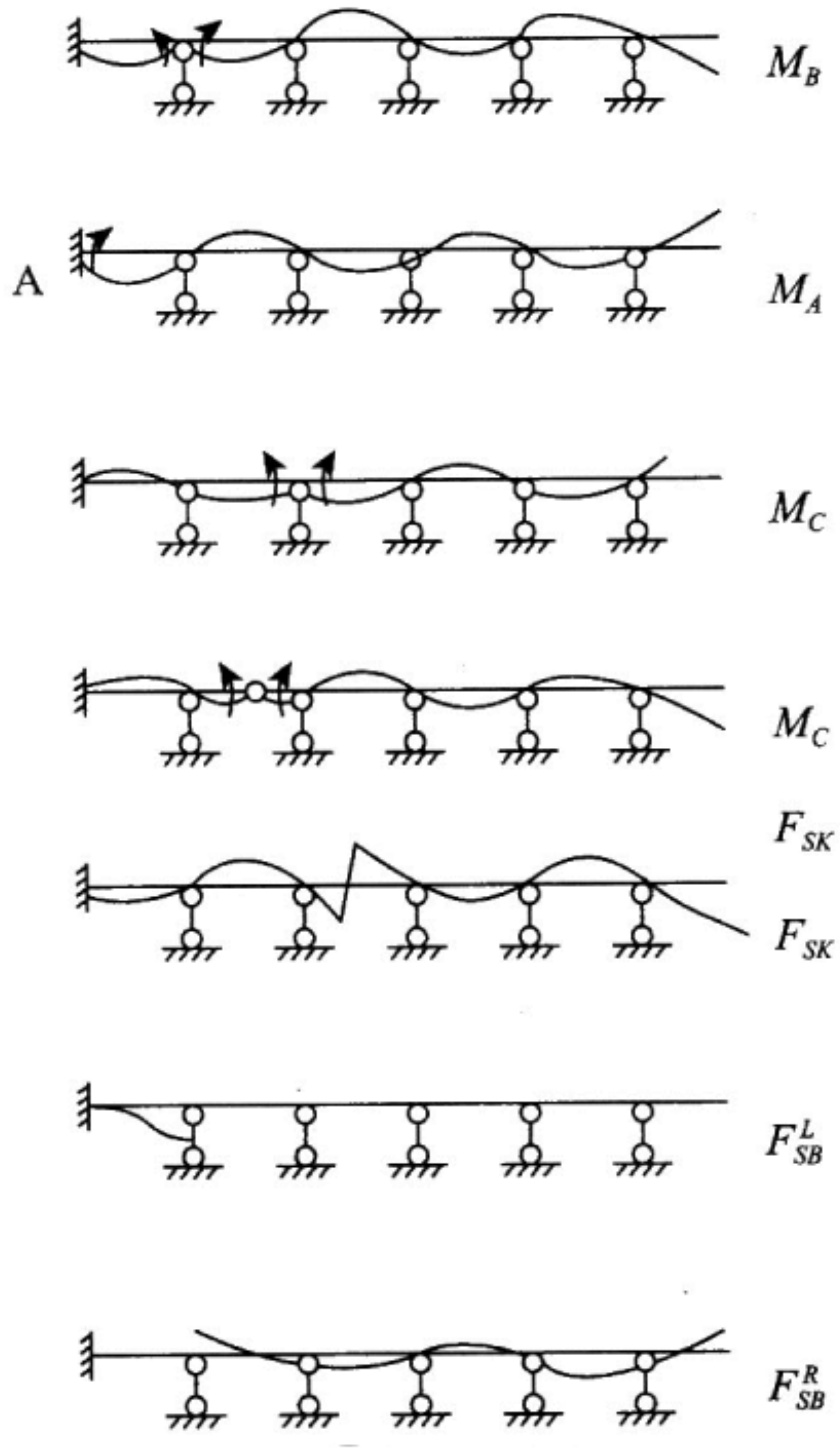


图 11-2-64

11-32　试问图示两影响线的形状是否正确？

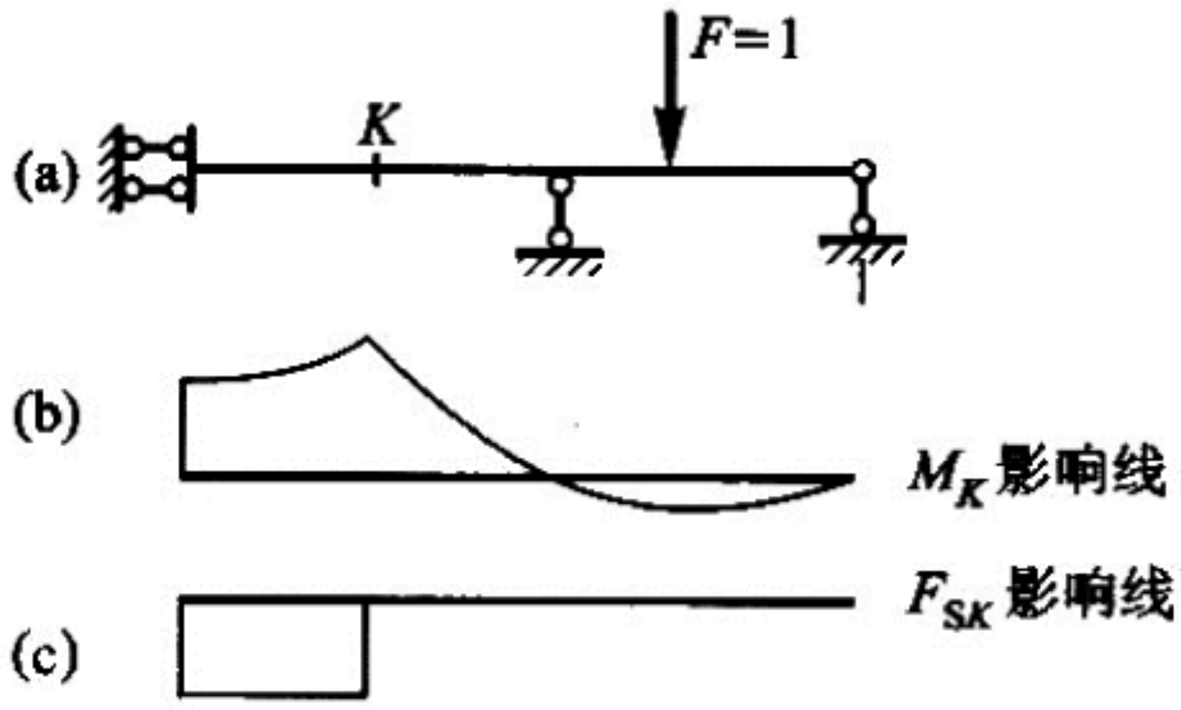


图 11-2-65（题 11-32）

答：用静力法可以验证（b）、（c）均正确。

11.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．在间接荷载作用下，梁截面内力影响线的作法是：应先作____________截面内力影响线，然后再对该截面有影响的区段按直线规律变化修正。[西南交通大学 2006 研]

【答案】直接荷载下该指定量值的影响线，而后按两横梁间为直线修改

【解析】间接荷载下的影响线是以直接荷载作用下的影响线为基础的，具体作法：应先作直接荷载下该指定量值的影响线，而后按两横梁间为直线修改截面内力影响线，然后再对该截面有影响的区段按直线规律变化修正。

2．图 11-3-1 所示多跨静定梁 M_D 及 F_{DQ} 的影响线分别为____________，____________（用图表示）。[湖南大学 2007 研]

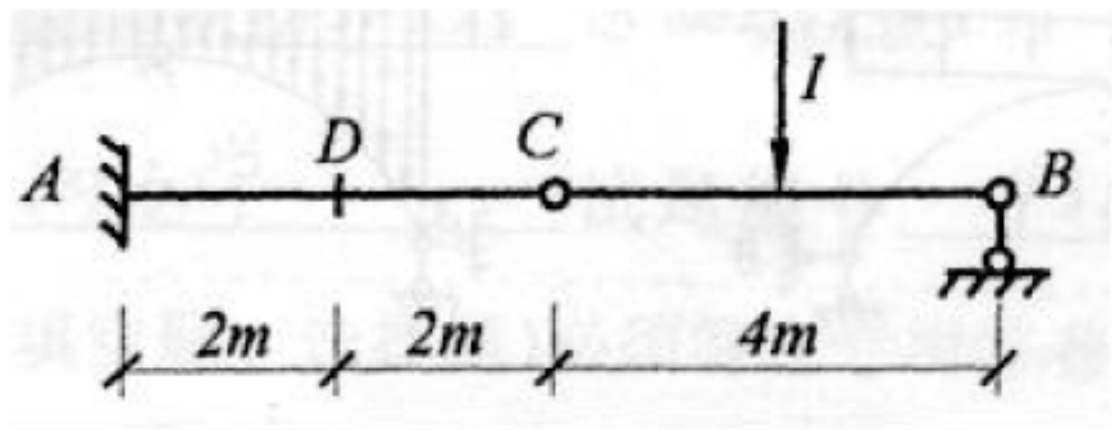
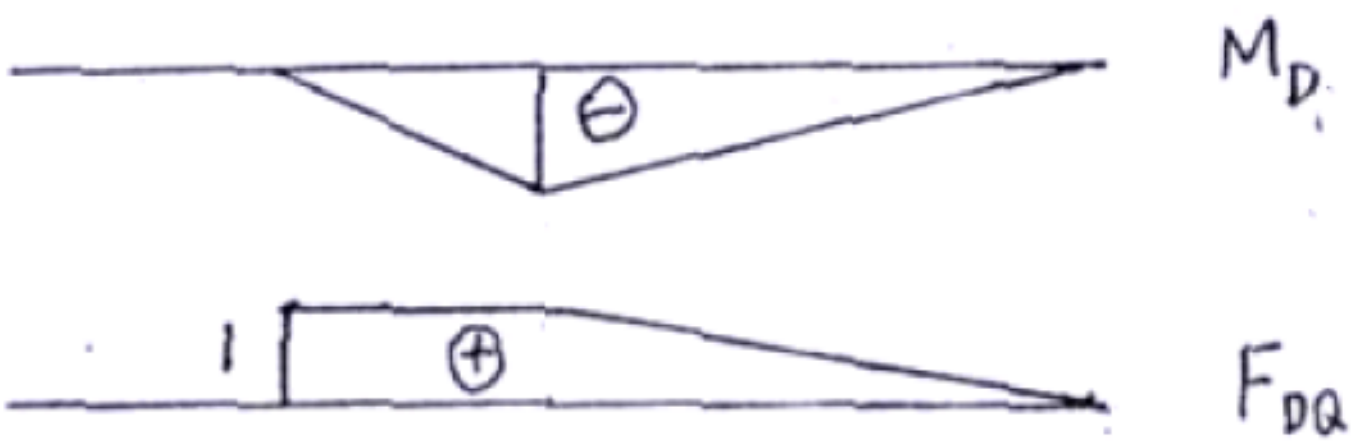


图 11-3-1

【答案】



【解析】采用静力法：以 A 点为坐标原点，先求 M_D 的影响线，当 $0\le x\le 2$ 时，$M_D=0$；当 $2\le x\le 4$ 时，$M_D=-x+2$；当 $4\le x\le 8$ 时，$M_D=\frac{1}{2}x-4$；综上可画出 M_D 的影响线。

求 F_{DQ} 的影响线，当 $0\le x\le 2$ 时，$F_{DQ}=0$；当 $2\le x\le 4$ 时，$F_{DQ}=+1$；当 $4\le x\le 8$ 时，$M_D=-\frac{1}{4}x+2$；综上可画出 F_{DQ} 的影响线。

3．图 11-3-2 所示组合结构，P=1 在 ABC 段移动，链杆 DE 轴力的影响线在 C 点处的竖标值为______。[中南大学 2005 研]

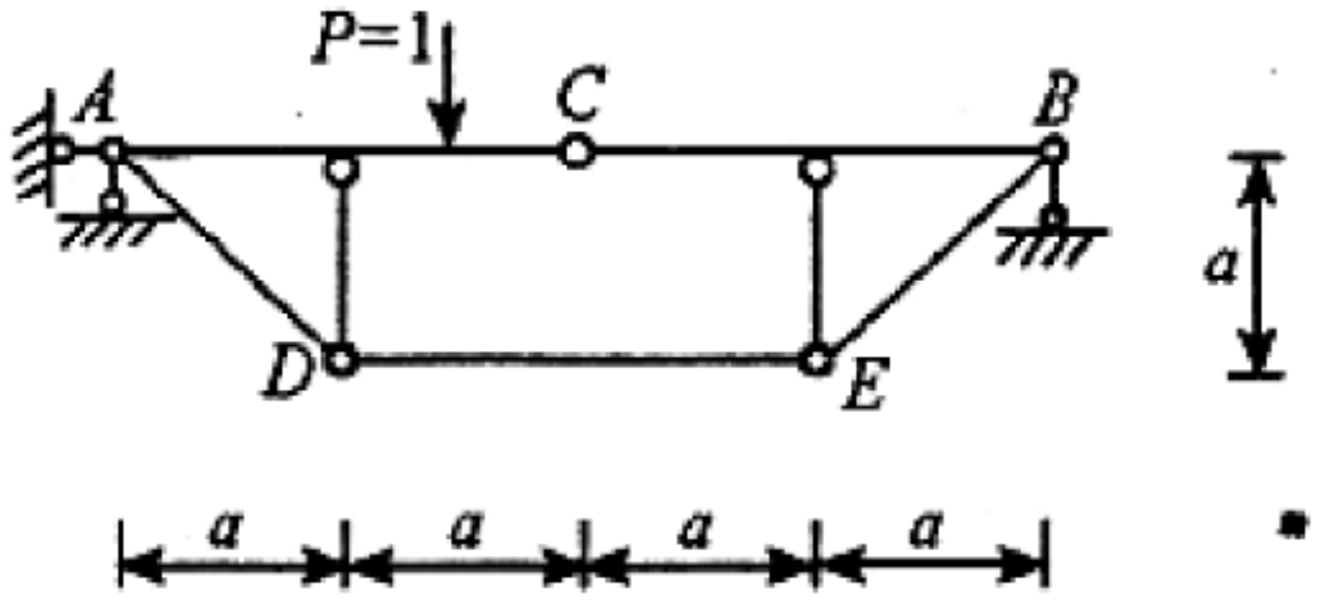


图 11-3-2

【答案】1

【解析】链杆 DE 轴力的影响线在 C 点处的竖标值即为当 C 点作用竖向单位力时 DE 杆的轴力；显然结构为对称的，易知 A、B 支座的竖向反力均为 1/2,；在 C 点沿竖向截开，取右半部分为隔离体，根据平衡条件：$\sum M_C = 0$，算得 DE 杆的轴力为 1。

二、选择题

1．图 11-3-3 所示三铰拱的拉杆 N_{AB} 的影响线为：（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．斜直线

B．曲线

C．平直线

D．三角形

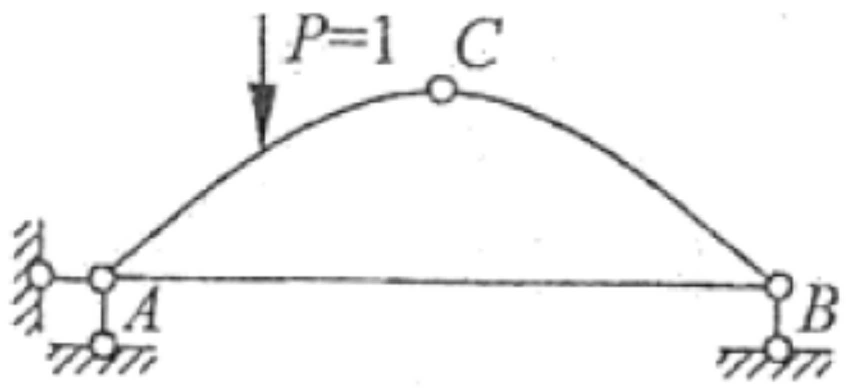


图 11-3-3

【答案】D

【解析】根据静力法判断，当 P=1 在 AC 段上时，N_{AB} 的值为 B 支座反力乘以一个常数（BC 水平投影与拱高的比值），同理当 P=1 在 CB 段上时，N_{AB} 的值为 A 支座反力乘以一个常数（AC 水平投影与拱高的比值）；易知 A、B 支座反力的影响线为两个直角三角形，所以 N_{AB} 的影响线为 A、B 支座反力的影响线乘以常数后的相交区域的三角形。

2．简支梁绝对最大弯矩的意义是（　　）。[西南交通大学 2007 研]

A．梁中某截面的最大弯矩值

B．距梁中点较近的某截面的弯矩值

C．梁中各截面最大弯矩中的最大者

D．梁中点截面的最大弯矩值

【答案】C

【解析】此题考察对基本概念的理解。弯矩包络图表示出了各截面的最大弯矩值，其中弯矩值最大者称为绝对最大弯矩。

3．结构某截面某一内力影响线将（　　）而改变。[宁波大学 2009 研]

A．随实际荷载

C．因坐标系的不同选择

B．不随实际荷载

D．随实际荷载的数值

【答案】B

【解析】影响线是指当方向不变的单位集中荷载沿结构移动时，表示结构某指定处的某一量值（反力或某截面的内力等）变化规律的图形。其中明确规定单位荷载，故与实际荷载无关；静力法求解影响线时，坐标系可以

任意选取，故影响线与坐标系无关。

4．图 11-3-4 所示结构 M_A 影响线在 D 处的纵坐标值为（　　）。[哈尔滨工业大学 2007 研]

A．0

B．l

C．0.5l

D．1.118 l

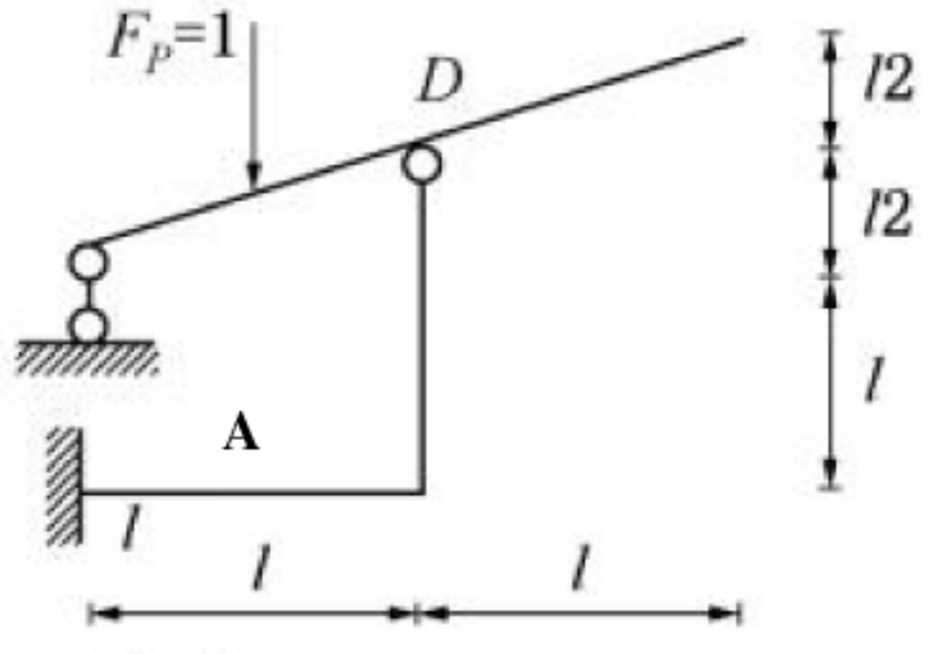


图 11-3-4

【答案】B

【解析】M_A 影响线在 D 处的纵坐标值即 F_P=1 作用在 D 处时 A 处的弯矩值。当 D 处作用一个单位集中力时，结构根据平衡条件：$\sum M_A=0$，则可得出 A 端的弯矩 $M_A=l$。

5．图 11-3-5 所示结构在单位移动力偶 M=1 作用下，M_C（下侧受拉为正）影响线为（　　）。[浙江大学 2006 研]

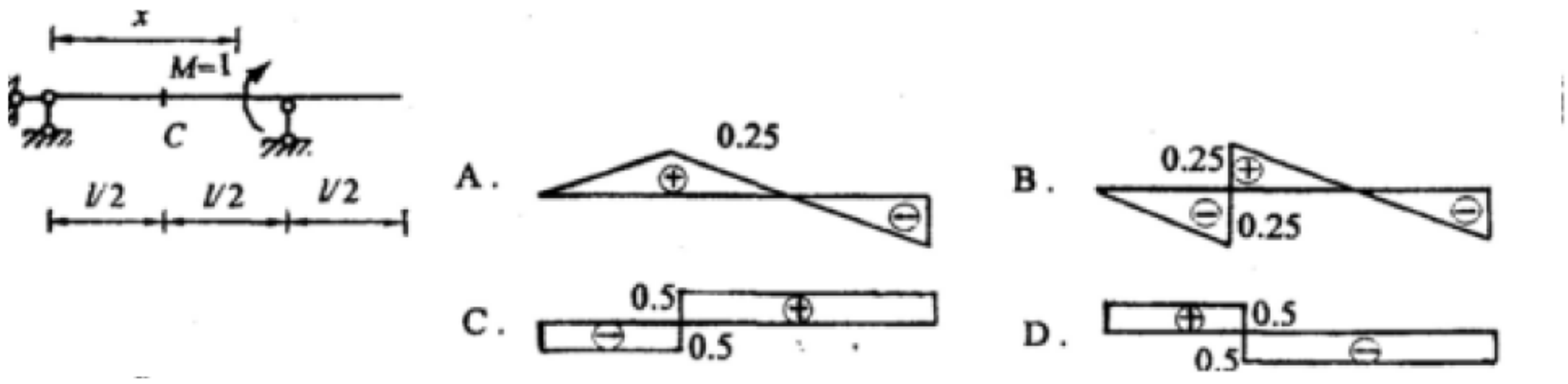


图 11-3-5

【答案】D

【解析】判断特殊点处的值，进行排除。当单位力偶作用在左端支座时，C 截面的弯矩为＋0.5；当单位力偶作用在右端支座时，C 截面的弯矩为-0.5；当单位力偶作用在悬臂端时，C 截面的弯矩为-0.5；故 D 项正确。

三、判断题

1．图 11-3-6（a）所示结构 a 杆的内力影响线如图 11-3-6（b）所示。（　　）[天津大学 2005 研]

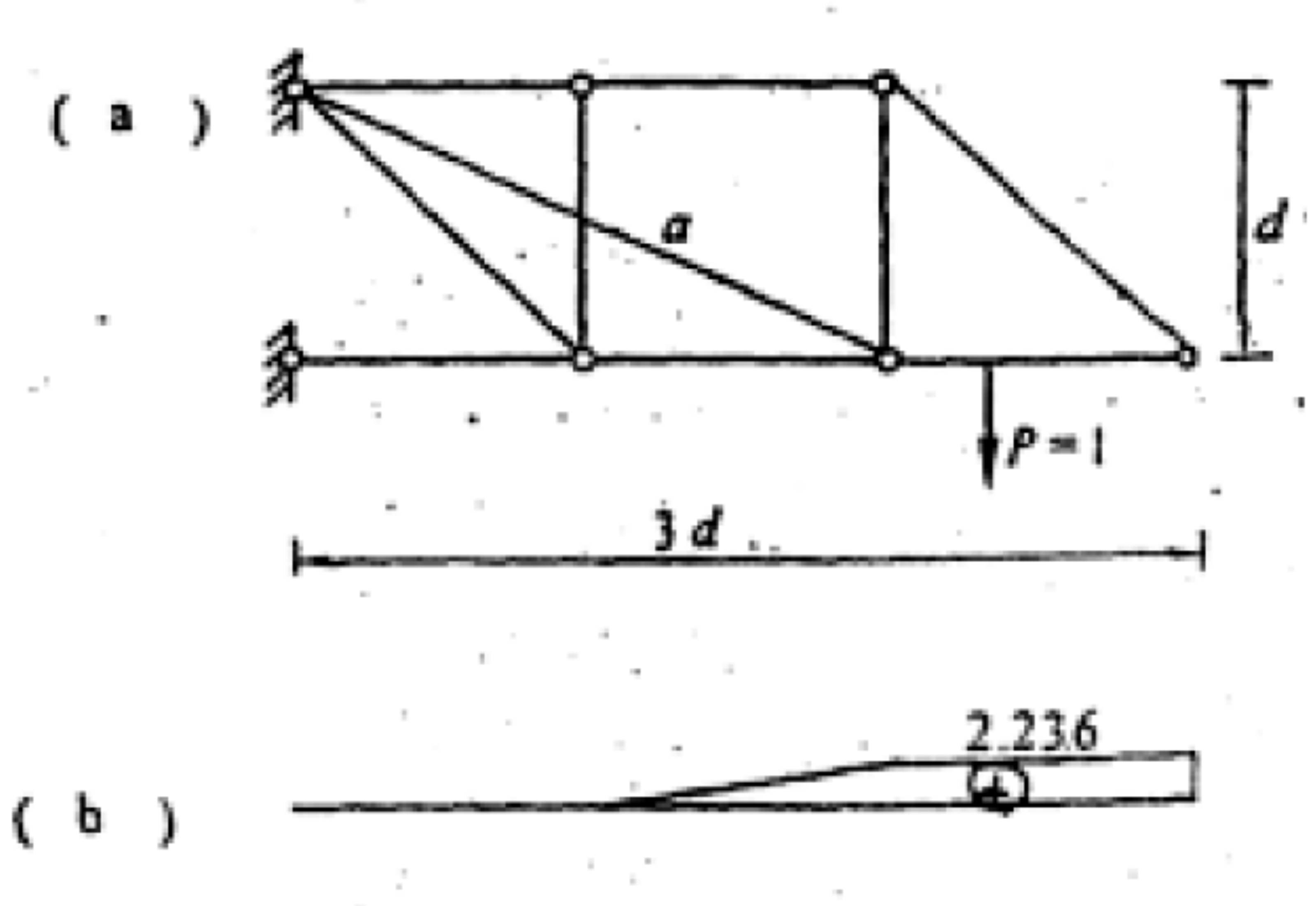


图 11-3-6

【答案】对

【解析】求解图 11-3-6（a）所示结构 a 杆的内力影响线，因为不会有突变，故只需将单位集中力作用在下弦各个结点处时 a 杆的内力值求出，两两连直线即可。单位集中力作用在左边支座结点处时，a 杆为零杆；当单位集中力作用在左边第一个结点处时，a 杆为零杆；当单位集中力作用在左边第二个结点处时，根据结点法可知 a 杆的轴力为 2.236；当单位集中力作用在右边第一个结点处时，根据截面法可知 a 杆的轴力为 2.236；综上，可知图 11-3-6（b）所示 a 杆的内力影响线是正确的。

2．图 11-3-7 所示结构，F_P=1 在 AB 段移动时，K 截面的弯矩影响线 M_K 为零。（　　）[西南交通大学 2008 研]

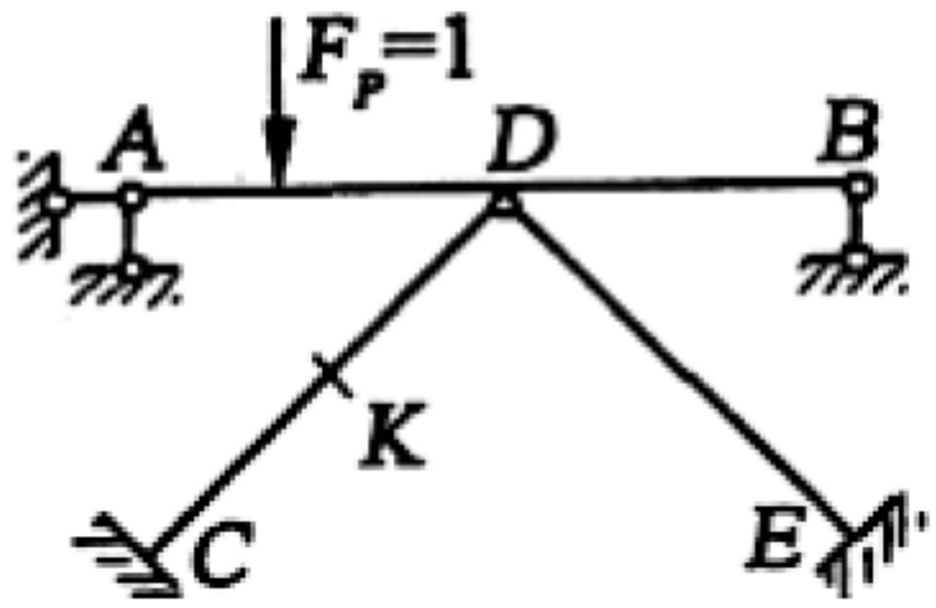


图 11-3-7

【答案】对

【解析】当 F_P=1 在 AB 段移动时，在 D 结点处产生的水平集中力和竖向集中力的合力总是沿着 CD 杆，所以 CD 杆只受轴力，不存在弯矩，所以 K 截面的弯矩影响线 M_K 为零。

3．结构上某截面剪力的影响线，在该截面处必定有突变。[中南大学 2005 研]

【答案】对

【解析】采用机动法绘制某一截面的剪力影响线时，将该截面换为可上下移动的滑动支座，在该截面两侧则施加方向相反的单位力，必定一侧支座向上移动，另一侧支座向下移动，即该截面处剪力必定突变。

四、计算题

1．图 11-3-8 所示竖向荷载在梁 EF 上移动，利用影响线求绝对值为最大的 M_C。[西南交通大学 2007 研]

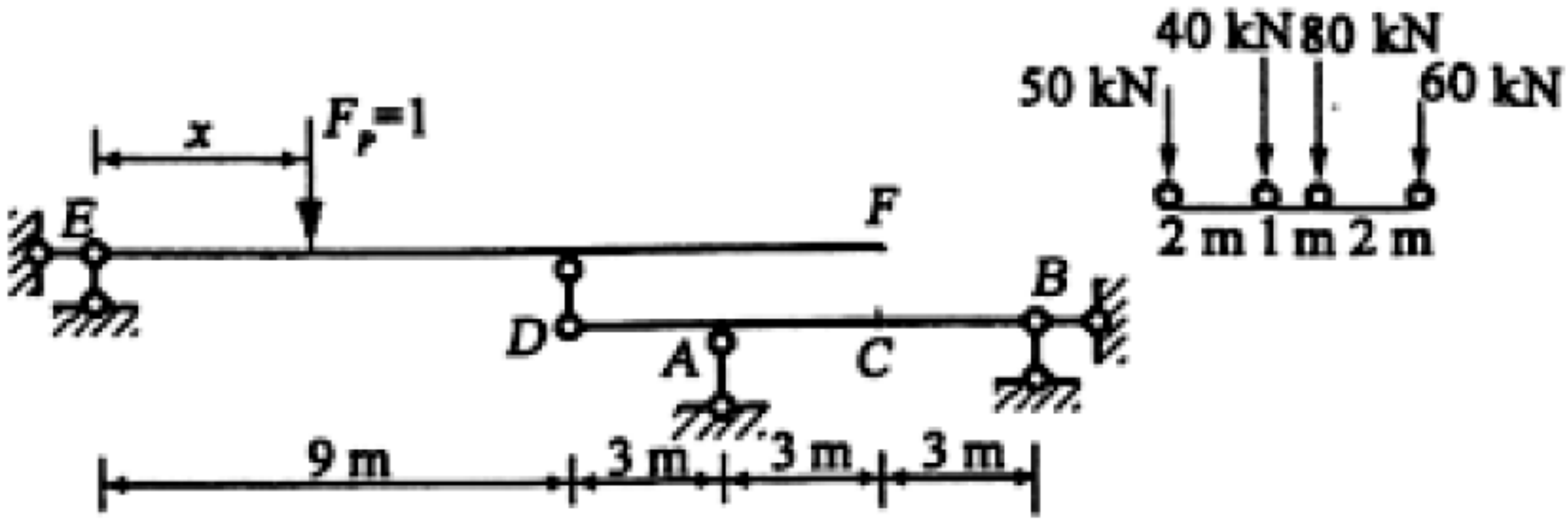


图 11-3-8

解：取 E 点为原点，向右为正，则可求得支座 D 处的反力为：

$$Y_D = x/3a$$

进而求得支座 *A* 处的竖直反力为：

$$F_{Ay} = 3Y_D/2 = x/2a$$

绘制此时的影响线如下图 11-3-9 所示。

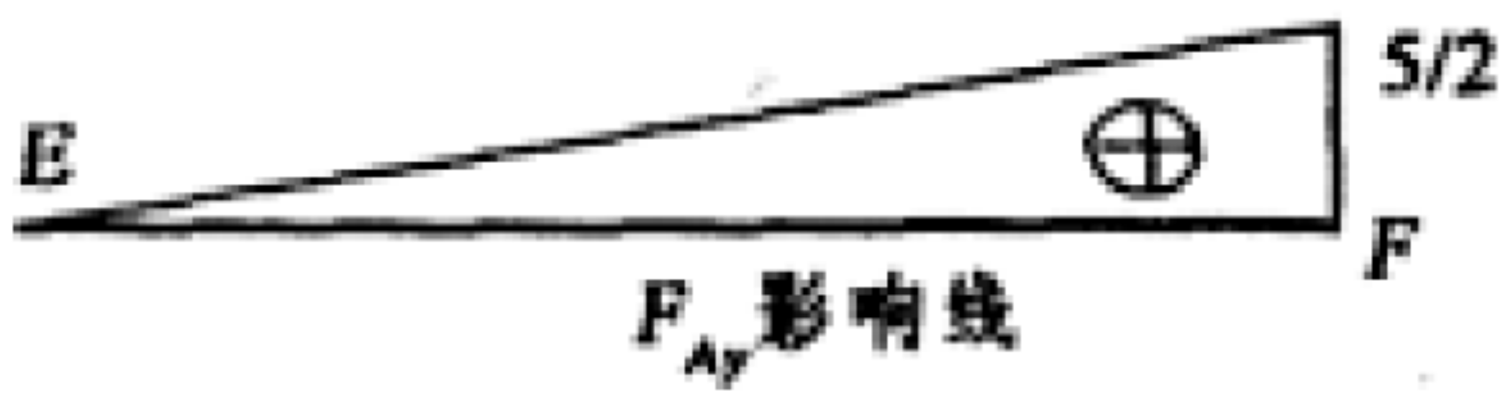


图 11-3-9

支座 C 处的弯矩为

$$M_C = -x/6a$$

绘制影响线如下图 11－3－10 所示。

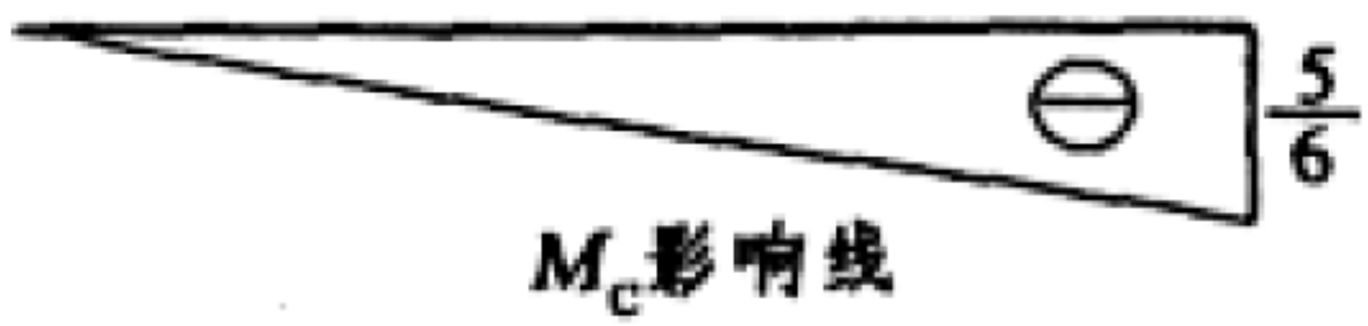


图 11-3-10

上式中 a=3m，所以可求得 *C* 截面的最大弯矩为：

$$M_{C\max} = -486.67\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

2．作图 11-3-11 所示结构 a 点的弯矩和剪力影响线，可不写分析过程。[东南大学 2005 研]

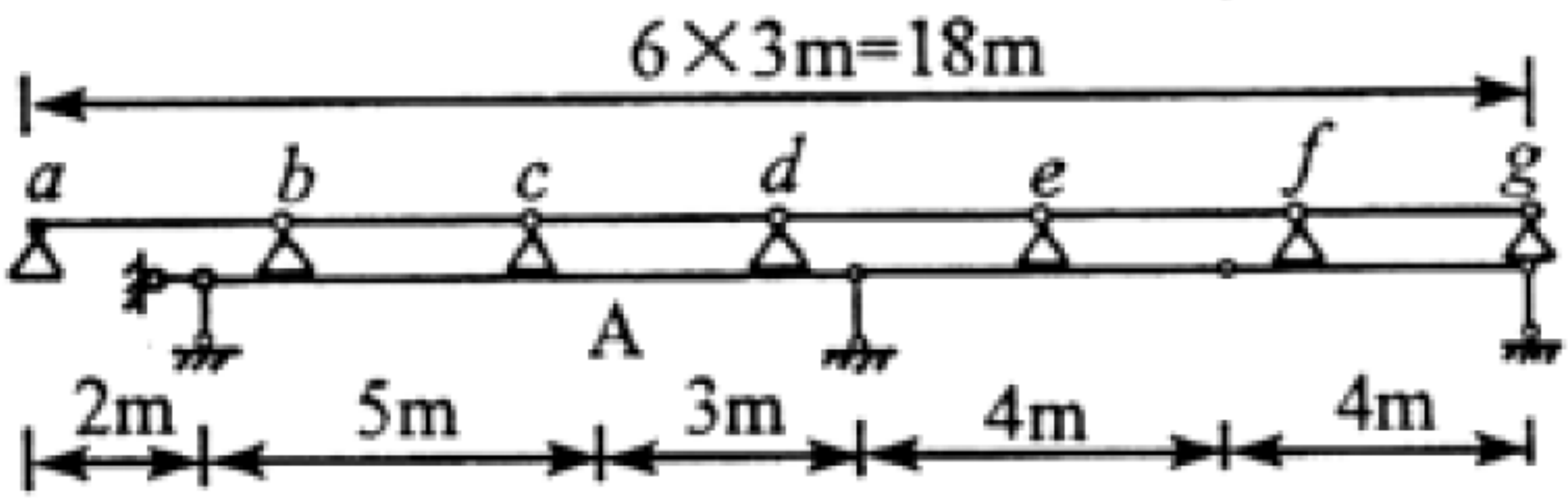


图 11-3-11

解：可利用机动法求解。先绘制题图所示结构中下方连续梁的影响线图，然后再剪掉由于存在 *a*、g 而造成

的减小值，即可画出弯矩的影响线如下图 11-3-12 所示：

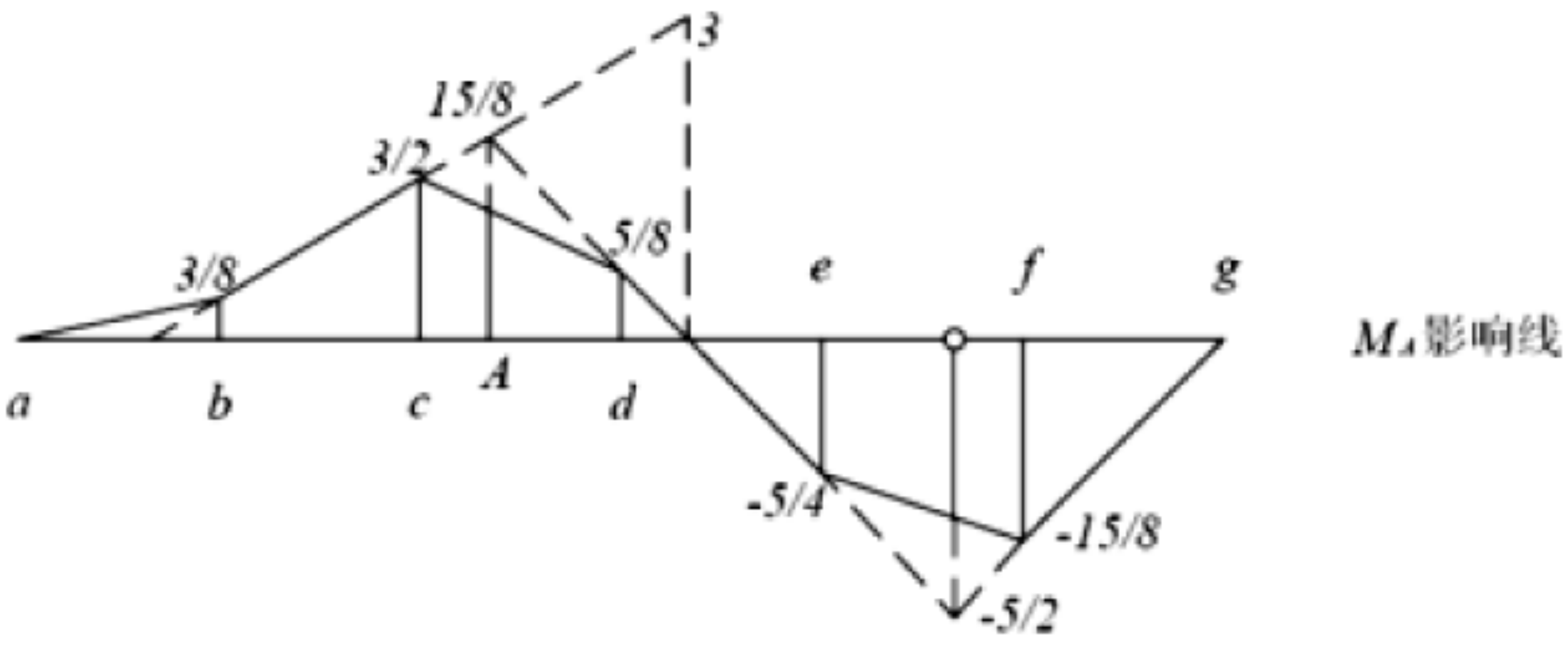


图 11-3-12

同理，可以画出剪力的影响线如下图 11-3-13 所示：

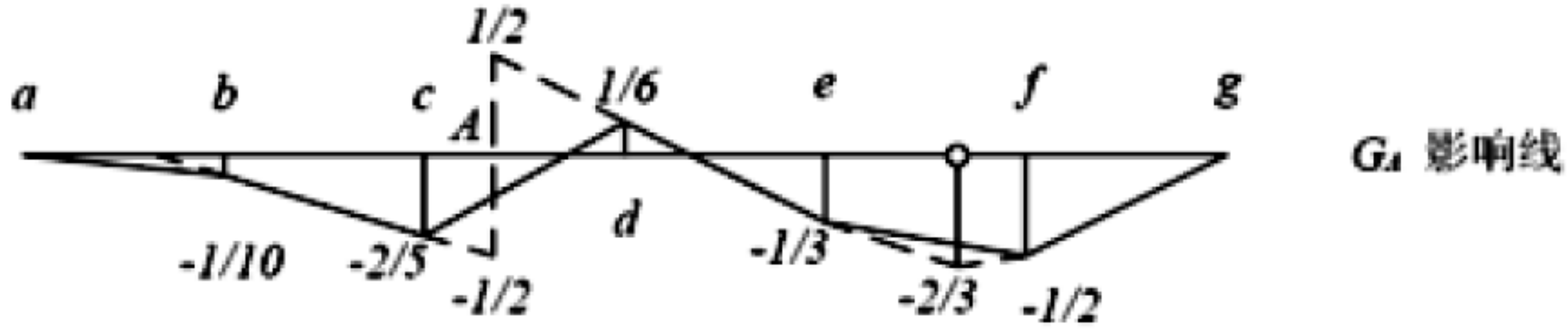


图 11-3-13

上图 11-3-13 中，虚线表示由于存在 *a*、*g* 而造成下面连续梁的影响线的减小值。

3．试作图 11-3-14 所示结构弯矩 M_1、剪力 Q_2 和轴力 N_3 影响线。[福州大学 2007 研]

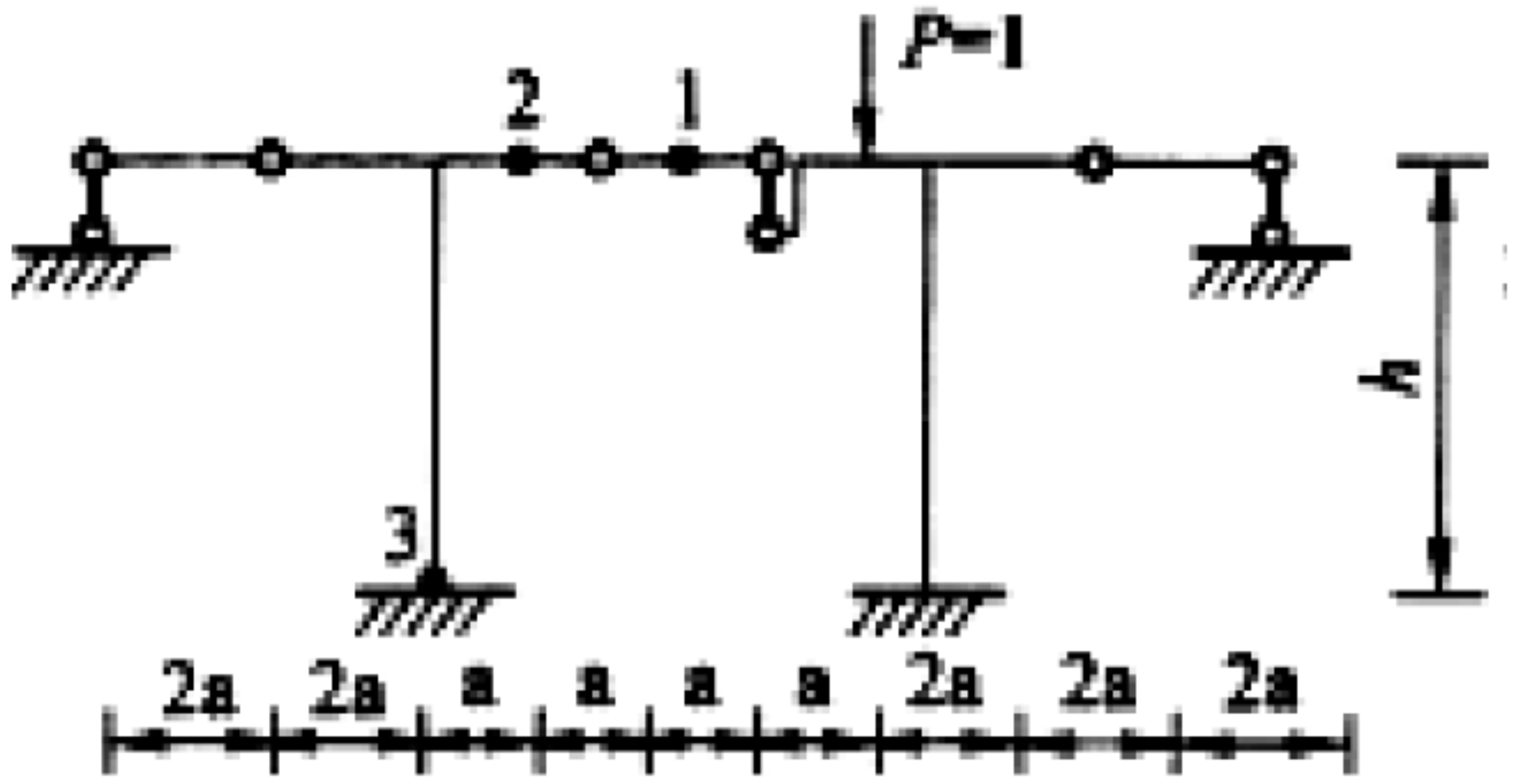


图 11-3-14

解：（1）由图示结构可知，两边的 T 型杆分别为结构的基本体系，而截面 1 在附属结构中，没有力的作用，不会对其内力产生影响，所以可按单跨静定梁来进行绘制，则 Q_1 和 M_1 的影响线如下图 11-3-15 所示。

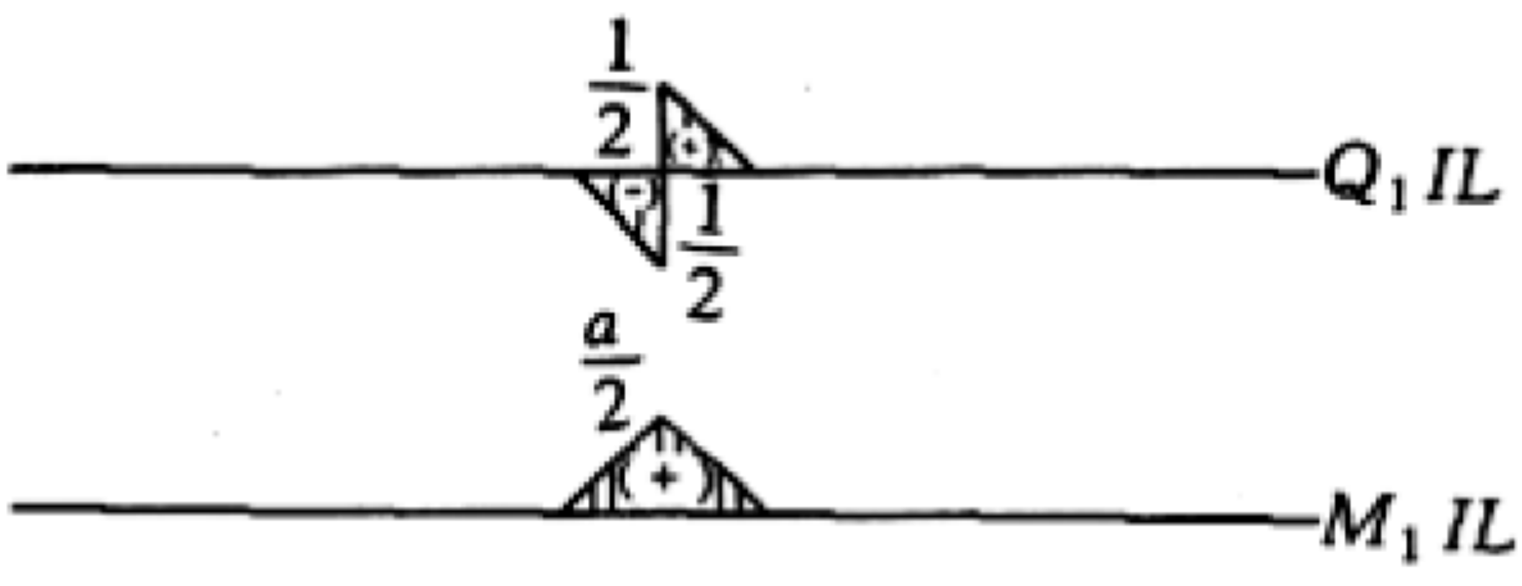


图 11-3-15

（2）可用机动法绘制 Q_2 和 M_2 的影响线。将体系在截面 2 处断开，去掉相应的约束，如下图 11－3－16 所示。

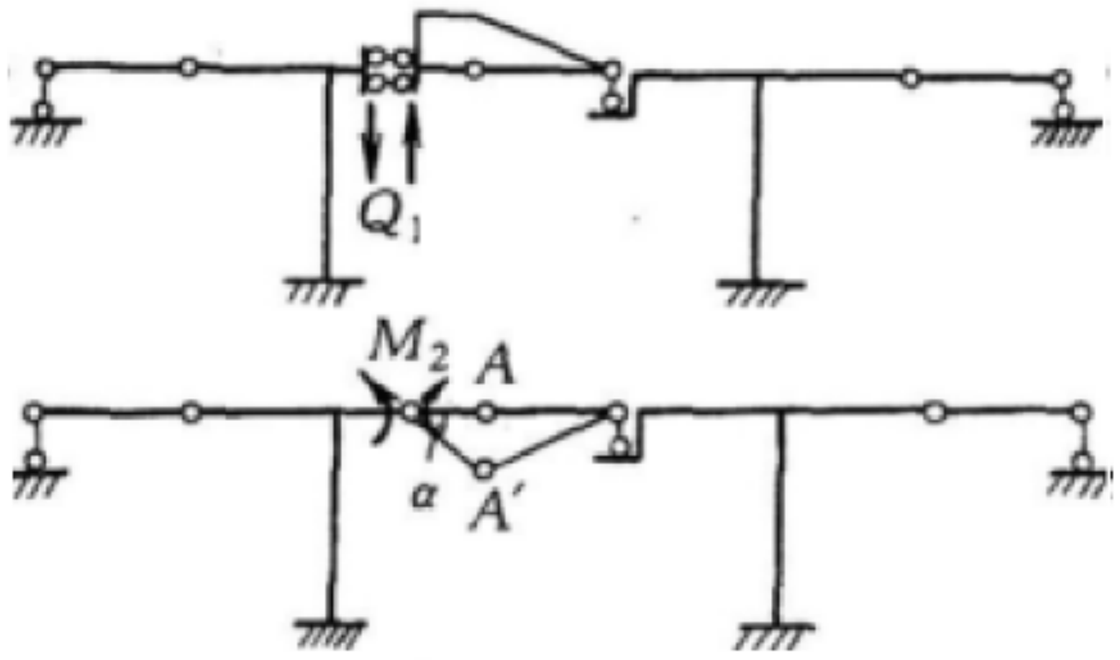


图 11-3-16

在力 Q_1 的作用下左侧为刚性静定结构，所以不会有位移，只有右侧的结构会产生位移，由于都是铰支连接，故易得影响线如下图 11-3-17 所示。



图 11-3-17

同理，在弯矩 M_2 的作用下也只有右侧有位移，影响线如下图 11-3-18 所示。



图 11-3-18

（3）同样采用机动法来绘制 Q_3 和 M_3 的影响线。去掉相应的约束，加上相应的支座，则分别如下图 11-3-19 所示。

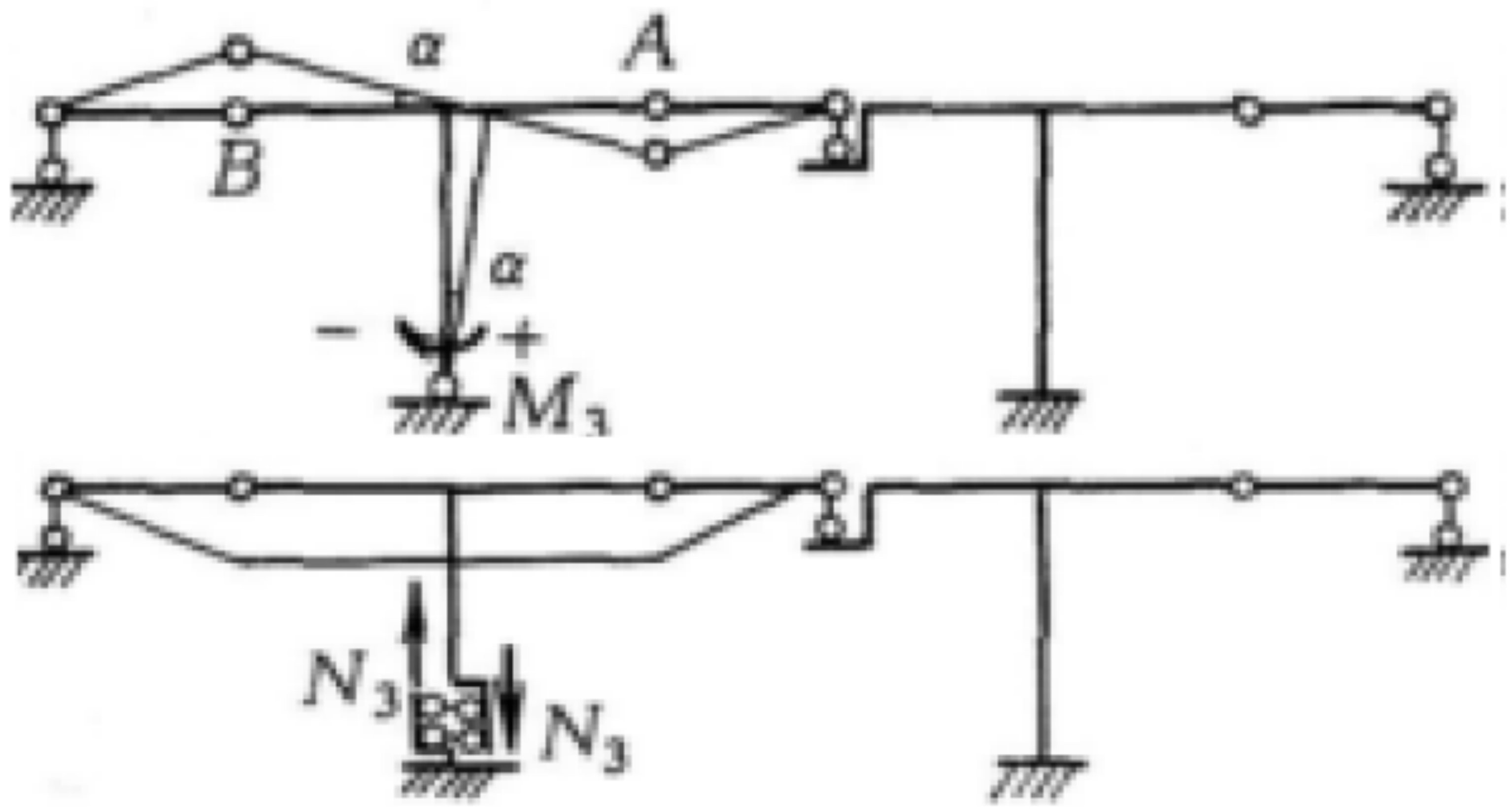


图 11-3-19

设右侧受拉为正，T 型刚架绕 3 铰支转动时，会带动 A 和 B 点位移，AB 也会转动单位角，故 A 和 B 点的竖向位移分别为＋2a 和－2a，影响线如下图 11-3-20 所示。

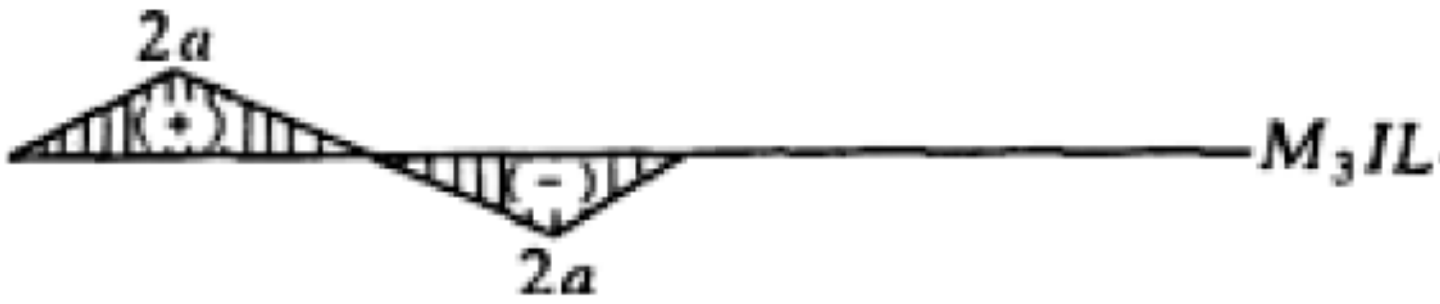


图 11-3-20

画轴力的影响线时，设其正向做单位轴向虚位移。由于下端固定，T 型钢构只能向下平移单位虚位移，并带动 A 和 B 铰支下移，影响下如下图 11－3－21 所示。

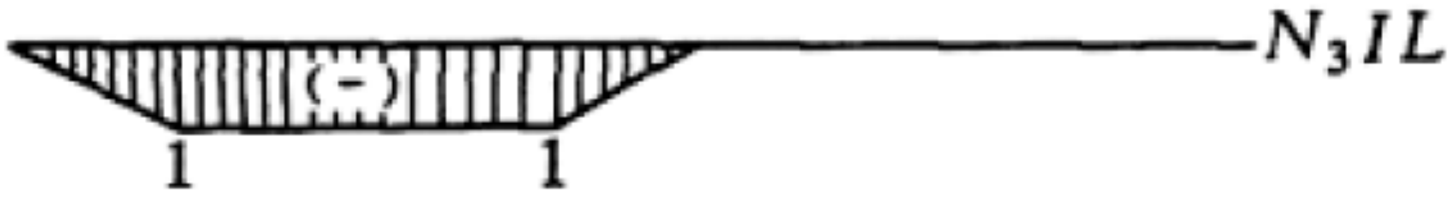


图 11-3-21

4．求图 11-3-22 所示结构 C 点弯矩的最大值。[同济大学 2004 研]

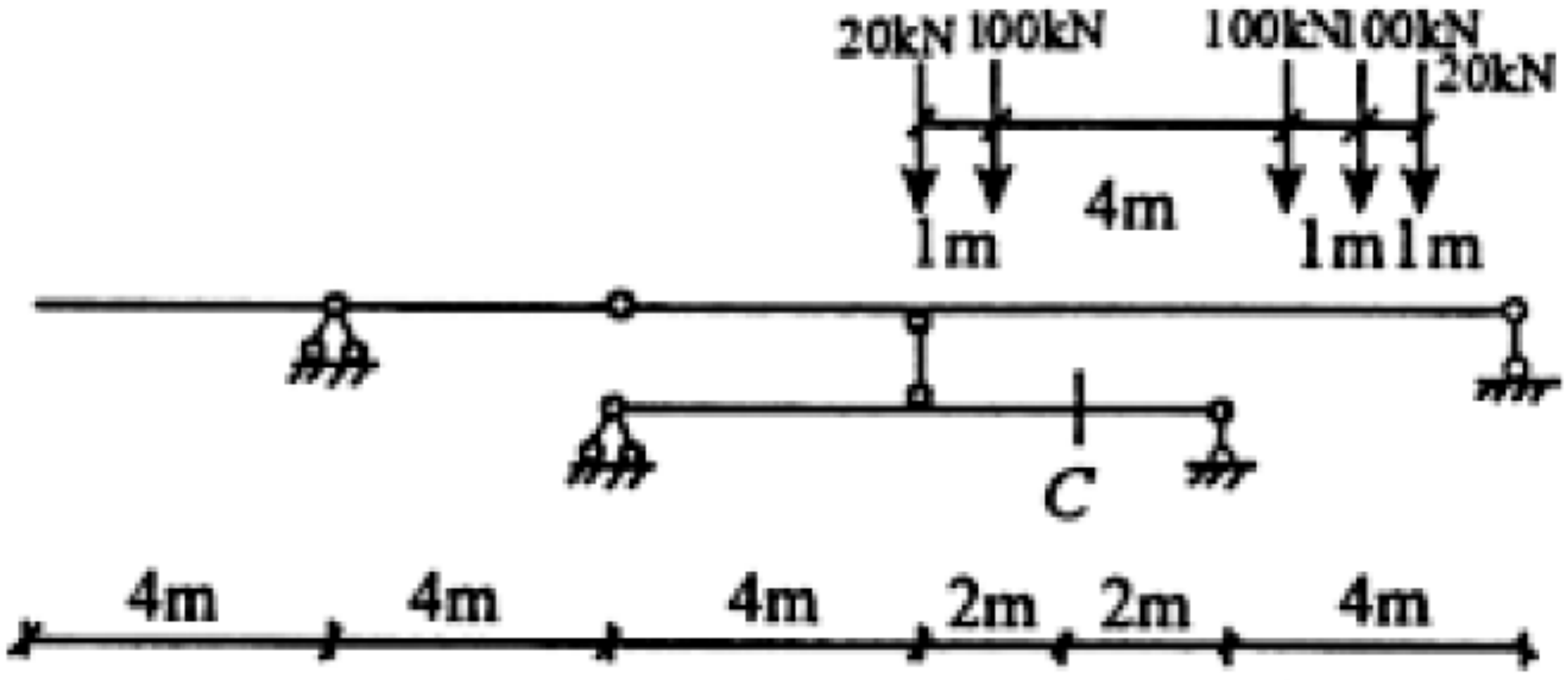


图 11-3-22

解：（1）由机动法，可画出弯矩的影响线，如下图 11-3-23 所示

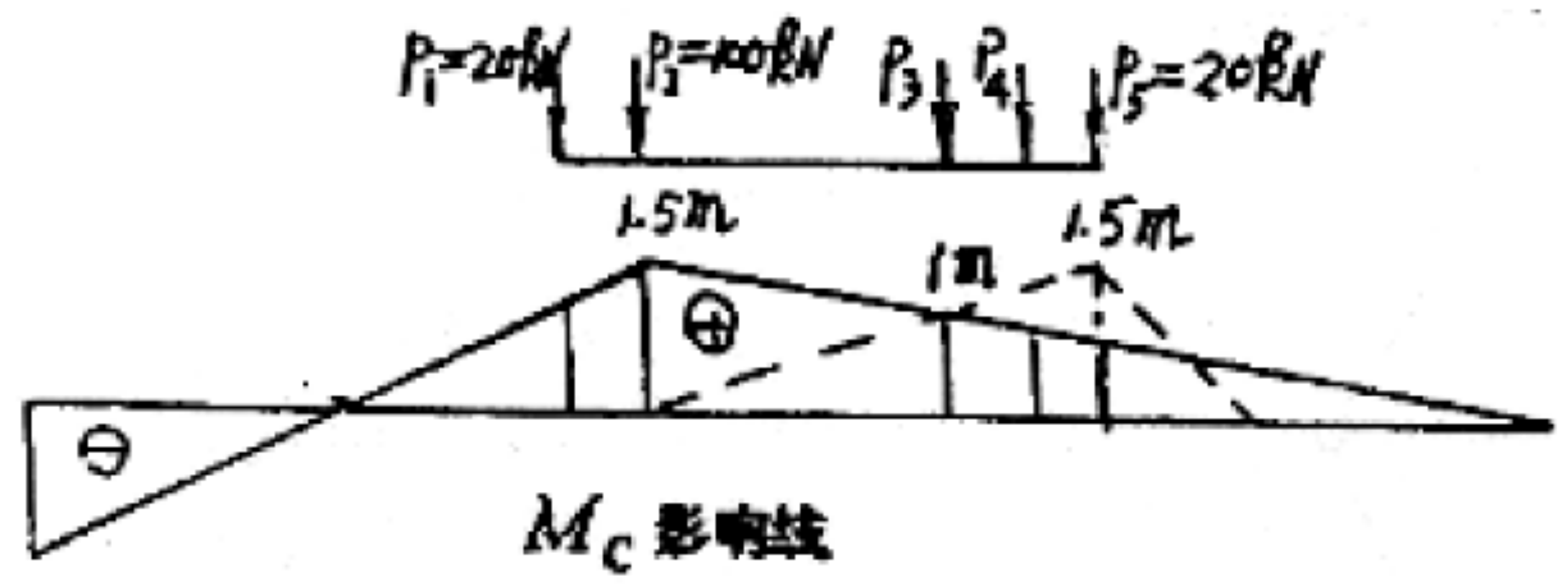


图 11-3-23

（2）第一种情况：P_1 位于影响线顶点。此时有

$$\text{左移}\qquad \frac{20}{4} < \frac{100\times 3+20}{12}$$

所以 P_1 不是临界荷载。

第二种情况：P_2 位于影响线顶点。此时有

$$\text{左移}\qquad \frac{20+100}{4} < \frac{100\times 2+20}{12}$$

$$\text{右移}\qquad \frac{20}{4} < \frac{100\times 3+20}{12}$$

此时是临界荷载，则有

$$M_C = 20\times 1.5\times \frac{3}{4} + 100\times 1.5\times \left(1+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\right) + 20\times 1.5\times \frac{1}{2} = 375kN\cdot m$$

第三种情况：P_3 位于影响线顶点。此时有

$$\text{左移}\qquad (20+100\times 2)\times \frac{1.5}{4} + (100+20)\times\left(-\frac{1.5}{12}\right) > 0$$

$$\text{右移}\qquad (20+100\times 2)\times \frac{1.5}{4} + (100\times 2+20)\times\left(-\frac{1.5}{12}\right) > 0$$

所以不是临界荷载。